



САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ИЗВЕСТИЯ

САРАТОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
Новая серия



Научный журнал
2008 Том 8

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918 и «Ученых записок СГУ» 1923–1962

Издается с 2001 года

Решением Президиума ВАК Министерства образования и науки РФ журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертационных исследований на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Пирметова С.Я. Аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лагерра на классах гладких функций 3

Механика

Коссович Л.Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях 12

Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности (кинематические соотношения, определяющие течение на грани и ребре призмы Кулона - Треска) 34

Информатика

Мионов С.В. Об одном алгоритме для поиска маски диагностической информации 77

Приложения

Хроника

Коссович Л.Ю. Международная конференция «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» 85

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич

Заместитель главного редактора

Усанов Дмитрий Александрович

Ответственный секретарь

Клоков Василий Тихонович

Члены редакционной коллегии

Аврус Анатолий Ильич

Белов Владимир Николаевич

Бучко Ирина Юрьевна

Вениг Сергей Борисович

Волкова Елена Николаевна

Голуб Юрий Григорьевич

Данилов Виктор Николаевич

Дыльнов Геннадий Васильевич

Захаров Андрей Михайлович

Зимняков Дмитрий Александрович

Кабанин Вячеслав Кузьмич

Комкова Галина Николаевна

Лебедева Ирина Владимировна

Левин Юрий Иванович

Монахов Сергей Юрьевич

Прозоров Валерий Владимирович

Прохоров Дмитрий Валентинович

Смирнов Анатолий Константинович

Федотова Ольга Васильевна

Федорова Антонина Гавриловна

Худяков Глеб Иванович

Чумаченко Алексей Николаевич

Шляхтин Геннадий Викторович

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич

Заместители главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович

Сперанский Дмитрий Васильевич

Ответственный секретарь

Сидоров Сергей Петрович

Члены редакционной коллегии:

Дудов Сергей Иванович

Кузнецов Валентин Николаевич

Лукашов Алексей Леонидович

Митрофанов Юрий Иванович

Насыров Семен Рафаилович

Недорезов Петр Феодосьевич

Пархоменко Павел Павлович

Розен Виктор Владимирович

Резчиков Александр Федорович

Салий Вячеслав Николаевич

Суботин Юрий Николаевич

Твердохлебов Владимир Александрович

Федорова Антонина Гавриловна

Хромов Август Петрович

Шиндяпин Георгий Петрович

Юрко Вячеслав Анатольевич

Зарегистрировано

в Министерстве Российской

Федерации по делам печати,

телерадиовещания и средств

массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации СМИ

ПИ № 77-7185 от 30 января 2001 года



ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал принимает к публикации научные статьи по всем основным разделам математики, механики и информатики (функциональный анализ, дифференциальные уравнения, алгебра и логика, дискретная математика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, теория условно-корректных задач математической физики, вычислительные методы линейной алгебры, механика деформируемого твердого тела, механика жидкости, газа и плазмы, биомеханика, теоретические основы информатики, математическая кибернетика и др.)

Объем публикуемой статьи не должен превышать 18 страниц машинописи (формат А4, шрифт 14, поля не менее 2 см со всех сторон), включая библиографию. К статье прилагается сопроводительное письмо, сведения об авторах: фамилии, имена и отчества (полностью), место работы авторов (вуз, кафедра), адрес для переписки, e-mail.

Последовательность предоставления материала: индекс УДК; название работы, инициалы и фамилии авторов, место работы (вуз, кафедра), e-mail, аннотация на русском языке, название и аннотация на английском языке, текст статьи; библиографический список. Не допускается нумерация формул, на которые в статье нет ссылок. В библиографическом списке нумерация источников должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте. Файлы рисунков следует продублировать в формате jpg.

В редакцию высылаются 2 экземпляра текста статьи и файл, подготовленный с использованием LaTeX (согласно стилевому файлу, размещенному на web-странице журнала www.sgu.ru/journal). Файлы статьи в формате pdf и tex можно направить по адресу journal@info.sgu.ru.

Датой поступления считается дата поступления окончательного варианта статьи. Возвращенная на доработку статья должна быть прислана в редакцию не позднее, чем через 6 месяцев; возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Материалы, отклоненные редколлегией, не возвращаются.

Ведущий редактор

Бучко Ирина Юрьевна

Редактор

Митенёва Елена Анатольевна

Художник

Соколов Дмитрий Валерьевич

Верстка

Багаева Ольга Львовна

Технический редактор

Агальцова Людмила Владимировна

Корректор

Крылова Елена Борисовна

Адрес редакции

410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Издательство Саратовского университета

Тел.: (845-2) 52-26-89, 52-26-85

E-mail: izdat@sgu.ru

Подписано в печать 16.06.08.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 10,23 (11).

Уч.-изд. л. 10,4.

Тираж 500 экз. Заказ 61.

Отпечатано в типографии

Издательства Саратовского университета

© Саратовский государственный университет, 2008

CONTENTS

Scientific Part

Mathematic

- Pirmetova S.Ya.** Approximative Properties of Mixed Series by Lagerre's Polynomials on Classes of Smooth Functions 3

Mecanics

- Kossovich L.Yu.** Asymptotic Methods in Dynamics of Shells under Shock Loading 12

- Radayev Yu.N.** Three-Dimensional Problem of Perfect Plasticity (Kinematic Equations Determining Three-Dimensional Plastic Flow for a Facet and Edge of the Tresca Prism) 34

Informatics

- Mironov S.V.** On One Algorithm for Finding of a Mask of Diagnostic Information 77

Appendices

Khronika

- Kossovich L.Yu.** International Conference «XVIII Session of International School on Models of Continuum Mechanics» 85

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СМЕШАННЫХ РЯДОВ ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА НА КЛАССАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

С.Я. Пирметова

Дагестанский государственный педагогический университет,
кафедра прикладной математики
E-mail: Saida-pirmetova@mail.ru

Рассмотрены аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лагерра на классах гладких функций, заданных на полуоси $[0, \infty)$. Для оценки отклонения гладкой функции от ее частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лагерра получено неравенство, аналогичное неравенству Лебега для тригонометрических сумм Фурье. Получены оценки для соответствующей функции типа функции Лебега частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лагерра.

Approximative Properties of Mixed Series by Lagerre's Polynomials on Classes of Smooth Functions

S.Ya. Pirmetova

Approximative properties of mixed series by Lagerre's polynomials on classes of smooth functions that given on axle $[0, \infty)$ are viewed. Inequality that corresponds to Lebesgue inequality for trigonometric Fourier sums was found for evaluation of deflection of smooth function from it's partial sums of mixed series by Lagerre's polynomials. Evaluations for corresponding Lebesgue function of partial sums of mixed series by Lagerre's polynomials were found.

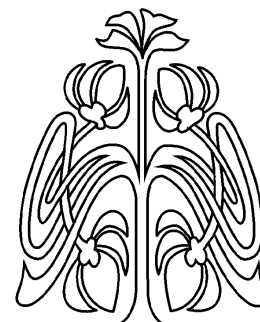
ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию аппроксимативных свойств смешанных рядов по полиномам Лагерра на классах гладких функций, заданных на полуоси $[0, \infty)$. Смешанные ряды по классическим ортогональным полиномам были введены и исследованы в работах И.И. Шарапудинова. Основные операторные свойства смешанных рядов по ортогональным полиномам, включая смешанные ряды по полиномам Лагерра, подробно рассмотрены в монографии [1] и работах [2],[3]. В [1] рассмотрены также аппроксимативные свойства смешанных рядов Лагерра на классах $W_{L_{p,\rho}}^r(0, \infty)$ (см. ниже теорему 2.1). Однако оставалась не исследованной задача об аппроксимативных свойствах смешанных рядов по полиномам Лагерра на классах $W^r(0, \infty) = W^r$, состоящих из непрерывно-дифференцируемых функций, заданных на $[0, \infty)$. В данной работе предпринята попытка восполнить этот пробел.

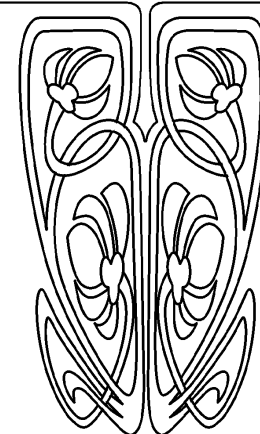
1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЛАГЕРРА

В настоящей работе для удобства ссылок мы рассмотрим ряд свойств полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ и определим их с помощью формулы Родрига

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad (1.1)$$



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





где α – произвольное действительное число. Если $\alpha > -1$, то полиномы Лагерра образуют ортогональную систему на $[0, \infty)$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, точнее:

$$\int_0^\infty \rho(x) L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \delta_{nm} h_n^\alpha, \tag{1.2}$$

где

$$h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \Gamma(\alpha+1). \tag{1.3}$$

Следующие свойства полиномов Лагерра хорошо известны [4]:
производная

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x) \tag{1.4}$$

рекуррентная формула

$$n L_n^\alpha(x) = (-x + 2n + \alpha - 1) L_{n-1}^\alpha(x) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^\alpha(x), \tag{1.5}$$

где $L_{-1}^\alpha(x) = 0$, $L_0^\alpha(x) = 1$, $L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1$, ($n = 1, 2, \dots$) и (как следствие),
формула Кристоффеля – Дарбу

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+1) \mathcal{K}_n^\alpha(x, y) &= \sum_{\nu=0}^n \left\{ \binom{\nu+\alpha}{\nu} \right\}^{-1} L_\nu^\alpha(x) L_\nu^\alpha(y) = \\ &= (n+1) \left\{ \binom{n+\alpha}{n} \right\}^{-1} \frac{L_n^\alpha(x) L_{n+1}^\alpha(y) - L_n^\alpha(y) L_{n+1}^\alpha(x)}{x-y}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

равенство

$$L_k^{-l}(x) = \frac{(-x)^l}{k^{[l]}} L_{k-l}^l(x), \tag{1.7}$$

где $k^{[l]} = k(k-1)\dots(k-l+1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$

В работах [5–7] установлена оценка ($s = 4n + 2\alpha + 2$):

$$|L_n^\alpha(x)| \leq c(\alpha) A_n^\alpha(x) \quad (0 \leq x < \infty), \tag{1.8}$$

где

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} e^{x/2} s^\alpha, & \text{если } 0 \leq x \leq 1/s, \\ e^{x/2} s^{\alpha/2-1/4} x^{-\alpha/2-1/4}, & \text{если } 1/s < x \leq s/2, \\ e^{x/2} [s(s^{1/3} + |x-s|)]^{-1/4}, & \text{если } s/2 < x \leq 3s/2, \\ e^{x/4}, & \text{если } 3s/2 < x. \end{cases} \tag{1.9}$$

Для нормированных многочленов Лагерра $\hat{L}_n^\alpha(x) = (h_n^\alpha)^{-1/2} L_n^\alpha(x)$ имеет место оценка (полагаем здесь $s = 4n + 2\alpha + 2$ [5–7]):

$$e^{-\frac{x}{2}} \left| \hat{L}_{n+1}^\alpha(x) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(x) \right| \leq c(\alpha) \begin{cases} s^{\alpha/2-1}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1/s, \\ s^{-3/4} x^{-\alpha/2+1/4}, & \text{если } 1/s < x \leq s/2, \\ x^{-\alpha/2} s^{-3/4} (s^{1/3} + |x-s|)^{1/4}, & \text{если } s/2 < x \leq 3s/2, \\ e^{-x/4}, & \text{если } 3s/2 < x. \end{cases} \tag{1.10}$$

Заметим, что

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x, y) = \sum_{k=0}^n \hat{L}_k^\alpha(x) \hat{L}_k^\alpha(y), \tag{1.11}$$

поэтому в силу формул Кристоффеля – Дарбу мы можем записать

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x, y) = \frac{\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{y-x} \left[\hat{L}_{n+1}^\alpha(x) \hat{L}_n^\alpha(y) - \hat{L}_{n+1}^\alpha(y) \hat{L}_n^\alpha(x) \right].$$



Полагая здесь $\alpha_n = \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}$, имеем

$$\frac{1}{\alpha_n} \mathcal{K}_n^\alpha(x, y) = \frac{1}{y-x} \left[\hat{L}_{n+1}^\alpha(x) \hat{L}_n^\alpha(y) - \hat{L}_{n+1}^\alpha(y) \hat{L}_n^\alpha(x) \right], \quad (1.12)$$

$$\frac{1}{\alpha_{n-1}} \mathcal{K}_n^\alpha(x, y) = \frac{1}{\alpha_{n-1}} \hat{L}_n^\alpha(x) \hat{L}_n^\alpha(y) + \frac{1}{y-x} \left[\hat{L}_n^\alpha(x) \hat{L}_{n-1}^\alpha(y) - \hat{L}_n^\alpha(y) \hat{L}_{n-1}^\alpha(x) \right], \quad (1.13)$$

Складывая правые и левые части равенств (1.12) и (1.13), имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}} \right) \mathcal{K}_n^\alpha(x, y) &= \frac{1}{\alpha_{n-1}} \hat{L}_n^\alpha(x) \hat{L}_n^\alpha(y) + \\ &+ \frac{1}{y-x} \left[\hat{L}_n^\alpha(y) \left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(x) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(x) \right) - \hat{L}_n^\alpha(x) \left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(y) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(y) \right) \right], \end{aligned}$$

стало быть

$$\mathcal{K}_n^\alpha(x, y) = A_n \hat{L}_n^\alpha(x) \hat{L}_n^\alpha(y) + \frac{B_n}{y-x} \left[\hat{L}_n^\alpha(y) \left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(x) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(x) \right) - \hat{L}_n^\alpha(x) \left(\hat{L}_{n+1}^\alpha(y) - \hat{L}_{n-1}^\alpha(y) \right) \right], \quad (1.14)$$

где

$$A_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} < 1, \quad B_n = \frac{\alpha_n \alpha_{n-1}}{\alpha_n + \alpha_{n-1}} \leq n + |\alpha| + 1.$$

2. СМЕШАННЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА $L_n^0(x)$

Пусть α удовлетворяет условию $\alpha > -1$, $\mathcal{L}_{p,\rho}$ – пространство измеримых функций $f(x)$, заданных на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\rho}} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \rho(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $W_{\mathcal{L}_{p,\rho}}^r(0, \infty)$ ($p > 1$) обозначим подкласс функций $f = f(x)$ из $\mathcal{L}_{p,\rho}$, непрерывно дифференцируемых $(r-1)$ раз, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$, а $f^{(r)} \in \mathcal{L}_{p,\rho}$.

Рассмотрим следующее равенство:

$$f(x) = E_{r-1}^\alpha(f, x) + J_r^\alpha(f, x), \quad (2.1)$$

где

$$E_{r-1}^\alpha(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \left[f^{(\nu)}(0) - \frac{(-1)^{r-\nu}}{\Gamma(\nu-r+\alpha+1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+r-\nu+1)} f_{r,k}^\alpha \right] \frac{x^\nu}{\nu!}, \quad (2.2)$$

$$J_r^\alpha(f, x) = (-1)^r \sum_{k=0}^\infty f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x), \quad (2.3)$$

$f_{r,k}^\alpha = \frac{1}{h_k^\alpha} \int_0^\infty \rho(t) f^{(r)}(t) L_k^\alpha(t) dt$ – коэффициенты Фурье – Лагерра функции $f^{(r)}(x)$ по полиномам Лагерра.

Ряд $J_r^\alpha(f, x)$ будем называть *смешанным* рядом по полиномам Лагерра $L_k^\alpha(x)$, этим же термином мы обозначим правую часть равенства (2.1). В работах [1–3] также были рассмотрены достаточные условия на функцию $f(x)$, обеспечивающие сходимость смешанных рядов и справедливость равенства (2.1).

Теорема 2.1. Пусть $-1 < \alpha < 1$, $r \geq 1$, $A > 0$, $f \in W_{\mathcal{L}_{2,\rho}}^r$. Тогда смешанный ряд (2.3) сходится равномерно относительно $x \in [0, A]$, и для произвольного $x \in [0, \infty)$ имеет место равенство (2.1).



Смешанные ряды по полиномам Лагерра $L_n^\alpha(x)$ принимают особенно простой вид в случае $\alpha = 0$. В этом случае равенства (2.2) и (2.3) принимают следующий вид:

$$E_{r-1}^0(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!}, \quad (2.4)$$

$$J_r^0(f, x) = (-1)^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 L_{k+r}^{-r}(x), \quad (2.5)$$

$$f(x) = E_{r-1}^0(f, x) + J_r^0(f, x). \quad (2.6)$$

Если мы теперь воспользуемся равенством (1.7), то можем заметить, что

$$L_{k+r}^{-r}(x) = (-x)^r L_k^r(x) / (k+1)_r,$$

поэтому, подставляя это значение в (2.5), имеем

$$J_r^0(f, x) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} f_{r,k}^0 \frac{L_k^r(x)}{(k+1)_r}. \quad (2.7)$$

Сопоставляя (2.4), (2.6) и (2.7), мы приходим к следующему представлению смешанного ряда по полиномам Лагерра при $\alpha = 0$:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + x^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_r} L_k^r(x). \quad (2.8)$$

Операторы $\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f)$ в этом случае имеют вид

$$\mathcal{L}_{n+r}^0(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + x^r \sum_{k=0}^n \frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_r} L_k^r(x). \quad (2.9)$$

Из (2.9), в свою очередь, имеем

$$(\mathcal{L}_{n+r}^0(f, x))^{(\nu)}|_{x=0} = f^{(\nu)}(0), \quad (0 \leq \nu \leq r-1). \quad (2.10)$$

Дифференцирование равенств (2.8) и (2.9) дает ($0 \leq m \leq r-1$)

$$f^{(m)}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-m-1} f^{(m+\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + x^{r-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{r,k}^0}{(k+1)_{r-m}} L_k^{r-m}(x), \quad (2.11)$$

$$(\mathcal{L}_{n+r}^0(f, x))^{(m)} = \sum_{\nu=0}^{r-m-1} f^{(m+\nu)}(0) \frac{x^\nu}{\nu!} + x^{r-m} \sum_{k=0}^n \frac{f_{r,k}^0 L_k^{r-m}(x)}{(k+1)_{r-m}} = \mathcal{L}_{n+r-m}^0(f^{(m)}, x). \quad (2.12)$$

Для $-1 < \alpha < 1$, $f \in W_{\mathcal{L}_{2,\rho}}^r$ положим

$$J_{r,n}^\alpha(f, x) = (-1)^r \sum_{k=0}^n f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x), \quad (2.13)$$

$$\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f) = \mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f, x) = E_{r-1}^\alpha(f, x) + J_{r,n}^\alpha(f, x), \quad (2.14)$$

где $E_{r-1}^\alpha(f, x)$ – полином степени $r-1$, определенный равенством (2.2). Тогда из (2.1), (2.3), (2.13) и (2.14) имеем

$$f(x) = \mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f, x) + \mathcal{P}_{r,n}^\alpha(f, x), \quad (2.15)$$

где

$$\mathcal{P}_{r,n}^\alpha(f, x) = (-1)^r \sum_{k=n+1}^{\infty} f_{r,k}^\alpha L_{k+r}^{\alpha-r}(x). \quad (2.16)$$

Из (2.14) следует, что $\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f, x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$. Будем рассматривать $\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f) = \mathcal{L}_{n+r}^\alpha(f, x)$ как аппарат приближения гладких функций.

Заметим еще, что в силу теоремы 2.1, если $p_{n+r} = p_{n+r}(x)$ алгебраический полином степени $n+r$, то

$$\mathcal{L}_{n+r}^\alpha(p_{n+r}) = p_{n+r}. \quad (2.17)$$



3. АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $\mathcal{L}_{n+r}^0(f)$ НА КЛАССАХ $W^r(0, \infty)$

Будем рассматривать функции вида $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, для которых r -тая производная $f^{(r)}(x)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$e^{-x/2}|f^{(r)}(x)| \leq 1 \quad (0 \leq x < \infty). \quad (3.1)$$

Множество таких функций мы обозначим через $W^r(0, \infty)$. В настоящей работе мы рассмотрим аппроксимативные свойства частичных сумм смешанных рядов по полиномам Лагерра на классах $W^r(0, \infty)$.

Пусть $f \in W^r(0, \infty)$, тогда мы можем определить следующую величину:

$$E_m^r(f) = \inf_{p_m} \max_{x \in [0, \infty)} e^{-x/2} x^{-r/2+1/4} |f(x) - p_m(x)|, \quad (3.2)$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам $p_m(x)$ степени m , удовлетворяющим условиям

$$(p_m(x))|_{x=0}^{(\nu)} = f^{(\nu)}(0) \quad (0 \leq \nu \leq r-1). \quad (3.3)$$

Через $p_m^r(f) = p_m^r(f, x)$ мы обозначим алгебраический полином степени $m \geq r-1$, удовлетворяющий условиям (3.3), для которого

$$E_m^r(f) = \max_{x \in [0, \infty)} e^{-x/2} x^{-r/2+1/4} |f(x) - p_m^r(x)|. \quad (3.4)$$

Заметим, что если $p_{n+r} = p_{n+r}(x)$ представляет собой алгебраический полином степени $n+r$, то в силу (2.17) $\mathcal{L}_{n+r}^0(p_{n+r}, x) = p_{n+r}(x)$, поэтому при $m \leq n+r$ имеем

$$e^{-x/2} x^{-r/2+1/4} [f(x) - \mathcal{L}_{n+r}^0(f, x)] = e^{-x/2} x^{-r/2+1/4} [f(x) - p_m^r(f, x)] + Z(x), \quad (3.5)$$

где

$$Z(x) = x^{-r/2+1/4} e^{-x/2} \mathcal{L}_{n+r}^0(p_m^r(f) - f, x). \quad (3.6)$$

Далее, в силу (3.3) и (2.9)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n+r}^0(p_m^r(f) - f, x) &= x^r \sum_{k=0}^n \frac{(p_m^r(f) - f)_{r,k}}{(k+1)_r} L_k^r(x) = \\ &= x^r \sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x)}{(k+1)_r} \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} [p_m^r(f, t) - f(t)]^{(r)} L_k^0(t) dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Применяя r -раз интегрирование по частям и учитывая условие (3.3), имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-t} L_k^0(t) [p_m^r(f, t) - f(t)]^{(r)} dt = (-1)^r \int_0^{\infty} [p_m^r(f, t) - f(t)] (e^{-t} L_k^0(t))^{(r)} dt. \quad (3.8)$$

С другой стороны в силу (1.1) и (1.7)

$$\begin{aligned} (e^{-x} L_k^0(x))^{(r)} &= \frac{1}{k!} \frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}} (e^{-x} x^k) = \frac{1}{k!} \frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}} (e^{-x} x^{k+r-r}) = \\ &= \frac{1}{k!} (k+r)! e^{-x} x^{-r} L_{k+r}^{-r}(x) = (k+r)^{[r]} e^{-x} x^{-r} \frac{(-x)^r}{(k+r)^{[r]}} L_k^r(x) = (-1)^r e^{-x} L_k^r(x). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.7)–(3.9) имеем

$$\mathcal{L}_{n+r}^0(p_m^r(f) - f, x) = x^r \int_0^{\infty} [p_m^r(f, t) - f(t)] e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x) L_k^r(t)}{(k+1)_r} dt. \quad (3.10)$$

Из (3.6) и (3.10) находим

$$Z(x) = x^{r/2+1/4} e^{-x/2} \int_0^{\infty} [p_m^r(f, t) - f(t)] e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x) L_k^r(t)}{(k+1)_r} dt. \quad (3.11)$$



Из (3.11) с учетом (3.4) мы можем вывести следующую оценку:

$$|Z(x)| \leq x^{r/2+1/4} E_m^r(f) \int_0^\infty t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} \left| \sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x) L_k^r(t)}{(k+1)_r} \right| dt. \quad (3.12)$$

Положим

$$l_n^r(x) = \int_0^\infty t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} \left| \sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x) L_k^r(t)}{(k+1)_r} \right| dt, \quad (3.13)$$

тогда из (3.4), (3.5) и (3.12) следует, что при $x \geq 0$ справедлива оценка

$$e^{-x/2} x^{-r/2+1/4} [f(x) - \mathcal{L}_{n+r}^0(f, x)] \leq E_{n+r}^r(f) \left| 1 + x^{r/2+1/4} l_n^r(x) \right|. \quad (3.14)$$

Если мы заменим здесь $f(x)$ на $f^{(m)}(x)$ и воспользуемся равенством (2.12), то получим ($0 \leq m \leq r-1$)

$$e^{-x/2} x^{-(r-m)/2+1/4} |f^{(m)}(x) - (\mathcal{L}_{n+r}^0(f, x))^{(m)}| \leq E_{n+r-m}^{r-m}(f^{(m)}) \left[1 + x^{(r-m)/2+1/4} l_n^{r-m}(x) \right].$$

В связи с этим результатом возникает задача об исследовании поведения величины $l_n^r(x)$ при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq x < \infty$. Имеет место следующая

Теорема 3.1. Пусть $s = s_n = 4n + 2r + 2$, $r \geq 1$. Тогда имеют место оценки

$$l_n^r(x) \leq c(r) \begin{cases} n^{r/2+1/4} \ln(n+1), & 0 \leq x \leq 3/s, \\ x^{-r/2-1/4} \ln(n+1), & 3/s \leq x \leq s/2, \\ x^{-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}} \left[\ln(n+1) + \left(\frac{x}{s^{1/3+|x-s|}} \right)^{1/4} \right], & s/2 \leq x \leq 3s/2, \\ n^{-r/2+7/4} e^{-x/4}, & 3s/2 \leq x. \end{cases} \quad (3.15)$$

(здесь $c(r)$ – некоторая постоянная, зависящая от r)

При доказательстве теоремы 3.1, полуось $[0, \infty)$ разбивается на несколько частей по следующей схеме:

$$[0, \infty) = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4,$$

где $G_1 = [0, 3/s)$, $G_2 = [3/s, s/2)$, $G_3 = [s/2, 3s/2)$, $G_4 = [3s/2, \infty)$, и функция $l_n^r(x)$ оценивается на каждом из множеств G_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Из-за недостатка места мы здесь ограничимся доказательством справедливости оценки функции $l_n^r(x)$ на множестве G_1 .

С этой целью заметим сначала, что из сопоставления равенств (1.6) и (3.13) имеем

$$l_n^r(x) = \int_0^\infty t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt. \quad (3.16)$$

4. ОЦЕНКА $l_n^r(x)$ НА G_1

Пусть $x \in G_1$. Положим

$$J_1 = \int_0^{4/s} t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt. \quad (4.1)$$

$$J_2 = \int_{4/s}^\infty t^{r/2-1/4} e^{-\frac{t+x}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt, \quad (4.2)$$

тогда в силу (3.16)

$$l_n^r(x) \leq J_1 + J_2. \quad (4.3)$$

Оценим J_1 . Используя оценку (1.8), имеем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_0^{4/s} t^{r/2-1/4} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)_r} e^{-\frac{t+x}{2}} |L_k^r(x) L_k^r(t)| dt \leq \\ &\leq c(r) \int_0^{4/s} t^{r/2-1/4} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)_r} e^{-\frac{t+x}{2}} A_k^r(x) A_k^r(t) dt \leq \end{aligned}$$



$$\leq c(r) \int_0^{4/s} t^{r/2-1/4} dt \sum_{k=0}^n \frac{s_k^{2r}}{(k+1)_r} \leq c(r)n^{r/2+1/4}. \quad (4.4)$$

Оценим J_2 . С этой целью обратимся к формуле (1.14). Тогда из (4.2) имеем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq e^{-x/2} |\hat{L}_n^r(x)| \int_{4/s}^{\infty} t^{r/2-1/4} e^{-t/2} |\hat{L}_n^r(t)| + \\ &+ (n+r+1) \int_{4/s}^{\infty} e^{-\frac{t+x}{2}} t^{r/2-1/4} \left| \frac{\hat{L}_n^r(t) [\hat{L}_{n+1}^r(x) - \hat{L}_{n-1}^r(x)]}{t-x} \right| dt + \\ &+ (n+r+1) \int_{4/s}^{\infty} e^{-\frac{t+x}{2}} t^{r/2-1/4} \left| \frac{\hat{L}_n^r(x) [\hat{L}_{n+1}^r(t) - \hat{L}_{n-1}^r(t)]}{t-x} \right| dt = J_{21} + J_{22} + J_{23}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Далее, положим

$$W = |\hat{L}_n^r(x)| \int_{4/s}^{\infty} t^{r/2-1/4} e^{-t/2} |\hat{L}_n^r(t)| dt = W_1 + W_2 + W_3, \quad (4.6)$$

где

$$W_1 = |\hat{L}_n^r(x)| \int_{4/s}^{s/2} t^{r/2-1/4} e^{-t/2} |\hat{L}_n^r(t)| dt, \quad (4.7)$$

$$W_2 = |\hat{L}_n^r(x)| \int_{s/2}^{3s/2} t^{r/2-1/4} e^{-t/2} |\hat{L}_n^r(t)| dt, \quad (4.8)$$

$$W_3 = |\hat{L}_n^r(x)| \int_{3s/2}^{\infty} t^{r/2-1/4} e^{-t/2} |\hat{L}_n^r(t)| dt. \quad (4.9)$$

Из (1.8), (1.9), (4.7)–(4.9) имеем

$$W_1 \leq c(r)n^{r/2-1/4} \int_{4/s}^{s/2} t^{-1/2} dt \leq c(r)n^{r/2-1/4} n^{1/2} = c(r)n^{r/2+1/4}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} W_2 &\leq c(r)n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \int_{s/2}^{3s/2} \frac{dt}{[s^{1/3} + |t-s|]^{1/4}} \leq c(r)n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \int_s^{3s/2} \frac{dt}{[t-s+s^{1/3}]^{1/4}} \leq \\ &\leq c(r)n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \frac{4}{3} [t-s+s^{1/3}]^{\frac{3}{4}} \Big|_s^{3s/2} \leq c(r)n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \frac{4}{3} [s/2+s^{1/3}]^{\frac{3}{4}} \leq c(r)n^{r/2+1/4}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$W_3 \leq c(r) \int_{3s/2}^{\infty} e^{-t/4} t^{r/2-1/4} dt \leq c(r)e^{-\frac{3}{4}n} n^{r/2-1/4}. \quad (4.12)$$

Из (4.5) и (4.6)–(4.9) мы получаем для J_{21} следующую оценку:

$$J_{21} \leq c(r, \lambda) n^{r/2+1/4}. \quad (4.13)$$

Оценим J_{22} . Из (4.5) с учетом оценки (1.8) имеем

$$J_{22} \leq c(r)n \left| \hat{L}_{n+1}^r(x) - \hat{L}_{n-1}^r(x) \right| e^{-x/2} \int_{4/s \leq t < \infty} \frac{n^{-r/2} A_n^r(t)}{t-x} e^{-t/2} t^{r/2-1/4} dt. \quad (4.14)$$



Из (4.14) и оценки (1.10) находим

$$J_{22} \leq c(r) \int_{4/s}^{\infty} \frac{A_n^r(t)e^{-t/2}}{t-x} t^{r/2-1/4} dt \leq c(r) \int_{4/s}^{\infty} A_n^r(t)e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt = J'_{22} + J''_{22} + J'''_{22}, \quad (4.15)$$

где в силу (1.9)

$$J'_{22} = c(r) \int_{4/s}^{s/2} A_n^r(t)e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt \leq c(r) \int_{4/s}^{s/2} n^{r/2-1/4} t^{-r/2-1/4} t^{r/2-5/4} dt =$$

$$= c(r) n^{r/2-1/4} \int_{4/s}^{s/2} t^{-1-1/2} dt \leq c(r) n^{r/2+1/4}, \quad (4.16)$$

$$J''_{22} = c(r) \int_{s/2}^{3s/2} A_n^r(t)e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt \leq$$

$$\leq c(r) \int_{s/2}^{3s/2} [n(n^{1/3} + |t-s|)]^{-1/4} t^{r/2-5/4} dt = c(r) n^{r/2-5/4-1/4} \int_{s/2}^{3s/2} dt \leq$$

$$\leq c(r) n^{r/2-6/4} \int_{s/2}^{3s/2} (t-s+1)^{-1/4} dt \leq c(r) n^{r/2-6/4} n^{3/4} = c(r) n^{r/2-3/4}, \quad (4.17)$$

$$J'''_{22} = c(r) \int_{3s/2}^{\infty} A_n^r(t)e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt \leq c(r) \int_{3s/2}^{\infty} e^{t/4} e^{-t/2} t^{r/2-5/4} dt =$$

$$= c(r) \int_{3s/2}^{\infty} e^{-t/4} t^{r/2-5/4} dt \leq c(r) e^{3s/8} n^{r/2-5/4}. \quad (4.18)$$

Из (4.15)–(4.18) выводим

$$J_{22} \leq c(r) n^{r/2+1/4}. \quad (4.19)$$

Оценим J_{23} . Из (4.5) и оценок (1.8), (1.10) имеем

$$J_{23} \leq J'_{23} + J''_{23} + J'''_{23}, \quad (4.20)$$

где

$$J'_{23} = c(r) n^{r/2+1/4} \int_{4/s}^{s/2} t^{-r/2+1/4} t^{r/2-5/4} dt \leq c(r) n^{r/2+1/4} \int_{4/s}^{s/2} \frac{dt}{t} \leq c(r) n^{r/2+1/4} \ln(n+1). \quad (4.21)$$

$$J''_{23} = c(r) n^{r/2+1/4} \int_{s/2}^{3s/2} (n^{1/3} + |t-s|)^{1/4} t^{-r/2} t^{r/2-5/4} dt \leq$$

$$\leq c(r) n^{r/2-1} \int_s^{3s/2} (t-s+n^{1/3})^{1/4} dt \leq c(r) n^{r/2+1/4}, \quad (4.22)$$

$$J'''_{23} \leq c(r) n^{r/2+1} \int_{3s/2}^{\infty} e^{-t/4} t^{r/2-5/4} dt \leq c(r) n^{r-1/4} e^{-3s/8}. \quad (4.23)$$



Из (4.20)–(4.23) следует оценка

$$J_{23} \leq c(r)n^{r/2+1/4} \ln(n+1). \quad (4.24)$$

Теперь соберем оценки (4.13), (4.19) и (4.24) вместе и сопоставим их с (4.5). Это дает

$$J_2 \leq c(r)n^{r/2+1/4} \ln(n+1),$$

а отсюда и из (4.4) с учетом (4.3) получаем окончательно

$$l_n^r(x) \leq c(r)n^{r/2+1/4} \ln(n+1) \quad (x \in G_1). \quad (4.25)$$

Тем самым доказано утверждение теоремы 4.1, относящееся к случаю $x \in G_1$.

Из-за недостатка места мы здесь ограничимся доказательством справедливости оценки функции $l_n^r(x)$ на множестве G_1 .

Библиографический список

1. Шарпудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Теория и приложения. Махачкала, 2004.
2. Шарпудинов И.И. Исправленные суммы Фурье по ортогональным полиномам и их аппроксимативные свойства // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронеж. зимней мат. школы (27 января – 4 февраля 2001 г.). Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1999. С. 289–290.
3. Шарпудинов И.И. Смешанные ряды по ортогональным полиномам // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 10-й Саратов. зимней школы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2000. С. 228–229.
4. Сега Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
5. Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Mathem. 1965. V.87. P. 695–708.
6. Muckenhaupt B. Mean convergence of Hermit and Laguerre series. I. // Trans. Amer. Mathem. Soc. 1970. V. 147. P. 419–431.
7. Muckenhaupt B. Mean convergence of Hermit and Laguerre series. II. // Trans. Amer. Mathem. Soc. 1970. V. 147. P. 433–460.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ДИНАМИКЕ ОБОЛОЧЕК ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Л.Ю. Коссович

Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики
E-mail: KossovichLYu@info.sgu.ru

В работе описаны асимптотические методы, разработанные для построения математической модели нестационарных волновых процессов в оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях, а также предназначенные для решения краевых задач для компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) с различными показателями изменчивости и динамичности. Приведена классификация асимптотических приближений. Изложено построение низкочастотного и коротковолнового приближений, погранслоев в окрестностях квазифронта, фронтов волн расширения и сдвига и условного фронта поверхностных волн Рэлея. Описаны схемы расчленения нестационарного НДС в случаях ударных торцевых продольных воздействий тангенциального, изгибающего, а также воздействия нормального типа.

Asymptotic Methods in Dynamics of Shells under Shock Loading

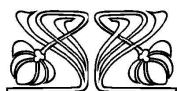
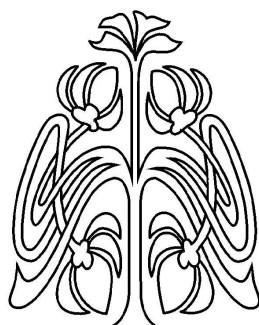
L.Yu. Kossovich

The paper deals with the asymptotic methods, developed for creating a mathematic model of non-stationary wave propagation in shells of revolution under shock impacts of tangential, bending types and shock impacts of normal type; the methods are also aimed at solving the boundary value problems for the strain-stress state (SSS) components with different values of variability and dynamicity indices. Classification of asymptotic approximations is also presented. This classification defines three different types of separation scheme of non-stationary SSS. This scheme uses the following asymptotic approximations: short-wave and low-frequency ones, boundary layers in the vicinities of the quasi-front, the dilatation and shear wave fronts, and the front of Rayleigh surface waves. The schemes of ranges of applicability of approximate theories and schemes for the longitudinal stress resultant, bending moment and transverse shear force are represented.

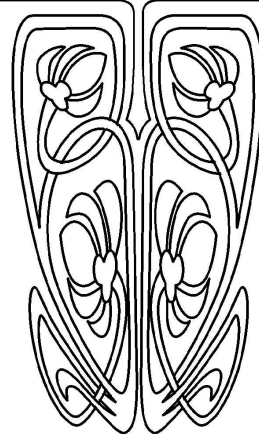
ВВЕДЕНИЕ

Целью представленной работы является окончательная систематизация результатов разработки асимптотических методов исследования нестационарных волн для тонких упругих оболочек вращения. Данный обзор обобщает материалы, изложенные в [1], добавлением последнего характерного типа НДС (возникающего при торцевых ударных воздействиях нормального типа и при нормальных поверхностных нагрузках), изученного в последние несколько лет, а также более подробным изложением разработанных асимптотических методов решения краевых задач для приближенных составляющих.

Представленные исследования являются обобщением асимптотического подхода, разработанного А.Л. Гольденвейзером [2,3] в задачах статики и стационарной динамики. Основы схемы расчленения нестационарного НДС на составляющие с различными показателями



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





изменяемости впервые представлены в монографии [4]. Решения для нестационарных волн строятся с помощью безмоментной и моментной составляющих Кирхгофа – Лява, квазистатического погранслоя типа Сен-Венана и введенного в [4] нового типа составляющей — быстроизменяющегося по продольной координате и времени динамического погранслоя, описывающего НДС в некоторый начальный промежуток времени и в достаточно широкой окрестности фронтов волн. Эта схема расчленения нестационарного НДС явилась принципиально новой, отличающейся в корне от схем расчленения, использующихся в статике и стационарной динамике [2, 3]. В отличие от метода положения решений с различными показателями изменяемости (в частности, метода погранслоя), используется вариант метода сращиваемых разложений. При этом доказано существование областей согласования составляющих Кирхгофа – Лява и динамических погранслоев различного типа, где эти решения совпадают с заданной асимптотической точностью. Наличие областей согласования показывает достаточную точность постановки краевых задач для всех составляющих, а также корректность представленной схемы расчленения. Отметим, что применение этой схемы основывается на существенной неоднородности показателей изменяемости и динамичности по координатам и времени.

Дальнейший анализ решений для динамического погранслоя показал, что динамический погранслоем сам является достаточно неоднородным по изменяемости, вместо которого можно использовать три составляющие различного типа, которые и были введены в [5, 6]. Среди них — погранслоем параболического типа в окрестности квазифронта, коротковолновые приближения для квазиплоской и квазиантиплоской задач теории упругости, а также погранслоем гиперболического типа в окрестностях фронтов волн расширения и сдвига. Причем если в [5, 6] уравнения параболического погранслоя выводились на базе теории оболочек высокого порядка приближения, то в [7, 8] была разработана методика непосредственного их вывода прямо из точных трехмерных уравнений (в этих работах решались аналогичные задачи для случаев анизотропных и вязкоупругих оболочек).

Отметим, что предыдущие результаты относятся к случаям, когда нестационарные волны в оболочке возникают при ударных торцевых воздействиях, относящихся по классификации У.К. Нигула [9] к случаям продольного воздействия тангенциального типа LT и продольного воздействия изгибающего типа LM. В последние годы был рассмотрен третий и завершающий, с точки зрения типа схемы расчленения нестационарного НДС, вид воздействия: нормальное воздействие вида NW [9]. В отличие от предшествующих случаев, появляется новый тип НДС в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея. Рассмотрение этого типа НДС началось с анализа нестационарного НДС в случае задачи Лэмба для полуплоскости [10, 11]. Выведено гиперболическое уравнение, описывающее распространение волны Рэлея вдоль границы полуплоскости, а затухание решения в глубь полуплоскости определяется путем последовательного решения двух однотипных задач Неймана для потенциалов Ламе. Полученные методы были использованы для построения погранслоя в пластинах и цилиндрических оболочках в работах [12–14]. В целом нестационарное НДС при таких воздействиях исследовано в работах [15–19].

Указанными работами полностью завершилось построение асимптотического подхода к исследованию нестационарных волн в тонких упругих оболочках. Корректность окончательной схемы расчленения определяется наличием областей согласования между различными приближениями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим оболочку вращения (рис.1), отнесенную к криволинейным координатам (s, θ, z) , где s — длина дуги вдоль образующей, θ — угол в окружном направлении, z — координата внешней нормали срединной поверхности.

Изучается действие ударной нагрузки, приложенной к краю и зависящей от времени как единичная функция Хевисайда.

Рассматриваются три типа воздействия, а именно продольное воздействие тангенциального типа, продольное воздействие изгибающего типа и нормальное воздействие, соответствующие классификации У.К. Нигула [9]. В первом случае (LT-нагружение) мы имеем ненулевое значение продольного

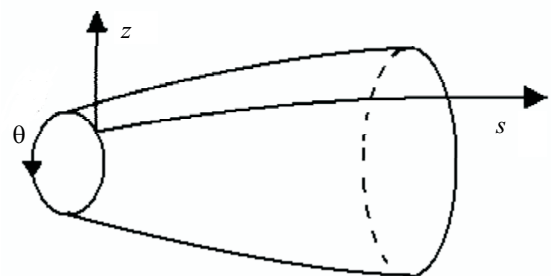


Рис. 1



нормального усилия. Если мы обозначим напряжения и перемещения σ_{ij} и v_i ($i, j = 1, 2, 3$), то следующие граничные условия соответствуют этой нагрузке:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= IH(t)f(\theta), \quad v_2 = v_3 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0, \\ f(\theta) &= \cos(m\theta), \quad \text{или} \quad f(\theta) = -\sin(m\theta). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь I — амплитуда нагрузки, $H(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда, t — время. Во втором случае (LM-нагружение) мы имеем на торце ненулевой изгибающий момент. Пример соответствующих граничных условий имеет вид

$$\sigma_{11} = IzH(t)f(\theta), \quad v_2 = v_3 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0. \tag{1.2}$$

В третьем же случае (NW-нагружение) мы имеем на торце ненулевую перерезывающую силу. Этой нагрузке соответствуют следующие граничные условия:

$$\sigma_{13}^{(1)} = IH(t)f(\theta), \quad v_1^{(1)} = v_2^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \tag{1.3}$$

Рассматриваем только однородные начальные условия

$$v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{1.4}$$

и примем, что лицевые поверхности оболочки свободны от напряжений

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \tag{1.5}$$

где h — полутолщина оболочки. Мы также предположим, что упругие волны не достигают второго края оболочки и ограничим себя случаем, когда расстояние, пройденное фронтом, соизмеримо с характерным значением радиусов кривизны.

Приведем точные трехмерные уравнения теории упругости. Поскольку длинноволновые составляющие выводятся для самого общего случая тонких оболочек, выпишем сначала трехмерные уравнения для этого общего случая геометрии.

Пусть срединная поверхность оболочки отнесена к ортогональным криволинейным координатам (α_1, α_2) ; z — как и прежде, нормальная координата. Примем для механических параметров следующие обозначения: ρ — плотность, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Тогда уравнения движения и закона Гука запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial z} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} (\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} (\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) + \\ + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial z} \sigma_{zi} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} \sigma_{iz} - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial \sigma_{j3}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} \sigma_{ii} - \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial z} \sigma_{jj} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i H_j}{\partial z} \sigma_{33} + \\ + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} \sigma_{i3} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} \sigma_{j3} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$



$$\begin{aligned}
 \sigma_{ii} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_i + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial z} v_3 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} v_3 \right], \\
 \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{H_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_j + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_i + \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} v_3 + \frac{1}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial z} v_3 \right) + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right], \\
 \sigma_{3i} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{H_i} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial v_i}{\partial z} - \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial z} v_i \right], \\
 \sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{H_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_j} v_i - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_j}{\partial \alpha_i} v_j \right],
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $i \neq j = 1, 2$ и

$$\kappa = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}. \tag{1.8}$$

Здесь c_1 — скорость волны расширения, c_2 — скорость волны сдвига, H_i — параметры Ламе:

$$H_i = A_i \left(1 + \frac{z}{R_i} \right), \tag{1.9}$$

где A_i — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, R_i — ее главные радиусы кривизны.

Перепишем уравнения (1.6)–(1.7) для оболочки вращения. Обозначим через $A = A(s)$ расстояние от точки срединной поверхности до оси вращения, деленное на R , где R — характерное значение радиусов кривизны срединной поверхности. Тогда уравнения движения и закон Гука запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} + k(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} + 2k\sigma_{12} - \rho \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + k\sigma_{31} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right) + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right], \\
 \sigma_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right) + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right], \\
 \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right) + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right], \\
 \sigma_{31} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial v_3}{\partial s} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right], \\
 \sigma_{32} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{AR} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right], \\
 \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial s} - kv_2 \right],
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $k = \frac{1}{A} \frac{dA}{ds}$.



2. КЛАССИФИКАЦИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В теории упругих тонкостенных конструкций асимптотические методы имеют важнейшее значение как при выводе приближенных теорий, так и при решении краевых задач для составляющих НДС. Однако данная работа посвящена, в основном, общим вопросам построения НДС с помощью приближенных теорий, построенных асимптотическим методом на базе точной трехмерной теории.

Вывод асимптотически оптимальных уравнений для приближенных теорий производится с помощью метода асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости, который основан на малости геометрического параметра $\eta = h/R$.

Динамические процессы в тонких упругих оболочках характеризуются следующими двумя физическими параметрами: l — отношение длины волны к R и T — отношение временного масштаба к Rc_2^{-1} . Удобно их выразить в степенях малого параметра η

$$l = \eta^q, \quad T = \eta^a. \quad (2.1)$$

Показатели q, a являются основными понятиями. Они называются показателями изменяемости и динамичности.

В случае стационарной динамики параметры l и T (и соответственно q и a) являются для каждой стационарной волны в области, занятой телом, как правило, постоянными. В нестационарной динамике, наоборот, они зависят от координат и времени, то есть показатели q и a имеют локальный характер.

Растянем масштаб независимых переменных, положив

$$\alpha_i = R\eta^q \xi_i, \quad z = R\eta \zeta, \quad t = Rc_2^{-1} \eta^a \tau, \quad (2.2)$$

и предположим, что дифференцирование по безразмерным переменным ξ_i и τ не изменяет асимптотический порядок неизвестных величин. Зависимость неизвестных величин от толщинной переменной ζ часто определяется явно при выводе приближенных уравнений асимптотическим методом. Таким образом, введение независимых переменных (2.2) с учетом изменяемости НДС позволяет методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости вывести асимптотически приближенные уравнения для составляющих НДС при различных значениях показателей изменяемости и динамичности.

При построении нестационарного НДС с граничными условиями типа (1.1)–(1.3) используются в основном составляющие с показателями изменяемости и динамичности, удовлетворяющими следующим условиям:

$$0 \leq q \leq 1, \quad 0 \leq a \leq 1. \quad (2.3)$$

Введем классификацию рассматриваемых асимптотических приближений. Приближения, для которых $q < 1$ и $a < 1$, отнесены к так называемым длинноволновым низкочастотным; приближения, для которых $q < 1$ и $a = 1$, отнесены к длинноволновым высокочастотным; приближения, для которых $q = 1$ и $a < 1$, отнесены к коротковолновым низкочастотным и, наконец, приближения, для которых $q = 1$ и $a = 1$, отнесены к коротковолновым высокочастотным. Эта классификация представлена на рис.2. Отметим, что длинноволновые низкочастотные приближения определяют безмоментную и изгибную составляющие, описываемые классической двумерной теорией Кирхгофа – Лява.

Для длинноволновых приближений длина волны много больше толщины тела ($l \gg \eta$), в то время как для низкочастотных приближений временной масштаб много больше времени прохождения фронтами волн расширения и сдвига расстояния, равного толщине оболочки ($T \gg \eta$). Для коротковолновых приближений эти длины и для высокочастотных приближений эти времена одного порядка, то есть $l \sim \eta$ и $T \sim \eta$ соответственно.



Рис. 2

Разделим длинноволновые приближения на тангенциальное и поперечное (рис. 3). Для тангенциальных приближений тангенциальные компоненты вектора перемещений велики по сравнению с его нормальной компонентой ($v_i \gg v_3$). Наоборот, для поперечных приближений нормальная компонента вектора перемещений велика по сравнению с его тангенциальными компонентами: $v_3 \gg v_i$.

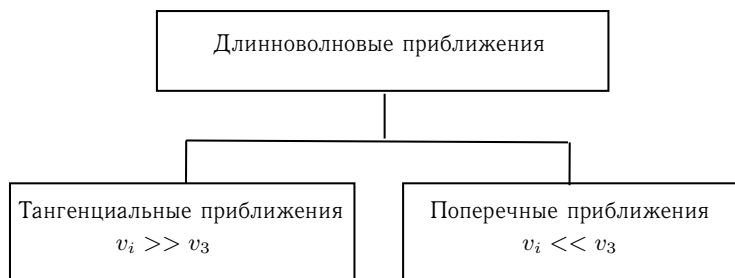


Рис. 3

Коротковолновые низкочастотные приближения не представляют большого интереса в динамике. Показано [6], что они являются частным случаем (квазистатическим) коротковолновых высокочастотных приближений. В нестационарной динамике они дают хорошо известный квазистатический погранслои типа Сен-Венана, описанный для статики в работе [2]. Поэтому мы часто называем длинноволновые низкочастотные приближения низкочастотными и коротковолновые высокочастотные приближения — коротковолновыми.

Асимптотические приближения, отвечающие условию

$$q > 1, \quad a > 1, \tag{2.4}$$

являются обобщением коротковолновых приближений. Они используются в нестационарной динамике при построении погранслоев в окрестностях фронтов волн. Выделены следующие типы погранслоев (рис. 4), которые названы погранслоями гиперболического типа (в окрестностях фронтов волн), параболического типа (в окрестности квазифронта двумерной волны растяжения) и эллиптического типа (в окрестности условного фронта поверхностных волн Релея).

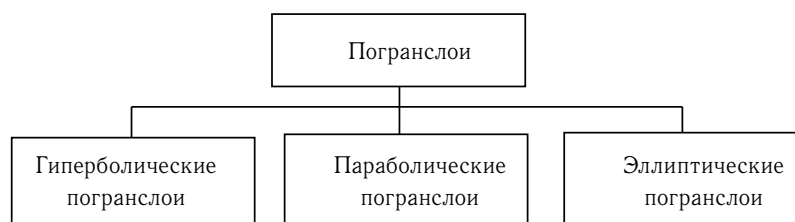


Рис. 4



3. НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим длинноволновые низкочастотные приближения трехмерных уравнений теории упругости в общем случае тонких оболочек произвольной формы.

В случае плоской пластины симметричный и антисимметричный по нормальной координате типы граничных условий порождают симметричный и антисимметричный типы НДС. При этом длинноволновые низкочастотные приближения разделяются на два типа: тангенциальные и поперечные, соответствующие теориям растяжения и изгиба тонких пластин. Естественно предположить, что также имеют место два разных рассматриваемых приближения в общем случае тонких оболочек. Начнем рассмотрение с тангенциального приближения.

При построении тангенциального приближения показатели изменчивости и динамичности связаны соотношением $q = a$ ($0 \leq q < 1$) и компоненты НДС имеют следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} v_i &= R(\eta^q v_i^0 + \eta^{1+q} v_i^1), & v_3 &= R(\eta v_3^0 + \eta^{2q} v_3^1), \\ \sigma_{ii} &= E(\sigma_{ii}^0 + \eta \sigma_{ii}^1), & \sigma_{ij} &= E(\sigma_{ij}^0 + \eta \sigma_{ij}^1), \\ \sigma_{3i} &= E(\eta^{3-3q} \sigma_{3i}^0 + \eta^{2-q} \sigma_{3i}^1), & \sigma_{33} &= E(\eta^{2-2q} \sigma_{33}^0 + \eta^{3-2q} \sigma_{33}^1), \quad (i \neq j = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь предполагается, что величины с индексами имеют один и тот же асимптотический порядок.

Формулы (3.1) обеспечивают разделение искомого НДС на основную и дополнительную компоненты. Величины, входящие в основное НДС, отмечены индексом «0», в то время как величины, входящие в дополнительное НДС, отмечены индексом «1».

Основное НДС аналогично НДС плоского слоя, тогда как дополнительное — результат действия поверхностной кривизны. Если основное НДС симметрично относительно срединной поверхности, то дополнительное антисимметрично, и наоборот. Для симметричного НДС $v_i, \sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}$ являются четными функциями толщинной координаты, и v_3, σ_{3i} — нечетные функции. Для антисимметричного НДС все величины имеют противоположную четность, а именно $v_i, \sigma_{ii}, \sigma_{ij}, \sigma_{33}$ являются нечетными функциями толщинной координаты, а v_3, σ_{3i} — четными.

В рассматриваемом случае основное НДС симметрично относительно срединной поверхности. С точки зрения использования рассматриваемых приближений в нестационарных задачах произведенный набор требований, накладываемых на показатели изменчивости, динамичности и интенсивности, позволяет удовлетворить этим приближениям (по обычной терминологии безмоментной составляющей) тангенциальной части граничных условий в двумерной форме, а также описать распространение волн сжатия и сдвига (асимптотически главная часть разрешающей системы для приближения содержит старшие производные от тангенциальных перемещений по продольной координате и времени).

Описание процесса асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости приведено подробно в [10, 6]. Здесь мы укажем только основные его вехи. Подставим асимптотики (3.1) в уравнения (1.5)–(1.6) и проведем замену переменных согласно (2.2) при $a = q$. Разделяя каждое из уравнений на две части, принимая во внимание четность членов по ζ и пренебрегая членами порядка $O(\eta^{2-2q})$ (асимптотическая погрешность классической теории оболочек Кирхгова – Лява), приходим к замкнутой системе относительно асимптотически главных компонент $v_3^1, v_i^0, \sigma_{ii}^0$ и σ_{ij}^0 . Выведена также система, определяющая асимптотически второстепенные компоненты через асимптотически главные. Эти две системы дают возможность установить следующую зависимость от нормальной координаты:

$$\begin{aligned} v_i^0 &= v_i^{(0)}, & v_3^1 &= v_3^{(1)}, & \sigma_{ii}^0 &= \sigma_{ii}^{(0)}, & \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^{(0)}, \\ v_i^1 &= \zeta v_i^{(1)}, & v_3^0 &= \zeta v_3^{(1)}, & \sigma_{ii}^1 &= \zeta \sigma_{ii}^{(1)}, & \sigma_{ij}^1 &= \zeta \sigma_{ij}^{(1)}, \\ \sigma_{3i}^1 &= \sigma_{3i}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{3i}^{(2)}, & \sigma_{33}^0 &= \sigma_{33}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{33}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выведены уравнения для величин с индексами в скобках, не зависящих от ζ . Запишем разрешающую систему относительно следующих общепринятых в теории оболочек двумерных величин: T_i — продольные усилия, S_{ij} — сдвигающие усилия, u_i — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности, w — прогиб:



$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i u_j + \frac{w}{R_i} + \nu \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + k_j u_j + \frac{w}{R_j} \right) \right\}, \\
 S_{ij} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left\{ \frac{A_i}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{A_i} \right) + \frac{A_j}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{A_j} \right) \right\}, \\
 \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (T_i - T_j) + 2k_i S_{ij} - 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $k_i = \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}$ ($i \neq j = 1, 2$).

Рассмотрим теперь поперечное приближение. Показатели изменяемости и динамичности связаны соотношением $q = (a + 1)/2$ ($0 \leq a < 1$), а асимптотика НДС определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 v_i &= R(\eta v_i^0 + \eta^{2q} v_i^1), \quad v_3 = R(\eta^q v_3^0 + \eta^{q+1} v_3^1), \\
 \sigma_{ii} &= E(\eta^{1-q} \sigma_{ii}^0 + \eta^q \sigma_{ii}^1), \quad \sigma_{ij} = E(\eta^{1-q} \sigma_{ij}^0 + \eta^q \sigma_{ij}^1), \\
 \sigma_{3i} &= E(\eta^{2-2q} \sigma_{3i}^0 + \eta^{3-2q} \sigma_{3i}^1), \quad \sigma_{33} = E(\eta^{3-3q} \sigma_{33}^0 + \eta^{2-q} \sigma_{33}^1) \quad (i \neq j = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Основное НДС антисимметрично относительно срединной поверхности. С точки зрения использования рассматриваемого приближения в нестационарных задачах, указанный выбор показателей изменяемости, динамичности и интенсивности позволяет поперечному приближению (изгибной составляющей по обычной терминологии) удовлетворить нетангенциальной части граничных условий, снять невязку, появившуюся в этих условиях после построения безмоментной составляющей, а также обеспечить частичное моделирование поперечной изгибной волны (показатели изменяемости и динамичности выбираются так, чтобы асимптотически главная часть разрешающей системы содержала старшие производные от прогиба по продольной координате и времени). Выведены системы для асимптотически главных и второстепенных компонент НДС [6, 10], дающие возможность установить следующую зависимость от нормальной координаты:

$$\begin{aligned}
 v_i^1 &= v_i^{(0)}, \quad v_3^0 = v_3^{(0)}, \quad \sigma_{ii}^1 = \sigma_{ii}^{(0)}, \quad \sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^{(0)}, \\
 v_i^0 &= \zeta v_i^{(1)}, \quad v_3^1 = \zeta v_3^{(1)}, \quad \sigma_{ii}^0 = \zeta \sigma_{ii}^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^0 = \zeta \sigma_{ij}^{(1)}, \\
 \sigma_{3i}^0 &= \sigma_{3i}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{3i}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^1 = \sigma_{33}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{33}^{(2)}, \quad \sigma_{33}^0 = \zeta \sigma_{33}^{(1)} + \zeta^3 \sigma_{33}^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Выведены уравнения для величин с индексами в скобках, не зависящих от ζ . Запишем разрешающую систему относительно усилий, перемещений точек срединной поверхности, а также изгибающих моментов G_i , скручивающих моментов H_{ij} и перерезывающих сил N_i :

$$\begin{aligned}
 G_i &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right) + k_i \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} + \nu \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right) + k_j \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right] \right\}, \\
 H_{ij} &= -\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \right) - k_j \frac{1}{A_j} \frac{\partial w}{\partial \alpha_j} \right\}, \\
 T_i &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i u_j + \frac{w}{R_i} + \nu \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + k_j u_i + \frac{w}{R_j} \right) \right\}, \\
 S_{ij} &= \frac{Eh}{1-\nu} \left\{ \frac{A_i}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{A_i} \right) + \frac{A_j}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{A_j} \right) \right\}, \\
 \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (T_i - T_j) + 2k_i S_{ij} &= 0, \\
 \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_2} - k_2 N_1 - k_1 N_2 + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{1}{A_i} \frac{\partial G_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ij}}{\partial \alpha_j} + k_j (G_i - G_j) + 2k_i H_{ij} - N_i &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$



Отметим, что полученные приближения являются, по сути, асимптотическим обобщением соответствующих составляющих теории Кирхгофа – Лява. Одним из принципиальных положений этого обобщения является возможность (а во многих случаях и необходимость) учета изменения длины нормального элемента:

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{2Eh}(T_1 + T_2). \quad (3.7)$$

4. КОРОТКОВОЛНОВЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В случае коротковолновых высокочастотных приближений ($q = a = 1$) легко выписать асимптотику НДС. Дело в том, что при $q = 1$ длина волны имеет порядок толщины, и все направления становятся эквивалентными. Очевидно, что искомое НДС симметрично или антисимметрично относительно срединной поверхности с асимптотической погрешностью $O(\eta)$. Следовательно, асимптотика НДС имеет вид

$$\sigma_{kl} = E(\sigma_{kl}^0 + \eta\sigma_{kl}^1), \quad v_m = R\eta(v_m^0 + \eta v_m^1) \quad (k, l, m = 1, 2, 3). \quad (4.1)$$

Здесь, как в предыдущем пункте, мы разделяем искомое НДС на основную (величины с индексом «0») и дополнительную компоненты.

Выпишем уравнения в размерной форме для асимптотически главных компонент НДС:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial z} + k_j(\sigma_{ii} + \sigma_{jj}) + k_i(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) - \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial \sigma_{j3}}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \sigma_{z3}}{\partial z} + k_j \sigma_{i3} + k_i \sigma_{j3} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0, \\ \sigma_{ii} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + k_j v_i \right) + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} k_i v_j \right], \\ \sigma_{z3} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_j} + k_j v_i + k_i v_j \right) + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right], \\ \sigma_{zi} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{A_i} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial v_i}{\partial z} \right], \\ \sigma_{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{A_j} \frac{\partial v_i}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial v_j}{\partial \alpha_i} - k_i v_i - k_j v_j \right] \quad (i \neq j = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Уравнения (4.2) аналогичны уравнениям трехмерной упругости при условии, что метрика срединной плоскости слоя совпадает с метрикой срединной поверхности оболочки. Коэффициенты этих уравнений не зависят от толщинной координаты α_3 . Более того, они являются функциями коэффициентов первой квадратичной формы срединной поверхности.

В случае оболочки вращения разрешающие уравнения (4.2) могут быть значительно упрощены. Рассмотрим в деталях случай, когда колебания являются коротковолновыми только в направлении меридиана. Предположим, что изменяемость по окружной координате имеет показатель изменяемости $p < 1$. Тогда выделяются два типа асимптотик НДС. Асимптотика первого типа имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ll} &= E\sigma_{ll}^*, \quad \sigma_{12} = E\eta^{1-p}\sigma_{12}^*, \quad \sigma_{31} = E\sigma_{31}^*, \quad \sigma_{32} = E\eta^{1-p}\sigma_{32}^*, \\ v_1 &= R\eta v_1^*, \quad v_2 = R\eta^{2-p}v_2^*, \quad v_3 = R\eta v_3^* \quad (l = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.3)$$

При этом асимптотически главными компонентами НДС являются σ_{ll} ($l = 1, 2, 3$), σ_{31} , v_1 и v_3 . Заметим, что эти напряжения и перемещения определяют плоскую задачу теории упругости, а асимптотически главные части разрешающих уравнений совпадают с уравнениями плоской задачи теории упругости. Асимптотически второстепенные напряжения и перемещения появляются в этих уравнениях только с множителем η^{2-2p} .

Анализ показал [4, 6], что для построения решения для колебаний с погрешностью $\delta = O(\eta + \eta^{2-2p})$ разрешающие уравнения коротковолнового приближения должны быть построены



с асимптотической точностью δ , то есть члены порядка $O(\eta + \eta^{2-2p})$ должны быть в разрешающих уравнениях сохранены.

Исследования также показали [4, 6], что второе разрешающее уравнение движения может быть максимально упрощено (оно заменяется уравнением первого порядка), и системы разрешающих уравнений в размерном виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} + k(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{1}{RA} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{\partial v_2}{\partial s} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + k\sigma_{31} - \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right) + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right) + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right], \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + kv_1 \right) + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right], \\ \sigma_{31} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_3}{\partial s} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \right), \\ \sigma_{32} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{AR} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \right), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial s} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что модифицированное второе уравнение движения имеет очевидный физический смысл. Оно соответствует отсутствию вращения вокруг нормали к срединной поверхности. Заметим также, что с введением этого модифицированного уравнения система описывает только волны расширения и поперечные волны, определяющие деформацию изгиба.

Перейдем к рассмотрению асимптотики второго типа:

$$\begin{aligned} \sigma_{ll} &= E\eta^{1-p}\sigma_{ll}^*, \quad \sigma_{12} = E\sigma_{12}^*, \quad \sigma_{31} = E\eta^{1-p}\sigma_{31}^*, \quad \sigma_{32} = E\sigma_{32}^*, \\ v_1 &= R\eta^{2-p}v_1^*, \quad v_2 = R\eta v_2^*, \quad v_3 = R\eta^{2-p}v_3^* \quad (l = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.4)$$

При этом величины, характеризующие антиплоскую задачу теории упругости (напряжения σ_{12} , σ_{32} и перемещение v_2), являются асимптотически главными, а асимптотически главные части разрешающих уравнений совпадают с уравнениями антиплоской задачи теории упругости.

Анализ показал, что в рассматриваемом случае можно модифицировать первое и третье уравнения движения, и система разрешающих уравнений в размерном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} &= 0, \\ v_3 &= 0, \\ \frac{1}{RA} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} + 2k\sigma_{12} - \rho \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= 0, \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial s} \right), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E\nu}{2(1+\nu^2)\kappa^2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{31} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial z}, \quad \sigma_{32} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_2}{\partial z}, \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{RA} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2}{\partial s} - kv_2 \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Физический смысл модифицированных уравнений движения ясен: они соответствуют отсутствию объемного расширения и нормального перемещения.



5. ПОГРАНСЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ КВАЗИФРОНТА

Хорошо известно, что как классическая теория обобщенного плоского напряженного состояния, так и теория оболочек Кирхгофа – Лява искажают скорость волны расширения. Вместо c_1 они задают скорость $c_3 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$. Фронт волны расширения по классическим двумерным теориям пластин и оболочек является фактически квазифронтом: в его окрестности трехмерное решение хотя и быстро изменяется, но является непрерывным.

Предположим, что в окрестности квазифронта преобладает длинноволновый характер решения и показатель изменчивости принадлежит полуинтервалу

$$\frac{2}{3} \leq q < 1. \quad (5.1)$$

Классическая теория оболочек не работает на этом полуинтервале, и при построении асимптотически оптимальных уравнений следует учитывать члены более высокого порядка малости. Введем безразмерные переменные x и t_3 [7, 8]

$$x = \frac{1}{R\eta^{2/3}}(tc_3 - s), \quad t_3 = \frac{tc_3}{R} \quad (5.2)$$

и предположим, что дифференцирование по x и t_3 не изменяет асимптотического порядка неизвестных величин. Считаем, что $q = a = 2/3$ и толщина погранслоя имеет порядок $O(\eta^{2/3})$.

Пусть асимптотика НДС в этой области определяется выражениями:

$$\begin{aligned} v_1 &= R \left(\eta^{2/3} v_1^0 + \eta^{5/3} v_1^1 \right), & v_2 &= R \left(\eta^{4/3-p} v_2^0 + \eta^{7/3-p} v_2^1 \right), \\ v_3 &= R \left(\eta v_3^0 + \eta^{4/3} v_3^1 \right), & \sigma_{11} &= E(\sigma_{11}^0 + \eta \sigma_{11}^1), & \sigma_{22} &= E(\sigma_{22}^0 + \eta \sigma_{22}^1), \\ \sigma_{33} &= E \left(\eta^{2/3} \sigma_{33}^0 + \eta^{5/3} \sigma_{33}^1 \right), & \sigma_{13} &= E \left(\eta \sigma_{13}^0 + \eta^{4/3} \sigma_{13}^1 \right), \\ \sigma_{23} &= E \left(\eta^{5/3-p} \sigma_{23}^0 + \eta^{2-p} \sigma_{23}^1 \right), & \sigma_{12} &= E \left(\eta^{2/3-p} \sigma_{12}^0 + \eta^{5/3-p} \sigma_{12}^1 \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пренебрегая асимптотически малыми членами в разрешающих уравнениях (1.9)–(1.10) с учетом (5.2)–(5.3) и интегрируя эти уравнения по ζ , устанавливаем зависимость неизвестных величин от нормальной координаты:

$$\begin{aligned} v_1^0 &= v_{1,0}^{(0)} + \eta^{2/3} \left(v_{1,1}^{(0)} + \zeta^2 v_{1,1}^{(2)} \right), & v_2^0 &= v_2^{(0)}, & v_3^0 &= v_3^{(0)}, \\ \sigma_{11}^0 &= \sigma_{11,0}^{(0)} + \eta^{2/3} \left(\sigma_{11,1}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{11,1}^{(2)} \right), & \sigma_{22}^0 &= \sigma_{22}^{(0)}, & \sigma_{ij}^0 &= \sigma_{ij}^{(0)}, \\ v_i^1 &= \zeta v_i^{(1)}, & v_3^1 &= \zeta v_3^{(1)}, & \sigma_{ii}^1 &= \zeta \sigma_{ii}^{(1)}, & \sigma_{ij}^1 &= \zeta \sigma_{ij}^{(1)}, \\ \sigma_{3i}^1 &= \sigma_{3i}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{3i}^{(2)}, & \sigma_{33}^1 &= \sigma_{33}^{(0)} + \zeta^2 \sigma_{33}^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь учитывается тот факт, что для построения уравнений погранслоя в окрестности квазифронта компоненты НДС v_1^0 и σ_{11}^0 должны определяться с большей, чем остальные компоненты, точностью $O(\eta^{2/3})$.

Введем усилия и перемещения срединной поверхности по формулам:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2Eh\sigma_{11,0}^{(0)}, & T_2 &= 2Eh\sigma_{22}^{(0)}, & S_{ij} &= 2Eh\eta^{2/3-p}\sigma_{ij}^{(0)}, \\ u_1 &= R\eta^{2/3}v_{1,0}^{(0)}, & u_2 &= R\eta^{4/3-p}v_2^{(0)}, & w &= R\eta^{4/3}v_3^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Тогда для асимптотически главных двумерных компонент НДС u_1 , T_1 , T_2 получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^3 \partial t_3} + R \frac{k}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \frac{\nu^2}{6(1-\nu^2)} \frac{\partial^6 u_1}{\partial x^6} &= 0, \\ T_1 &= -\frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{R\eta^{2/3}} \frac{\partial u_1}{\partial x}, & T_2 &= -\frac{2Eh\nu}{1-\nu^2} \frac{1}{R\eta^{2/3}} \frac{\partial u_1}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.6)$$



Рассмотрим погранслоя для волн, распространяющихся в направлении возрастания координаты s . В этом случае можно получить разрешающее уравнение относительно продольного перемещения, допускающее простые решения, выражающиеся через функцию Эйри. Получим искомое уравнение, проинтегрировав (5.6) по x :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t_3} + R \frac{k}{2} u_1 - \frac{\nu^2}{6(1-\nu)^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = 0. \quad (5.7)$$

Перейдем к исходным координатам s, θ, t . Уравнения для асимптотически главных компонент примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{1}{c_3} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{k}{2} u_1 - \frac{\nu^2 h^2}{6(1-\nu)^2 c_3^3} \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} &= 0, \\ T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial s}, \quad T_2 = \frac{2Eh\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial s}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

а для асимптотически второстепенных компонент —

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{1}{RA} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) u_1 = 0, \\ S_{12} &= \frac{Eh}{1+\nu} \left(-\frac{1}{RA} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial s} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

6. ПОГРАНСЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ ФРОНТОВ ВОЛН РАСШИРЕНИЯ И ВОЛНЫ СДВИГА

В этой части мы описываем вывод уравнений погранслоя в окрестности фронта на примере волны расширения. Рассмотрим сначала погранслоя в случае продольных воздействий тангенциального и изгибающего типов вида (1.1) и (1.2), когда основной разрыв решения, порожденный ударной нагрузкой, переносится нормальным напряжением σ_{11} . Уравнения выводятся для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны (цилиндрические и конические оболочки, а также пластины), когда фронт волны образуется совокупностью нормалей к срединной поверхности.

Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{1}{R\eta^2} (tc_1 - s), \quad t_1 = \frac{tc_1}{R} \quad (6.1)$$

и предположим, что дифференцирование по x, t_1 не изменяет порядка неизвестных величин. Считаем, что толщина погранслоя имеет порядок $O(\eta^2)$ и $q = a = 2$. Определим асимптотику НДС формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= R\eta v_1^*, \quad v_2 = R\eta^{3-p} v_2^*, \quad v_3 = R\eta^2 v_3^*, \\ \sigma_{11} &= E\eta^{-1} \sigma_{11}^*, \quad \sigma_{22} = E\eta^{-1} \sigma_{22}^*, \quad \sigma_{33} = E\eta^{-1} \sigma_{33}^*, \\ \sigma_{13} &= E\sigma_{13}^*, \quad \sigma_{23} = E\eta^{2-p} \sigma_{23}^*, \quad \sigma_{12} = E\eta^{1-p} \sigma_{12}^*, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где все величины со звездочкой имеют одинаковый асимптотический порядок.

Переходя к переменным (6.1) и к величинам со звездочкой и удерживая асимптотически главные члены, получим из уравнений (1.10)–(1.11) замкнутую подсистему для асимптотически главных компонент $v_1^*, \sigma_{11}^*, \sigma_{22}^*, \sigma_{33}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial x \partial t_1} - \frac{A'}{A} \frac{\partial v_1^*}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_{11}^* &= -\frac{1}{2(1+\nu)\kappa^2} \frac{\partial v_1^*}{\partial x}, \quad \sigma_{22}^* = -\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1^*}{\partial x}, \quad \sigma_{33}^* = -\frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1^*}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Вторая подсистема служит для определения асимптотически второстепенных компонент $v_2^*, v_3^*, \sigma_{13}^*, \sigma_{23}^*, \sigma_{12}^*$ через асимптотически главную компоненту v_1^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2^*}{\partial x} - \frac{1}{A} \frac{\partial v_1^*}{\partial \theta} &= 0, \\ \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x} &= 0, \\ \sigma_{13}^* &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial v_1^*}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{23}^* = \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_2^*}{\partial \zeta} + \frac{1}{A} \frac{\partial v_3^*}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{12}^* = \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{A} \frac{\partial v_1^*}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (6.4)$$



Здесь, как и в предшествующем случае, мы имеем право пренебрегать в уравнении асимптотически второстепенными членами, оставляя в них только асимптотически главную часть. Данный вывод следует из того, что безразмерные переменные (6.1) имеют порядок единицы в рассматриваемой окрестности фронта.

В исходных координатах рассматриваемые подсистемы запишутся в виде:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + \frac{A'}{A} \frac{\partial v_1}{\partial s} = 0, \quad (6.5)$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \frac{\partial v_1}{\partial s}, \quad \sigma_{22} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial s}, \quad \sigma_{33} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_1}{\partial s},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial s} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial s} = 0, \quad (6.6)$$

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v_1}{\partial z}, \quad \sigma_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta}.$$

Можно проверить, что решения должны удовлетворять только одному граничному условию на лицевых поверхностях

$$\sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h \quad (6.7)$$

и одному граничному условию на торце $s = 0$:

$$\sigma_{11} = IH(t)f(\theta) \quad (LT - \text{нагружение}), \quad (6.8)$$

$$\sigma_{11} = IzH(t)s(\theta) \quad (LM - \text{нагружение}).$$

Отметим, что если исходные трехмерные уравнения теории упругости описывают три типа волн (продольные волны — волны расширения и поперечные волны — волны сдвига), то полученные уравнения погранслоя в окрестности фронта волны описывают только волны одного типа, задающие рассматриваемый фронт.

При воздействии вида NW передний фронт волны сдвига несет главный разрыв напряжения σ_{13} , отражающий скачок напряжения в начальный момент времени. В рассматриваемом случае оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны фронт образован нормальными к срединной поверхности и определяется уравнением $s = c_2 t$.

Асимптотику НДС погранслоя определим следующим образом:

$$v_1 = R\eta^2 v_1^*, \quad v_2 = R\eta^{4-p} v_2^*, \quad v_3 = R\eta v_3^*,$$

$$\sigma_{11} = E\sigma_{11}^*, \quad \sigma_{22} = E\sigma_{22}^*, \quad \sigma_{33} = E\sigma_{33}^*, \quad (6.9)$$

$$\sigma_{13} = E\eta^{-1} \sigma_{13}^*, \quad \sigma_{23} = E\eta^{1-p} \sigma_{23}^*, \quad \sigma_{12} = E\eta^{2-p} \sigma_{12}^*.$$

В рассматриваемом случае асимптотически главной компонентой вектора перемещений является v_3 , а главным напряжением — σ_{13} . Тогда аналогично предыдущему случаю выводим систему для асимптотически главных компонент НДС

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial s^2} + \frac{A'}{A} \frac{\partial v_3}{\partial s} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial v_3}{\partial s} \quad (6.10)$$

и для асимптотически второстепенных компонент

$$\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial s^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - \frac{A'}{A} \frac{\partial v_2}{\partial s} \right) + \frac{1}{AR} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial s^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \right) + \frac{A'}{A^2 R} \frac{\partial^2 v_1}{\partial s \partial \theta} = 0,$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad \sigma_{22} = \frac{2\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad \sigma_{33} = \frac{E}{1+\nu} \frac{\partial v_3}{\partial z}, \quad (6.11)$$

$$\sigma_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{AR} \frac{\partial v_3}{\partial \theta}, \quad \sigma_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_2}{\partial s} + \frac{1}{AR} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right).$$



7. ПОГРАНСЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ УСЛОВНОГО ФРОНТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЕЛЕЯ

Построим погранслои в окрестности условного фронта поверхностных волн Релея для цилиндрической оболочки [13, 19].

Анализ разрешающих уравнений показывает, что искомое НДС, строящееся с показателями изменяемости и динамичности, равными единице, относится к классу коротковолновых и является симметричным или антисимметричным относительно срединной поверхности с асимптотической погрешностью $O(\eta)$:

$$\sigma_{kl} = E (\sigma_{kl}^0 + \eta \sigma_{kl}^1), \quad v_m = R\eta (v_m^0 + \eta v_m^1), \quad k, l, m = 1, 2, 3, \quad (7.1)$$

где индексом «0» обозначена основная составляющая НДС (симметричная или антисимметричная относительно срединной поверхности), а индексом «1» обозначена второстепенная составляющая (соответственно антисимметричная или симметричная). Тогда разрешающие уравнения для основной составляющей будут переписаны в виде, совпадающем с уравнениями для плоского слоя:

$$\begin{aligned} \kappa^{-2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \kappa^{-2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3}{\partial \zeta} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_3}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $\xi = s/h$, $\zeta = z/h$, $\tau = tc_2/c_1$.

Аналогично случаю выведения уравнений погранслоя для полуполосы [14] выделим частное решение уравнений (7.2)–(7.3), удовлетворяющее только граничным условиям (1.3) при $f(\theta) = 1$. Обозначим это решение верхним индексом «0»:

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &= 0, \quad v_3^{(0)} = -I(\tau - \xi)H(\tau - \xi), \\ \sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{13}^{(0)} = \frac{EI}{2(1+\nu)}H(\tau - \xi). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Решение (7.4), построенное с малой асимптотической погрешностью $O(\eta)$, представляет собой поперечную волну, распространяющуюся вдоль оси цилиндрической оболочки в плоскостях, проходящих через эту ось. Построенное таким образом решение не удовлетворяет граничным условиям (1.5) на лицевых поверхностях.

Представим решение рассматриваемой задачи в виде следующей суммы:

$$\text{НДС} = \text{НДС}^{(0)} + \text{НДС}^{(1)}, \quad (7.5)$$

где для решения с верхним индексом «1» на торце и лицевых поверхностях ставятся следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \quad \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi} &= 0, \quad v_1^{(1)} = 0, \\ \zeta = \pm 1 : \quad \sigma_{33}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{13}^{(1)} = -\frac{EI}{2(1+\nu)}H(\tau - \xi). \end{aligned} \quad (7.6)$$

На рис.5 показаны нагружения на лицевые поверхности в этой задаче.

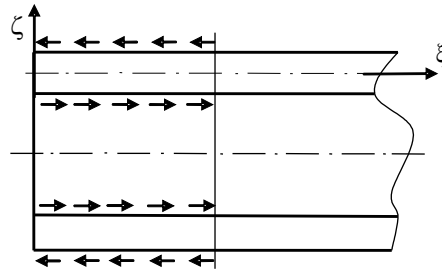


Рис. 5

Граничные условия (7.5) показывают, что деформированное торцевое сечение остается прямолинейным и перпендикулярным к оси цилиндра. Следовательно, если взять бесконечную цилиндрическую оболочку с симметричным нагружением, показанным на рис.6, то деформирование каждой из ее симметричных частей эквивалентно деформированию рассматриваемой полубесконечной оболочки. Поэтому можно перейти к исследованию эквивалентной задачи для бесконечной оболочки, представленной на рис. 6.

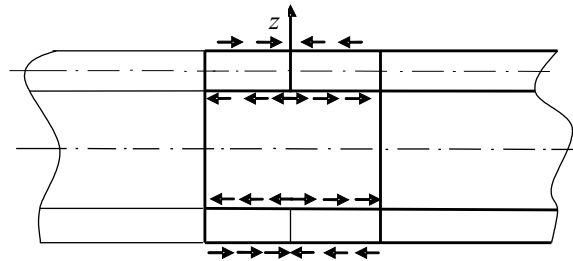


Рис. 6

Тогда вывод уравнений погранслоя можно провести аналогично случаю бесконечной цилиндрической оболочки [13, 14] с помощью символического метода А.И. Лурье. Запишем систему уравнений (7.2)–(7.3) в операторном виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{d\zeta^2} + (\kappa^{-2} \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) v_1 + \frac{\partial_\xi}{1 - 2\nu} \frac{dv_3}{d\zeta} &= 0, \\ \frac{\partial_\xi}{1 - 2\nu} \frac{dv_1}{d\zeta} + \kappa^{-2} \frac{d^2 v_3}{d\zeta^2} + (\partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) v_3 &= 0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1 + \nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \frac{dv_3}{d\zeta} + \partial_\xi v_1 \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1 + \nu)\kappa^2 h} \left(\frac{dv_3}{d\zeta} + \frac{\nu}{1 - \nu} \partial_\xi v_1 \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1 + \nu)h} \left(\partial_\xi v_3 + \frac{dv_1}{d\zeta} \right), \end{aligned} \tag{7.8}$$

где операторы ∂_ξ , ∂_τ имеют вид

$$\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{7.9}$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \xi = 0 : \quad \frac{dv_3}{d\zeta} &= 0, \quad v_1 = 0, \\ \zeta = \pm 1 : \quad \sigma_{33} &= 0, \quad \sigma_{13} = -\frac{EI}{2(1 + \nu)h} H(\tau - \xi). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Решаем систему (7.7), рассматриваемую как систему обыкновенных дифференциальных уравнений, и удовлетворяем граничным условиям (7.10). Пренебрегая членами малого порядка [13,14] и рассматривая большие значения времени $\tau \gg 1$ (когда фронты волн проходят расстояние, много



большее толщины полосы): $\tau = O(T)$, $T \gg 1$, введем малый параметр $\varepsilon = 1/T$ и масштабированные переменные y , τ_0 :

$$y = \frac{\xi_0 - \kappa_R \tau_0}{\varepsilon}, \quad \zeta_0 = \varepsilon \zeta, \quad \tau_0 = \varepsilon \tau, \quad (7.11)$$

где коэффициент $\kappa_R = c_R/c_2 < 1$, c_R — скорость поверхностных волн Релея. Коэффициент k_R является корнем известного трансцендентного уравнения:

$$(2 - k_R^2)^2 - 4\sqrt{1 - \kappa_R^2}\sqrt{1 - \kappa^2\kappa_R^2} = 0. \quad (7.12)$$

Введем новые операторы ∂_y , ∂_{τ_0} :

$$\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_{\tau_0} = \frac{\partial}{\partial \tau_0}. \quad (7.13)$$

Отбрасывая в операторном решении асимптотически второстепенные члены и возвращаясь к исходным операторам, введем объемный и сдвиговой потенциалы Ламе φ и ψ . Разделим их на части, обозначая индексом «1» отрицательное по ζ направление распространения возмущения, а индексом «2» — положительное:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2. \quad (7.14)$$

Эти потенциальные функции определяются эллиптическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} &= 0, \\ \left(1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7.15)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - c_R^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} + 2\kappa_R B \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial s^2} &= \frac{\kappa_R B}{1 - \kappa_R^2/2} S, \quad z = h, \\ 2\kappa_R B \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \kappa_R^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} &= \frac{\kappa_R B}{1 - \kappa_R^2/2} S, \quad z = -h, \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \frac{1}{1 - \kappa_R^2/2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \right), \quad z = h, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= \frac{1}{1 - \kappa_R^2/2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \right), \quad z = -h, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где постоянная B и функция S определяются выражениями:

$$B = 2 \left[\kappa \frac{\kappa_R}{1 - \kappa_R^2} + \frac{\kappa^2 \kappa_R^2}{1 - \kappa^2 \kappa_R^2} - \frac{4\kappa_R^2}{2 - \kappa_R^2} \right]^{-1}, \quad S = \begin{cases} \frac{1}{2} IH(\tau - \xi), & \xi > 0, \\ -\frac{1}{2} IH(\tau - \xi), & \xi < 0. \end{cases}$$

Перемещения и напряжения выражаются через потенциальные функции по формулам

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial s} - \frac{\partial \psi_2}{\partial s}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[- \left(1 - \frac{\kappa_R^2}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial s \partial z} \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial s \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial s \partial z} - \left(1 - \frac{\kappa_R^2}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial s^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.18)$$

8. ВОЛНЫ ПРИ LT НАГРУЖЕНИИ

Проиллюстрируем расчленение НДС на составляющие с различными показателями изменчивости при продольных воздействиях тангенциального типа схемой решения для продольного усилия T_1 в цилиндрической оболочке (осесимметричный случай) в некоторый момент времени, который больше времени пробега передним фронтом волны толщины оболочки (рис.7) и схемой областей применимости приближенных теорий (рис.8).

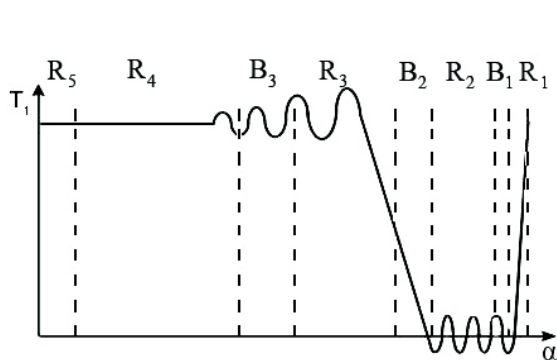


Рис. 7

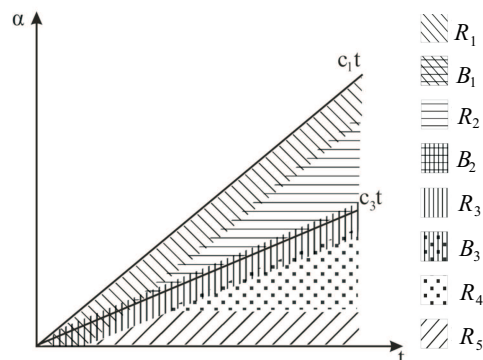


Рис. 8

Применяются [4, 6] следующие приближенные теории: R_1 — гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения, R_2 — квазиплоская квазисимметричная задача теории упругости, R_3 — параболический погранслои в окрестности квазифронта, R_4 — тангенциальное длинноволновое приближение (безмоментная составляющая теории Кирхгофа – Лява), R_5 — наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана; B_1, B_2, B_3 — области согласования.

Исследования работы [4] с учетом выделения вместо динамического погранслоя двух типов погранслоев и квазиплоской задачи, выполненного в [6], показали, что область согласования между безмоментной составляющей и погранслоем в окрестности квазифронта определяется асимптотическим неравенством

$$\eta^{1-p} + \eta^{4/3-2p} + \eta^{2/3} \ll \frac{1}{R} (c_3 t - s) \ll 1. \quad (8.1)$$

В работе [20] найдено расположение области согласования между коротковолновой составляющей (квазиплоская задача теории упругости) и погранслоем в окрестности фронта волны расширения:

$$\eta^2 \ll \frac{1}{R} (c_1 t - s) \ll \eta. \quad (8.2)$$

Отметим, что проведенные исследования сняли дискутирующийся долгое время вопрос о возможности использования параболических уравнений теории Кирхгофа – Лява для описания волновых процессов в оболочках, указав с помощью асимптотических оценок границы области применимости безмоментных и изгибных составляющих. Результаты исследования полностью согласуются с выводами В.В. Новожилова и Л.И. Слепяна [21, 22] о действии принципа Сен-Венана в динамике пластин и оболочек.

В соответствии с (1.1) граничные условия для безмоментной составляющей записываются в виде

$$T_1 = 2hIH(t)f(\theta), \quad u_2 = 0. \quad (8.3)$$

Рассмотрим случай быстроизменяющейся по окружной координате неосесимметричной нагрузки, когда $p > 0$. Для решения краевой задачи для безмоментной составляющей в [4] использовано интегральное преобразование Лапласа по времени с последующим обращением изображения различными асимптотическими методами в зависимости от диапазона изменения продольной пространственной переменной и времени. Так, для волны растяжения при



$\xi_0(\tau_0 - \xi_0) = O(\eta^{2p})$ ($\xi_0 = s/R$, $\tau_0 = c_3 t/R$) метод прифронтной асимптотики дал решение в виде разложения по функциям Бесселя

$$T_1^{(p)} = 2hI \left[J_0 \left(\sqrt{2m_*^2 \eta^{-2p} \xi_0 \tau_p} \right) + \frac{2(1-\nu)\tau_p}{\xi_0} J_2 \left(\sqrt{2m_*^2 \eta^{-2p} \xi_0 \tau_p} \right) + \dots \right] f(\theta) H(\tau_p), \quad (8.4)$$

$$\tau_p = \tau_0 - \xi_0, \quad m_* = m\eta^p,$$

а при $\xi_0(\tau_0 - \xi_0) \gg \eta^{2p}$ метод перевала позволяет представить решение для волны растяжения в виде

$$T_1^{(p)} = 2hI \left\{ \left[1 - \frac{(1-\nu)m_* \xi_0}{2\eta^p} + \frac{(1-\nu)m_*^2 \xi_0^2}{2\eta^{2p}} \right] \exp \left(-m_* \frac{\xi_0}{\eta^p} \right) + \frac{\eta^{p/2} \xi_0}{\pi^{1/2} m_*^{1/2} \tau_0 T_p^{1/4}} \left[1 - \frac{(1-\nu)T_p}{\tau_0^2} \right] \left(\cos \frac{m_* T_p^{1/2}}{\eta^p} + \sin \frac{m_* T_p^{1/2}}{\eta^p} \right) \left[1 + O \left(\frac{\eta^p}{T_p^{1/2}} \right) \right] \right\} f(\theta), \quad (8.5)$$

$$T_p = \tau_0^2 - \xi_0^2.$$

Решение для погранслоя в окрестности квазифронтв легко получается из уравнения (5.8) и имеет вид [4,6]

$$T_1 = 2hI \left[\frac{1}{3} + \int_0^y Ai(-y') dy' \right] f(\theta), \quad y = \left[\frac{2(1-\nu)^2}{\nu^2 \eta^2 \xi_0} \right]^{1/3} (\tau_0 - \xi_0), \quad (8.6)$$

где $Ai(\cdot)$ — функция Эйри.

Решение для погранслоя в окрестности фронта волны расширения строится с помощью двойного интегрального преобразования Лапласа по времени и Фурье — по пространственной продольной координате. Обращение ищется с помощью разложения изображения в бесконечный ряд по вычтам и метода профронтной асимптотики (разложение по обратным степеням параметра преобразования Лапласа):

$$T_1 = \frac{4hl}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2} \left[2^{1/2} (n-1/2) \pi \eta^{-1} \sqrt{\xi_0 \left(\frac{c_1 t}{R} - \xi_0 \right)} \right] f(\theta) H \left(\frac{c_1 t}{R} - \xi_0 \right). \quad (8.7)$$

Уравнения для квазистатического погранслоя в рассматриваемом случае торцевого воздействия совпадают с уравнениями плоской задачи теории упругости для полуполосы [2]. Методы решения соответствующей краевой задачи представлены в [23, 24].

Отметим также, что коротковолновая составляющая имеет малоамплитудный характер и практического расчетного интереса не представляет. Ее анализ необходим только для доказательства корректности предложенной схемы расчленения.

В случае $p = 0$ изменяется только схема построения безмоментной составляющей [4]. Здесь применяется только метод прифронтной асимптотики.

Методы обращения изображения по Лапласу, разработанные для цилиндрической оболочки, могут быть применены для общего случая оболочек вращения после нахождения решения в изображениях асимптотическим методом экспоненциального представления.

9. ВОЛНЫ ПРИ LM НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрим схему расчленения НДС на составляющие при продольных воздействиях изгибающего типа (граничные условия (1.2)) на примере цилиндрической оболочки. Схема решения для изгибающего момента G_1 в некоторый момент времени, больший времени пробега передним фронтом волны толщины оболочки, изображена на рис.9, а схема областей применимости приближенных теорий изображена на рис.10.

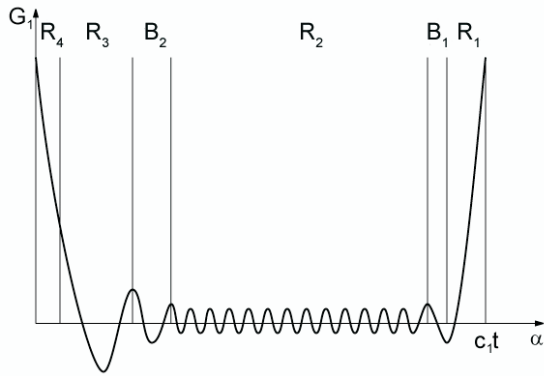


Рис. 9

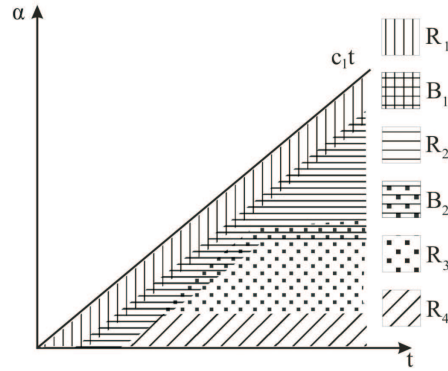


Рис. 10

R_1 — гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения, R_2 — квазиплоская квазиантисимметричная задача теории упругости, R_3 — поперечное длинноволновое приближение (изгибная составляющая теории Кирхгофа – Лява), R_4 — наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана, B_1, B_2 — области согласования.

Исследования работы [4] с учетом выделения в рассматриваемом типе НДС вместо динамического погранслоя — погранслоя в окрестности фронта и квазиплоской задачи, выполненного в [6], показали, что область согласования между изгибной и коротковолновой составляющими определяется асимптотическим неравенством

$$\eta^{1/2} \left(\frac{c_3 t}{R} \right)^{1/2} + \eta^{1-p} \frac{c_3 t}{R} \ll \xi_0 \ll \eta^{1/4} \left(\frac{c_3 t}{R} \right)^{1/4}. \quad (9.1)$$

В соответствии с (1.2) граничные условия для изгибной составляющей записываются в виде

$$G_1 = \frac{2}{3} h^3 I H(t) f(\theta), \quad w = 0. \quad (9.2)$$

Рассмотрим сначала случай неосесимметричной нагрузки при $p > 1/2$. В этом случае при использовании интегрального преобразования Лапласа по временной переменной удается найти простую асимптотику для корней характеристического уравнения, содержащего малый параметр [4]. После использования метода перевала получаем решение для изгибающего момента при $\tau_0 \gg \eta^{2p-1}$ в виде

$$G_1 = \frac{2}{3} h^3 I \left\{ \left[1 - \frac{(1-\nu)m_* \xi_0}{2 \eta^p} \right] \exp \left(-m_* \frac{\xi_0}{\eta^p} \right) \frac{3^{3/4} \eta^{2p-3/2} \xi_0}{\pi^{1/2} 2^{3/2} \tau_0^{3/2}} \frac{\nu m_*^2 + \frac{3\xi_0^2}{4\eta^{2-2p}\tau_0^2}}{\left(m_*^2 + \frac{3\xi_0^2}{4\eta^{2-2p}\tau_0^2} \right)^2} \times \right. \\ \left. \times (\cos T_M - \sin T_M) \left[1 + O \left(\frac{\eta \tau_0}{\xi_0^2} \right) \right] \right\}, \quad (9.3)$$

$$T_M = \frac{3^{1/2} \xi_0^2}{4\eta \tau_0} + \frac{m_*^2 \tau_0}{3^{1/2} \eta^{2p-1}}.$$

При $\tau_0 = O(\eta^{2p-1})$ (а также для всех значений времени в диапазоне $\tau_0 = O(1)$ при $p \leq 1/2$) решение строится при помощи разложения изображений в ряды по обратным степеням корня квадратного из параметра преобразования Лапласа, когда оригинал решения представляется в виде ряда по функциям $D_{m,c}$ и $D_{m,s}$, введенным и описанным в [4]:

$$G_1 = \frac{2}{3} h^3 I \left\{ D_{1,c}(y, \tau_0) - \eta^{2r-2p} \frac{m_*^2 \xi_0}{2^{3/2} 3^{1/4} \eta^r} [D_{2,c}(y, \tau_0) - D_{2,s}(y, \tau_0)] - \right. \\ \left. - \left[\eta^{2r-2p} \frac{(1-\nu)m_*^2}{3^{1/2}} + \eta^{4r-4p} \frac{m_*^4 \xi_0^2}{8 \cdot 3^{1/2} \eta^{2r}} \right] D_{3,s}(y, \tau_0) + \dots \right\}, \quad (9.4)$$

$$y = \frac{3^{1/4} \xi_0}{2^{1/2} \eta^r}, \quad r = \begin{cases} 1/2, & p \leq 1/2, \\ p, & p > 1/2. \end{cases}$$



Решение для погранслоя в окрестности фронта волны расширения строится, как и в предыдущем случае воздействия типа LT, с помощью двойных интегральных преобразований, теории вычетов и метода прифронтной асимптотики [6]:

$$G_1 = \frac{4h^3 I}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_0 \left(2^{1/2} m \pi \eta^{-1} \sqrt{\xi_0 \left(\frac{c_1 t}{R} - \xi_0 \right)} \right) H \left(\frac{c_1 t}{R} - \xi_0 \right). \quad (9.5)$$

Решение для коротковолновой составляющей не строится вследствие его малоамплитудного характера.

10. ВОЛНЫ ПРИ NW НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрим схему расчленения НДС на составляющие при торцевом воздействии нормального типа (граничные условия (1.3)) также на примере цилиндрической оболочки. Схема расчленения для перерезывающей силы N_1 изображена на рис. 11, а схема областей применимости приближенных теорий представлена на рис. 12.

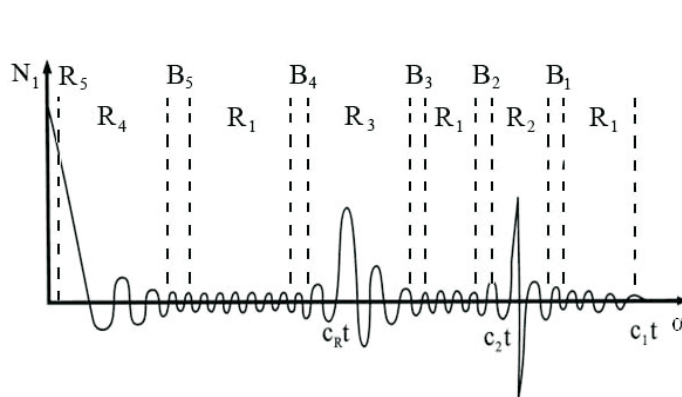


Рис. 11

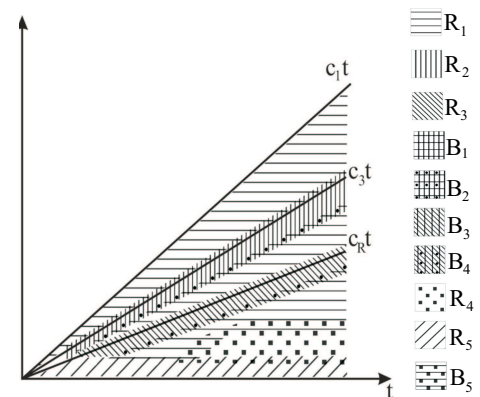


Рис. 12

Применяются [19] следующие приближенные теории: R_1 — квазиплоская квазиантисимметричная задача теории упругости (коротковолновое приближение), R_2 — погранслоем в окрестности фронта волны сдвига, R_3 — погранслоем в окрестности условного фронта поверхностной волны Релея, R_4 — поперечное длинноволновое приближение (изгибная составляющая теории Кирхгофа – Лява), R_5 — наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана. Здесь же обозначениями B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 изображены соответствующие области согласования приближенных теорий. При этом анализ схемы решения показывает, что разрывной скачок наблюдается на фронте волны сдвига, а непрерывный скачок — на фронте условного фронта волны Релея, неверно воспринимаемого двумерной теорией типа Тимошенко как дополнительный фронт сдвиговой волны. Таким образом, неточность теории типа Тимошенко заключается здесь в том, что она неверно воспринимает условный фронт поверхностной волны Релея, фактически являющийся квазифронтом, как фронт с соответствующим разрывом решения, что полностью противоречит точной картине явления по трехмерной теории.

Для построения решения изгибной составляющей применяются методы, указанные в предыдущем параграфе. Решение в окрестности фронта волны сдвига строится методом прифронтной асимптотики [6]. Для решения задачи о погранслоем в окрестности условного фронта поверхностной волны Релея используется метод двойных интегральных преобразований: Лапласа — по времени и Фурье — по продольной координате [25].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работах У.К. Нигула [9] и других авторов показано, что все случаи нестационарных волн в тонкостенных телах при ударных торцевых воздействиях сводятся к трем основным схемам, определяемым тремя типами нагрузки.



Описанные в статье асимптотические методы исследования нестационарных волн в тонких упругих оболочках вращения составляют в совокупности замкнутую математическую модель исследования простейшего класса нестационарных процессов в тонкостенных конструкциях. Замкнутую как в смысле полноты разработанных математических методов, так и в смысле влияния особенностей рассмотренных в классе материалов и геометрии конструкции на свойства НДС и соответственно на принципы расчленения НДС на составляющие с различными показателями изменчивости. Полнота математических методов заключается как в построении полной системы асимптотически оптимальных уравнений, описывающих все необходимые составляющие нестационарного НДС, так и в разработке аналитических методов решения краевых задач для составляющих. Последние представляют как самостоятельный интерес, так и интерес для построения решений модельных задач при разработке численных методов исследования или для разработки гибридных аналитически-численных алгоритмов.

В рамках разработанной математической модели проведены дальнейшие исследования, углубившие понимание рассматриваемых физических явлений с точки зрения формирования установившихся процессов при различных видах воздействий. Так, в работе [15] исследуется, в частности, стремление решения для изгибающей в оболочках вращения к стационарному с ростом времени и принципиальные отличия со временем свойств этих решений от соответствующих решений для пластин. В работах [16, 17] исследовано нестационарное НДС при ударно приложенных гармонических торцевых воздействиях на оболочки вращения и выявлено расположение зон перехода нестационарной части решения в гармонические колебания.

Разработка математической модели указанного класса определила принципы подхода к исследованию самых разнообразных динамических задач для тонкостенных конструкций, которые базируются на широчайших возможностях асимптотического метода. Приведем примеры последних разработок, обобщающих рассмотренный асимптотический подход.

В плане изучения нового класса ударных воздействий и изменения общей схемы расчленения характерна работа [18], которая указывает, в частности, что при высокочастотном краевом нагружении НДС около торца будет описываться вместо длинноволновой низкочастотной составляющей (теория Кирхгофа – Лява) длинноволновой высокочастотной. Локальное нормальное ударное воздействие сжимающего типа на упругую плиту рассматривалось в [19]: для решения этой очень характерной задачи использовалась уточненная асимптотическая 2D модель. Отметим также, что изменение геометрического класса задач — переход к оболочкам общего очертания (или к воздействиям, локально действующим на торцы оболочки) — требует кардинально нового подхода к выбору систем координат, связанного со сложной геометрией фронтов и квазифронтов. В [18] предложено срединную поверхность произвольных оболочек относить не к линиям кривизны, а к полугеодезической системе координат и изучать процесс распространения волн вдоль геодезических. Данный подход реализован в работах [20–21] на примере скошенной цилиндрической оболочки.

Интересными теоретически и практически важными явились исследования распространения нестационарных волн в подкрепленных оболочках вращения [22, 23]. Здесь необходимым оказался учет квазистатического погранслоя типа Сен-Венана при исследовании волнового процесса в подкреплениях.

Рассмотрены нестационарные процессы в оболочках из других материалов со свойствами, принципиально влияющими на характер НДС. Так, в работах [7, 24] выведены асимптотически оптимальные уравнения для различного типа погранслоев в трансверсально изотропных тонких пластинах и оболочках.

В работах [7, 25] рассмотрено нестационарное НДС в оболочках из вязкоупругих материалов. Введение нового параметра — показателя интенсивности времени релаксации — позволило описать новую классификацию нестационарного НДС конструкций в случае вязкоупругих материалов с дифференциальной формой уравнений состояния. Выведены асимптотически оптимальные уравнения всех составляющих.

Анализ математической модели, описанной в рассматриваемой статье, и ее обобщений на различные случаи геометрии тонкостенных конструкций и материалов показывает универсальный характер разработанной математической теории.

**Библиографический список**

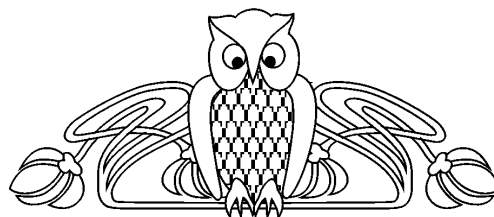
1. Коссович Л.Ю., Каплунов Ю.Д. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях // Изв. Саратов. ун-та. Новая сер. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 115–128
2. Гольденвейзер А.Л. Теория упруги тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
4. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 176 с.
5. Kaplunov J.D. On the quasi-front in two-dimensional shell theories // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 2. 1991. V. 313. P. 731–736.
6. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V. Dynamics of thin walled elastic bodies. San Diego Academic Press, 1998.
7. Шевцова Ю.В. Погранслои в окрестности квазифронта в трансверсально изотропной цилиндрической оболочке // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СГТУ, 2000. С. 114–117.
8. Бажанова Н.С., Коссович Л.Ю., Сухоловская М.С. Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Известия вузов. Северокавказский регион. Естественные науки. 2000. №2. С. 17–24.
9. Nigul U. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates // Intern. J. Solids and Structures. 1969. V. 54. P. 607–627.
10. Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости // Докл. АН. 2004. Т. 395, № 4. С. 482–484.
11. Kaplunov J., Kossovich L., Zakharov A. An explicit asymptotic model for the Bleustein-Gulyaev wave. C.R. Mecanique. 2004. № 332. P. 487–492.
12. Коссович Л.Ю., Кушеккалиев А.Н. Поле Рэлея в бесконечном упругом слое // Математика, механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып.5. С. 159–161.
13. Ковалев В.А., Коссович Л.Ю., Таранов О.В. Поле Рэлея в задаче Лэмба для цилиндрической оболочки // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спецвыпуск. 2004. С. 52–54.
14. Ковалев В.А., Коссович Л.Ю., Таранов О.В. Дальнее поле волны Рэлея для упругой полуплоскости при действии торцевой нагрузки // Известия РАН. МТТ. 2005. №5. С. 89–96.
15. Кушеккалиев А.Н. Решение задач о распространении волн в трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке при нормальных воздействиях // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002. Вып. 14. С. 106–115.
16. Кушеккалиев А.Н. Волны типа Рэлея в полубесконечной пластине при нормальном воздействии поперечного типа // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 15. С.66–73.
17. Коссович Л.Ю., Кушеккалиев А.Н. Анализ приближений в задаче Лэмба для бесконечного упругого слоя // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003. №2. С. 10–22.
18. Коссович Л.Ю., Кушеккалиев А.Н. Расчленение нестационарного НДС в задаче Лэмба для бесконечного слоя на составляющие с разными показателями изменчивости // Тр. III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием. Ростов н/Д, 2003. С. 232–234.
19. Ковалев В.А., Таранов О.В. Расчленение нестационарного НДС цилиндрических оболочек при ударных торцевых воздействиях нормального типа // Смешанные задачи механики деформированного тела: Материалы V Рос. конф. с международным участием. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2005. С. 191–193.
20. Кириллова И.В. Области согласования погранслоя и коротковолнового высокочастотного приближения // Математическое моделирование и управление в технических системах: Сб. трудов / СГАУ. Саратов, 1998. С. 3–11.
21. Новожилов В.В., Слепян Л.И. О принципе Сен-Венана в динамике стержней // ПММ. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 261–281.
22. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. Л.: Судостроение, 1972. 374 с.
23. Гусейн-Заде М.И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуплоскости // Прикл. мат. и мех. 1965. Т.29, вып. 2. С. 393–399.
24. Гусейн-Заде М.И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуплоскости // Прикл. мат. и мех. 1965. Т.29, вып. 4. С. 752–760.
25. Ковалев В.А., Таранов О.В. Анализ точного и приближенного решения для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея в упругой полуплоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная сер. 2007. № 6(56). С. 57–60

УДК 539.374

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ (КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ТЕЧЕНИЕ НА ГРАНИ И РЕБРЕ ПРИЗМЫ КУЛОНА – ТРЕСКА)

Ю.Н. Радаев

Самарский государственный университет,
кафедра механики сплошных сред
E-mail: radayev@ssu.samara.ru



В работе приводится вывод правильно определенной системы уравнений, описывающей кинематику пространственного идеально пластического течения на ребре призмы Кулона – Треска, и дано исследование основных кинематических уравнений (включая пространственные соотношения Коши и уравнения совместности для приращений деформаций) с помощью триортogonalной изостатической системы координат. Устанавливаются правильная определенность и гиперболичность системы уравнений для приращений перемещений и находятся ее характеристические направления. Выводятся соотношения для приращений перемещений вдоль линий главных напряжений, обобщающие известные соотношения Гейрингера. Отдельно рассматриваются кинематические соотношения для случаев плоского деформированного и осесимметричного состояний. Исследована кинематика скольжения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Показано, что скольжения на указанной поверхности происходят вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т.е. когда Гауссова кривизна положительна, поверхности максимальной скорости сдвига.

Three-Dimensional Problem of Perfect Plasticity (Kinematic Equations Determining Three-Dimensional Plastic Flow for a Facet and Edge of the Tresca Prism)

Yu.N. Radayev

In the present study a system of partial differential equations which describes kinematic of three-dimensional plastic flow for the states corresponding to an edge of the Tresca prism is obtained. The system includes the Cauchy equations and the compatibility equations formulated for the displacements and strains increments. These equations are then analysed by the aid of the triorthogonal isostatic co-ordinate net. The system of kinematic equations is shown correctly determines displacements increments and be of the hyperbolic type. Relations for the displacements increments valid along principal stress lines are derived. Kinematic of plane and axial symmetric plastic flow are separately considered for each case. Kinematic equations for states corresponding to a facet of the Tresca prism which are of the less importance are also examined. Slip kinematic on a surface of maximum shear strain rate in perfectly plastic continuous media is studied. Sliding on the surface is shown can be realized only along asymptotic directions and only within hyperbolic zones of the surface (wherein the Gaussian curvature of the surface is negative). Integrable equations along asymptotic lines of the maximum shear strain rate surface for the jumps of tangent velocities are obtained. Kinematic equations corresponding to elliptic zones on a maximum shear strain rate surface (i.e. if the Gaussian curvature of the surface is positive) are derived and analysed.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, по-прежнему сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона – Треска, для подавляющего большинства пространственных состояний уравнения теории идеальной пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Так, пространственная задача математической теории пластичности в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптичны (т.е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения, действительные



характеристики отсутствуют. Не спасает положения учет упругих деформаций. Фактор упрочнения в принципе гарантирует эллиптичность уравнений. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругопластических деформаций, и для редко применяемых в настоящее время неассоциированных законов пластического течения. После осмысления всех этих результатов в отчетливой форме и была сформулирована задача: *найти такие определяющие зависимости, чтобы в области пластического течения всегда существовали, по меньшей мере, два семейства характеристических поверхностей, получив тем самым пространственные уравнения теории идеальной пластичности, адекватно описывающие скольжение.*

Подытоживая почти полувековую дискуссию по указанной проблематике, можно сказать, что предельные состояния идеально пластических тел должны описываться статически определенными уравнениями гиперболического типа. Именно такое положение дел имеет место в пространственной задаче теории идеальной пластичности при использовании критерия текучести Кулона – Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся статически определенными и гиперболическими. основополагающими работами этого важнейшего направления современной теории пластичности выступают статьи Д.Д. Ивлева [1], [2]. В монографии [3] с помощью изостатической координатной сетки были исследованы основные соотношения пространственной задачи математической теории пластичности для течения на ребре призмы Кулона – Треска.

Целью представляемой работы являются вывод правильно определенной системы уравнений, описывающей кинематику пространственного пластического течения на ребре призмы Кулона – Треска, и исследование кинематических уравнений с помощью триортогональной изостатической системы координат.

В первом параграфе статьи рассматриваются трехмерные уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру условия текучести Кулона – Треска, дается их классификация и с помощью геометрических условий совместности Адамара – Томаса определяются характеристические направления. Здесь же выводится ряд замечательных инвариантных форм указанных уравнений. Во втором параграфе исследуются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения на ребре призмы Кулона – Треска и основные соотношения для приращений перемещений, следующие из него. Устанавливаются правильная определенность и гиперболичность системы уравнений для приращений перемещений и находятся ее характеристические направления. Затем (см. параграф 3 представляемой работы) анализируются уравнения математической теории пластичности для грани призмы Кулона – Треска и доказывается, что задача для приращений перемещений является неправильно определенной: *три* компоненты приращения вектора перемещений должны удовлетворять *пяти* независимым уравнениям. В следующем параграфе работы выводятся пространственные соотношения Коши в приращениях относительно триортогональной изостатической координатной сетки. Триортогональная изостатическая координатная сетка характеризуется тем, что ее координатные линии суть взаимно ортогональные траектории главных напряжений. В тех случаях, когда указанная координатная сетка существует, оказывается наиболее естественным рассматривать те или иные тензорные уравнения относительно именно таких криволинейных координат. Кинематические соотношения для пространственного пластического течения исследуются в пятом параграфе с помощью изостатических координат. Далее (параграф 6) приводятся уравнения совместности для приращений деформаций, а затем — вывод кинематических соотношений для случаев плоского деформированного и осесимметричного состояний (параграфы 7 и 8). Заканчивается работа параграфом 9, где дан анализ пластического скольжения на поверхности максимальной скорости сдвига и доказывается, что скольжения на указанной поверхности происходят вдоль асимптотических направлений.

1. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ СОСТОЯНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ РЕБРУ ПРИЗМЫ КУЛОНА – ТРЕСКА

Условие текучести Треска, или условие максимального касательного напряжения, имеет следующий вид:

$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} = Y, \quad (1.1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — собственные значения тензора напряжений (главные нормальные напряжения); Y —



предел текучести при одноосном растяжении. Величины

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

называются главными касательными напряжениями и представляют собой экстремальные значения касательных напряжений для всех возможных площадок, проходящих через заданную точку. Пространственное напряженное состояние в данной точке весьма просто анализируется с помощью графического метода Мора (O. Mohr), который дает также простую схему для определения величины нормального и касательного напряжения в зависимости от ориентации площадки в пространстве [4].

Условие текучести Треска устанавливает, что величина Y связана с величиной k (пределом текучести при чистом сдвиге) простым соотношением $Y = 2k$.

Уравнение призмы Кулона – Треска (1.1), очевидно, можно также представить в форме

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - Y^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - Y^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - Y^2] = 0. \quad (1.2)$$

В пространстве главных напряжений поверхность текучести, определяемая уравнением (1.2), представляет собой правильную шестигранную призму (призма Кулона – Треска), ось которой равнонаклонена к декартовым осям этого пространства. Кривая текучести (сечение призмы Кулона – Треска девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) представляет собой правильный шестиугольник с центром в начале координат и стороной, равной $\sqrt{2/3}Y$.

Рассмотрим уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска. Обозначим через σ тензор напряжений; $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ – ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений.

Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид

$$\sigma = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.3)$$

В пространстве главных напряжений ребра призмы Кулона – Треска определяются уравнениями

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Последнее условие означает, что два главных напряжения равны по величине, а главное напряжение σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Сделаем одно существенное для всего дальнейшего изложения замечание. Равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , является главным. Ясно поэтому, что при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска имеется известная доля произвола при выборе собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}). Их преимущественное положение в упомянутой плоскости может быть указано только либо 1) после анализа тензора приращений пластических деформаций $d\epsilon^P$, который в силу ассоциированного закона течения должен быть соосен тензору напряжений σ и обладает, вообще говоря, уникальным триэдром главных направлений; либо 2) условиями «подгонки» триэдра $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ до триортогональной системы. Все эти вопросы будут затронуты в параграфе 2.

Так как $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ – ортонормированный базис, то

$$\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}, \quad (1.4)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор.

Учитывая (1.3), (1.4) и уравнение ребра призмы Кулона – Треска $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$, получим

$$\sigma = (\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I} \mp 2k\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (1.5)$$



Таким образом, тензор напряжений определяется скалярным полем σ_3 и единичным векторным полем \mathbf{n} .

Уравнение равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ после подстановки в него разложения (1.5) можно представить в следующем виде:

$$\text{grad } \sigma_3 \mp 2k \text{ div } (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.6)$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Кулона – Треска, формально статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора \mathbf{n}), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Обозначим через Σ безразмерное отношение σ_3 к $\mp 2k$ и приведем уравнение (1.6) к виду:

$$\text{grad } \Sigma + \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1). \quad (1.7)$$

В декартовых координатах векторное уравнение (1.7) эквивалентно системе трех скалярных уравнений ($i, k = 1, 2, 3$):

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x_i} + n_k \frac{\partial n_i}{\partial x_k} + n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_k} = 0 \quad (n_k n_k = 1).$$

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.7):

$$\nabla \Sigma + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

где ∇ — пространственный оператор Гамильтона.

Для единичного векторного поля справедлива формула¹

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}, \quad (1.9)$$

с помощью которой векторное уравнение (1.8) может быть также представлено в виде

$$\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{ div } \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.10)$$

Исследуем характеристики уравнения (1.10). Для этого будем трактовать характеристические поверхности уравнения (1.10) как поверхности слабого разрыва Σ и \mathbf{n} и воспользуемся условиями совместности Адамара – Томаса [5]:

$$[\nabla \Sigma] = B \mathbf{N}, \quad [\nabla \otimes \mathbf{n}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{b}, \quad (1.11)$$

где $[\cdot]$ обозначает скачок при переходе через поверхность слабого разрыва; \mathbf{N} — единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва; B, \mathbf{b} — некоторые поля, определенные на этой поверхности, причем равенства $B = 0$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность есть действительно поверхность слабого разрыва.

На основании уравнения (1.10) имеем:

$$[\nabla \Sigma] - \mathbf{n} \times [\text{rot } \mathbf{n}] + \mathbf{n} [\text{div } \mathbf{n}] = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

и, применяя условия совместности (1.11), получим

$$B \mathbf{N} - \mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.13)$$

Кроме того, так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$, то $\mathbf{n} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{n})^T = \mathbf{0}$ и, следовательно, $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{N} = \mathbf{0}$, что приводит к следующему соотношению на поверхности слабого разрыва:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.14)$$

¹Приводимая ниже формула является прямым следствием тождества

$$\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}$$

и условия нормировки $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$.



Замечая, что $\mathbf{n} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{N} - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b}$, и учитывая (1.14), уравнение (1.13) приводим к виду

$$B\mathbf{N} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (1.15)$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор \mathbf{N} :

$$B + 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{b}) = 0. \quad (1.16)$$

Умножая обе части уравнения (1.15) скалярно на вектор \mathbf{n} , получим также

$$B(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (1.17)$$

Подставляя в это уравнение выражение для B , полученное с помощью предыдущего уравнения, находим, что

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{b})(1 - 2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})^2) = 0. \quad (1.18)$$

Это уравнение распадается на два. Если $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} \neq 0$, то необходимо

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.19)$$

Если $\mathbf{N} \cdot \mathbf{b} = 0$, то на основании (1.16) $B = 0$, и тогда уравнение (1.15) дает $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n})\mathbf{b} = \mathbf{0}$, откуда в силу того, что равенства $B = 0$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.20)$$

Итак, уравнение (1.10) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям в силу (1.19) образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора \mathbf{n} . Ясно, что характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения). Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и согласно (1.20) интегральные поверхности поля \mathbf{n} (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля \mathbf{n}).

2. УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО АССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ТЕЧЕНИЯ НА РЕБРЕ ПРИЗМЫ КУЛОНА – ТРЕСКА И СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Ассоциированный закон течения является фундаментальным принципом математической теории пластичности и устанавливает, что в пространстве напряжений вектор, представляющий тензор приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$, ортогонален регулярной поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ в данном напряженном состоянии $\boldsymbol{\sigma}$:

$$d\varepsilon^P = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda. \quad (2.1)$$

Величина $d\lambda$, называемая неопределенным множителем, положительна при активном пластическом нагружении, признаком которого является выполнение условий $f = 0$, $df = 0$. Следует отметить, что множитель $d\lambda$ не может быть вычислен через определяющие функции, и его значение должно вычисляться в процессе решения краевой задачи.

Для изотропного тела критерий текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ связывает некоторой зависимостью главные нормальные напряжения

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (2.2)$$

причем функция текучести f на самом деле зависит от трех независимых симметрических комбинаций главных нормальных напряжений; в качестве таковых могут быть выбраны линейная, квадратичная и кубическая симметрические формы главных нормальных напряжений

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3), \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned}$$



В теории идеальной пластичности обычно предполагается, что гидростатическое напряжение никак не влияет на текучесть, а поэтому функция текучести f в действительности зависит лишь от разностей главных нормальных напряжений, т.е. от двух независимых инвариантов девиатора тензора напряжений

$$J'_2 = \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2),$$

$$J'_3 = \frac{1}{27}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2).$$

Ассоциированный закон течения (2.1) для изотропного тела устанавливает соосность тензоров $d\varepsilon^P$ и σ .

Действительно, если $f = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — регулярная изотропная функция тензора напряжений σ , то

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений.

Доказательство формулы (2.3) базируется на фундаментальных соотношениях дифференцирования собственных значений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ симметричного тензора второго ранга по самому тензору σ

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma} = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (2.4)$$

Для доказательства этих соотношений продифференцируем спектральное разложение тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_i l_j + \sigma_2 m_i m_j + \sigma_3 n_i n_j$$

по σ_{ks} и в результате получим равенство (при дифференцировании *не должна* учитываться симметрия тензора напряжений, иначе необходимые частные производные будут вычислены неправильно)

$$\delta_{ik} \delta_{js} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ks}} l_i l_j + \sigma_1 l_j \frac{\partial l_i}{\partial \sigma_{ks}} + \sigma_1 l_i \frac{\partial l_j}{\partial \sigma_{ks}} + \dots,$$

сворачивая обе части которого сначала с l_i , а затем с l_j , приходим (невывисанные слагаемые при этом дают нулевой вклад в силу взаимной ортогональности собственных векторов) к

$$l_k l_s = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ks}} + \sigma_1 l_i \frac{\partial l_i}{\partial \sigma_{ks}} + \sigma_1 l_j \frac{\partial l_j}{\partial \sigma_{ks}}.$$

Учитывая, что $l_j l_j = 1$ и поэтому

$$l_j \frac{\partial l_j}{\partial \sigma_{ks}} = 0,$$

сразу же получаем

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma_{ks}} = l_k l_s,$$

и аналогично

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma_{ks}} = m_k m_s, \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ks}} = n_k n_s,$$

что и доказывает (2.4).

Если два собственных значения равны (скажем, $\sigma_1 = \sigma_2$), а третье с ними не совпадает, то частные производные $\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma}$ становятся неопределенными. Однако в силу $\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}$ их сумма будет вполне определенной, так как выполняется равенство

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial \sigma} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}.$$

В главных осях тензора напряжений ассоциированный закон течения изотропного тела (2.1) имеет следующий вид:

$$d\varepsilon_j^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda, \quad (2.5)$$

где здесь и в дальнейшем $d\varepsilon_j^P$ — собственные значения тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$, которые, вообще говоря, отличаются от *приращений* собственных значений ε_j^P тензора

²Или главные приращения пластических деформаций.



пластических деформаций ϵ^P . С учетом этого замечания спектральное разложение тензора $d\epsilon^P$ представляется как

$$d\epsilon^P = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\epsilon_1^P + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\epsilon_2^P + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\epsilon_3^P.$$

Для изотропного тела в силу указанной выше формы критерия текучести и ассоциированного закона течения наиболее удобно геометрическое представление основных соотношений в трехмерном пространстве главных напряжений Хэя – Вестергарда (Haigh, 1920; Westergaard, 1920).

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (Koiter, 1953). Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа p гладких поверхностей текучести $f_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

Активное нагружение, сопровождающееся изменением пластических деформаций, определяется условиями

$$\begin{aligned} f_\omega &= 0, & df_\omega &= 0, \\ f_\kappa &= 0, & df_\kappa &< 0 \text{ или } f_\kappa < 0, \end{aligned}$$

где индексы ω и κ различны, и их значения в совокупности исчерпывают все значения индекса $\gamma = 1, 2, \dots, p$, причем индекс ω пробегает непустое множество значений.

Полное приращение $d\epsilon^P$ есть сумма соответствующих всем индексам ω приращений $d\epsilon^{P(\omega)}$:

$$d\epsilon^P = \sum_{\omega} d\epsilon^{P(\omega)},$$

где каждое приращение $d\epsilon^{P(\omega)}$ вычисляется согласно ассоциированному закону течения

$$d\epsilon^{P(\omega)} = \frac{\partial f_\omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_\omega,$$

а величины $d\lambda_\omega$ должны быть положительными.

Окончательно обобщенный ассоциированный закон течения принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} d\epsilon^P &= \sum_{\gamma=1}^p \frac{\partial f_\gamma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_\gamma, \\ d\lambda_\gamma &> 0 \quad (f_\gamma = 0, df_\gamma = 0), \\ d\lambda_\gamma &= 0 \quad (f_\gamma = 0, df_\gamma < 0 \text{ или } f_\gamma < 0). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Его следствием является соосность тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\epsilon^P$ в изотропном теле.

Геометрически обобщенный ассоциированный закон течения устанавливает, что в угловой точке поверхности текучести вектор, представляющий приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, является линейной комбинацией нормальных к поверхностям $f_\omega = 0$ в указанной точке векторов, причем направление указанного вектора в угловой точке поверхности нагружения обобщенным ассоциированным законом течения не фиксируется, а остается неопределенным.

Рассмотрим уравнения обобщенного ассоциированного закона течения применительно к условию текучести Треска. Обозначая, как обычно, через τ_1, τ_2, τ_3 экстремальные (главные) касательные напряжения

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

имеем

$$d\epsilon_{ij}^P = \text{sgn}(\tau_\gamma) \frac{\partial \tau_\gamma}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, 3), \tag{2.7}$$



где индекс γ пробегает значения 1, 2, 3, однако суммирование в правой части (2.7) распространяется лишь на те значения γ , для которых $\text{sgn}(\tau_\gamma)\tau_\gamma = k$, т.е. в правой части содержится не более двух слагаемых.

Частные производные в правой части (2.7) в главных осях тензора напряжений без труда вычисляются, если заметить, что (по i не суммировать)

$$\frac{\partial \sigma_l}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{il} \delta_{ij} \quad (i, j, l = 1, 2, 3). \quad (2.8)$$

В результате находим

$$-\frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_{33}} = \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma_{22}} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_{11}} = \frac{\partial \tau_2}{\partial \sigma_{33}} = \frac{1}{2}, \quad -\frac{\partial \tau_3}{\partial \sigma_{22}} = \frac{\partial \tau_3}{\partial \sigma_{11}} = \frac{1}{2}. \quad (2.9)$$

Остальные частные производные равны нулю.

Непосредственный подсчет с помощью (2.7), (2.9) показывает, что в главных осях напряжений матрица тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ диагональна

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \text{diag}(d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3),$$

т.е. ориентации главных осей напряжений и главных осей приращений деформаций одинаковы.

Подсчет суммы главных приращений $d\varepsilon_j^P$ на основании (2.7), (2.9) позволяет заключить, что выполняется условие несжимаемости.

Обратимся к более детальному исследованию уравнений обобщенного ассоциированного закона течения, предполагая, что напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона – Треска, а третье главное напряжение является максимальным: $\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$, $\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$. Ясно, что при этом имеет место равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$. В терминах главных касательных напряжений этот случай характеризуется выполнением условий $\tau_1 = -k$, $\tau_2 = k$, $\tau_3 = 0$.

Равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , является главным. Ясно поэтому, что при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска, т.е. в состоянии полной пластичности, имеется известная доля произвола при выборе собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} (они определены с точностью до поворота в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}). Их преимущественное положение в упомянутой плоскости указывается ориентацией собственных векторов тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, который в силу ассоциированного закона течения должен быть соосен тензору напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и обладает, поскольку, вообще говоря, $d\varepsilon_1 \neq d\varepsilon_2$, уникальным триэдром главных направлений. Следовательно, ассоциированный закон течения, сформулированный для ребра призмы Кулона – Треска, устанавливает совпадение *только одной* из трех главных осей тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, накладывая тем самым *минимум* кинематических ограничений. Это обстоятельство мы будем характеризовать термином «1/3-соосность» тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$. Для течения на ребре призмы Кулона – Треска «1/3-соосность» тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ достаточна для их соосности в том смысле, что существует хотя бы одна тройка взаимно ортогональных направлений, которая будет главной как для тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, так и для тензора $\boldsymbol{\sigma}$. Итак, при исследовании течения на ребре призмы Кулона – Треска никогда не следует забывать об указанном обстоятельстве: триэдр главных направлений тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ всегда будет и триэдром главных направлений тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, но не всякий триэдр главных направлений тензора напряжений будет триэдром главных направлений тензора приращений пластических деформаций.

Обозначая, как было оговорено выше, через $d\varepsilon_j^P$ собственные значения тензора приращений пластических деформаций, соотношения обобщенного ассоциированного закона течения для ребра призмы Кулона – Треска $\tau_1 = -k$, $\tau_2 = k$, $\tau_3 = 0$ представим в *общих* главных осях напряжений и приращений пластических деформаций в виде

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1^P &= -d\lambda_2, \\ d\varepsilon_2^P &= -d\lambda_1, \\ d\varepsilon_3^P &= d\lambda_1 + d\lambda_2, \end{aligned} \quad (2.10)$$



где $d\lambda_\beta$ — неопределенные множители теории идеальной пластичности. Следовательно, обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный для ребра призмы Кулона – Треска, эквивалентен двум условиям: условию 1/3-соосности тензоров $d\epsilon^P$ и σ и условию $d\epsilon_1^P + d\epsilon_2^P + d\epsilon_3^P = 0$, характеризующему несжимаемость пластического деформирования.

Таким образом, уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, сформулированного для ребра призмы Треска, позволяют найти помимо условия соосности тензоров $d\epsilon^P$ и σ (да и то с точностью до поворота триэдра главных осей в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}) еще только одно существенное соотношение, следующее из (2.10), — условие несжимаемости:

$$d\epsilon_1^P + d\epsilon_2^P + d\epsilon_3^P = 0. \quad (2.11)$$

Его можно также представить в форме

$$d\epsilon_{jj}^P = 0 \quad (2.12)$$

или в инвариантной прямой записи

$$\text{tr}(d\epsilon^P) = 0. \quad (2.13)$$

Последнее обстоятельство имеет принципиально важное значение: для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона – Треска, пластическое течение имеет наибольшую свободу и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда важнейших прикладных задач, привлекая схему полной пластичности Хаара – Кармана³. Ясно, что напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку при этом имеется весьма сильное кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю⁴.

Условие соосности тензоров $d\epsilon^P$ и σ в силу (1.3) может быть сформулировано как

$$d\epsilon^P = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\epsilon_1^P + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\epsilon_2^P + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\epsilon_3^P. \quad (2.14)$$

Здесь векторы \mathbf{l} и \mathbf{m} уже выступают как собственные векторы тензора $d\epsilon^P$, и поэтому их ориентация в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , уникальна. Если тензор напряжений σ соответствует ребру призмы Кулона – Треска и задан, то ориентация вектора \mathbf{n} известна, а ориентации векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} не определены до тех пор, пока полностью не определены кинематические поля. Далее в кинематических уравнениях мы задействуем лишь вектор \mathbf{n} .

Соотношение (2.14) позволяет заключить, что $\mathbf{n} \cdot d\epsilon^P = \mathbf{n} d\epsilon_3^P$, или также $\mathbf{n} \cdot d\epsilon^P \cdot \mathbf{n} = d\epsilon_3^P$, и, кроме того (см. [6, с. 208]),

$$\mathbf{n} \cdot d\epsilon^P = \mathbf{n} \text{tr}((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot d\epsilon^P). \quad (2.15)$$

Полученное уравнение устанавливает лишь только тот факт, что вектор \mathbf{n} — собственный вектор тензора $d\epsilon^P$. Проектируя векторное уравнение (2.15) на оси некоторой прямоугольной системы координат x_1, x_2, x_3 , можно получить три скалярных уравнения [7]

$$n_j d\epsilon_{ij}^P = n_i n_k n_l d\epsilon_{kl}^P. \quad (2.16)$$

Только два из них будут независимыми. Действительно, свернутые с n_i соотношения (2.16) удовлетворяются тождественно, что указывает на их линейную зависимость.

Два независимых уравнения из (2.16) вместе с уравнением несжимаемости (2.12) образуют систему из *трех* независимых уравнений

$$\begin{aligned} d\epsilon_{jj}^P &= 0, \\ n_j d\epsilon_{ij}^P &= n_i n_k n_l d\epsilon_{kl}^P, \end{aligned} \quad (2.17)$$

которые после подстановки в них вместо приращений пластических деформаций *трех* приращений перемещений согласно

$$2d\epsilon = (\nabla \otimes d\mathbf{u}) + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T \quad (2.18)$$

³Эта гипотеза принадлежит Д.Д. Ивлеву.

⁴В следующем параграфе приводится анализ общих соотношений математической теории идеальной пластичности для течения на грани призмы Кулона – Треска. Граням призмы соответствуют чисто сдвиговые течения, когда главные приращения пластических деформаций удовлетворяют условиям $d\epsilon_i^P = 0, \quad d\epsilon_j^P + d\epsilon_l^P = 0 \quad (i \neq j, j \neq l, l \neq i)$.



или, переходя к прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 ,

$$2d\varepsilon_{ij}^P = \partial_i(du_j) + \partial_j(du_i),$$

позволяют полностью исследовать кинематику пластического течения, если поле напряжений уже определено⁵.

Система кинематических уравнений (2.17)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(d\varepsilon^P) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot d\varepsilon^P &= \mathbf{n} \operatorname{tr}((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot d\varepsilon^P), \end{aligned} \quad (2.19)$$

описывающая идеально пластическое течение на ребре призмы Кулона – Треска, правильно определенная и гиперболическая⁶. Характеристические направления этой системы, как показывает несложный расчет, совпадают с характеристическими направлениями системы трехмерных статических уравнений.

Действительно, будем трактовать характеристические поверхности системы уравнений (2.19) как поверхности слабого разрыва приращений перемещений $d\mathbf{u}$ и воспользуемся геометрическими условиями совместности Адамара – Томаса (см., например [5]):

$$[\nabla \otimes d\mathbf{u}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a},$$

где $[\cdot]$ обозначает скачок при переходе через поверхность слабого разрыва, \mathbf{N} – единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва, \mathbf{a} – некоторое ненулевое векторное поле, определенное на этой поверхности. На основании соотношений Коши

$$2[d\varepsilon^P] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{N},$$

следовательно,

$$\operatorname{tr}([d\varepsilon^P]) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}.$$

Учитывая полученные формулы, из уравнений системы (2.19) находим следующие соотношения для вектора \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})\mathbf{a} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{N} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Проектируя последнее из полученных уравнений на ортогональные друг другу направления \mathbf{N} , \mathbf{a} , получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})(1 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})^2) &= 0, \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В зависимости от того, выполняется ли условие $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$, имеем: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0$ или $1 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N})^2 = 0$ ⁷. Поэтому нормали к характеристическим поверхностям образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора \mathbf{n} . Конус нормалей к характеристическим площадкам для системы кинематических уравнений пространственной задачи математической теории пластичности (в случае течения на ребре призмы Треска) тот же самый, что и для системы уравнений равновесия⁸. На основании уравнения $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 0$ можно заключить, что характеристическими поверхностями являются также и интегральные поверхности поля \mathbf{n} (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля \mathbf{n}). Все это указывает на гиперболичность системы уравнений (2.19), описывающей пространственное пластическое течение на ребре призмы Треска.

Если удастся получить решение системы кинематических уравнений (2.17) относительно приращений перемещений $d\mathbf{u}$, то затем можно найти тензор приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$, а вместе с ним и точную ориентацию собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} .

⁵В параграфе 5 будет дан анализ кинематических уравнений в случае пространственного течения на ребре призмы Кулона – Треска в триортогональной криволинейной сетке линий главных напряжений.

⁶Далее будет установлено, что кинематические соотношения пространственной задачи для грани призмы Кулона – Треска не являются правильно определенными: *три* компоненты вектора приращения перемещений du_j должны удовлетворять *пяти* независимым уравнениям.

⁷Любопытно отметить, что во втором случае (т.е. когда $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \neq 0$) с помощью второго уравнения системы (2.20) можно установить, что вектор \mathbf{a} , обладая произвольным модулем, должен составлять с вектором \mathbf{n} угол $\pm\pi/4$.

⁸Этот результат был получен в работе [2].



3. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ГРАНИ ПРИЗМЫ КУЛОНА–ТРЕСКА

Рассмотрим также основные уравнения теории идеальной пластичности для грани призмы Треска. Напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку ассоциированный закон течения в этом случае устанавливает весьма сильные кинематические ограничения на процесс пластического течения: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю, и триэдр главных осей тензора приращений пластических деформаций жестко предписан тензором напряжений. Граням призмы соответствуют чисто сдвиговые течения, когда главные приращения пластических деформаций удовлетворяют условиям

$$d\varepsilon_i^P = 0, \quad d\varepsilon_j^P + d\varepsilon_l^P = 0 \quad (i \neq j, j \neq l, l \neq i).$$

Совершенно иная ситуация наблюдается в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска: ни одно из главных приращений пластических деформаций здесь принципиально определить нельзя⁹ а триэдр главных осей тензора приращений пластических деформаций не предписывается жестко триэдром главных напряжений (они могут отличаться друг от друга поворотами в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}).

Для грани призмы Треска, задаваемой уравнением $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ (в этом случае σ_1 — максимальное, σ_2 — минимальное, σ_3 — промежуточное главное напряжение), тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} - (\sigma_2 - \sigma_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 2k \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}. \quad (3.1)$$

Поэтому уравнения равновесия получаются в виде (ср. (1.7))

$$\text{grad} \Sigma_2 + \text{div}(\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \text{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + [\mathbf{n} \cdot \text{grad}(\Sigma_3 - \Sigma_2)] \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

где введены безразмерные главные напряжения $\Sigma_2 = \sigma_2/(2k)$, $\Sigma_3 = \sigma_3/(2k)$, или

$$\nabla \Sigma_2 + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)(\Sigma_3 - \Sigma_2) = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

К этому уравнению следует присоединить условия нормировки и ортогональности

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Проектируя векторное уравнение (3.3) на главные оси тензора напряжений, определяемые ориентациями \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} , находим направление \mathbf{n} :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \Sigma_3 + \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(\nabla \cdot \mathbf{n}) = 0; \quad (3.4)$$

направление \mathbf{l} :

$$(\mathbf{l} \cdot \nabla) \Sigma_2 + (\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{ \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] \} = 0; \quad (3.5)$$

направление \mathbf{m} :

$$(\mathbf{m} \cdot \nabla) \Sigma_2 + \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2) \{ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] \} = 0. \quad (3.6)$$

Если оказывается возможным введение триортогональной координатной системы с координатными линиями, являющимися линиями главных напряжений, то полученные только что соотношения можно рассматривать как соотношения вдоль взаимно ортогональных изостат [3]. Тогда можно ввести кривизны κ_{ij} (κ_{ij} есть кривизна проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно направлению j на локальную координатную плоскость, ортогональную этому направлению), и, учитывая, что

$$\nabla \cdot \mathbf{l} = \kappa_{32} + \kappa_{23}, \quad \nabla \cdot \mathbf{m} = \kappa_{13} + \kappa_{31}, \quad \nabla \cdot \mathbf{n} = \kappa_{12} + \kappa_{21},$$

⁹Главные приращения пластических деформаций связаны единственным уравнением (уравнением несжимаемости),

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P + d\varepsilon_3^P = 0.$$



а также

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{23}, & \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{32}, \\ \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{13}, & \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{31}, \\ \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{12}, & \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{21}, \end{aligned}$$

привести уравнения равновесия для грани призмы Треска (3.4)–(3.6) к следующему виду:

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \Sigma_3 - \kappa_{12} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})(\Sigma_3 - \Sigma_2) &= 0, \\ (\mathbf{l} \cdot \nabla) \Sigma_2 + (\kappa_{32} + \kappa_{23}) - \kappa_{32}(\Sigma_3 - \Sigma_2) &= 0, \\ (\mathbf{m} \cdot \nabla) \Sigma_2 - \kappa_{13} - \kappa_{31}(\Sigma_3 - \Sigma_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь дифференциальные операторы слева суть производные по направлениям линий главных напряжений:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla &= \frac{\partial}{\partial S_3} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{\partial}{\partial \xi^3}, \\ \mathbf{l} \cdot \nabla &= \frac{\partial}{\partial S_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \\ \mathbf{m} \cdot \nabla &= \frac{\partial}{\partial S_2} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Ассоциированный закон течения, сформулированный для грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, устанавливает жесткую (без неопределенности, характерной для ребра призмы Треска) соосность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и еще следующие соотношения для главных значений тензора приращений пластических деформаций

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda, \quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Видно, что характер пластического течения, если реализуется напряженное состояние на грани призмы Треска, оказывается чисто сдвиговым. Сдвиг происходит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} . Направления максимальной скорости сдвига расположены в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , и делят пополам прямые углы, образованные направленными вдоль векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} пересекающимися прямыми.

Нетрудно видеть, что множитель $d\lambda$ вычисляется через главные приращения пластических деформаций в виде

$$d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2}.$$

Условие соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ для течения на грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ принимает форму

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) d\varepsilon_1^P$$

или также

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = -\mathbf{l} d\varepsilon_1^P + 2\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1^P + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_1^P,$$

где, в отличие от течения на ребре призмы Треска, векторы \mathbf{l} и \mathbf{n} жестко предписаны тензором напряжений и заданы, если задан тензор напряжений.

Таким образом, система кинематических уравнений для рассматриваемой грани может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \text{tr}((\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P), \\ \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \mathbf{0}, \\ \text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$



Здесь содержится пять независимых скалярных уравнений, так как первое векторное уравнение дает только два независимых скалярных (скалярное умножение на вектор \mathbf{l} приводит к тождеству), второе векторное уравнение — три независимых скалярных, но одно из них (которое получается скалярным умножением на вектор \mathbf{l}) следует из первого векторного уравнения (точнее, из уравнения, которое получается скалярным умножением первого векторного уравнения на вектор \mathbf{n}), а третье — одно скалярное уравнение.

Первое из уравнений (3.8) выражает просто тот факт, что вектор \mathbf{l} есть собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, второе устанавливает, что вектор \mathbf{n} — собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ с нулевым собственным значением, третье — пластическую несжимаемость.

Проектируя уравнения (3.8) на оси некоторой прямоугольной системы координат, находим

$$\begin{aligned} l_j d\varepsilon_{ij}^P &= l_i l_k l_s d\varepsilon_{ks}^P, \\ n_j d\varepsilon_{ij}^P &= 0, \\ d\varepsilon_{jj}^P &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Три компоненты приращения вектора перемещений du_j , вводимые в (3.9) согласно

$$2d\varepsilon_{ij}^P = \partial_i(du_j) + \partial_j(du_i),$$

должны, таким образом, удовлетворять *пяти* независимым уравнениям. Следовательно, полученная система кинематических уравнений при течении на грани призмы Треска не является правильно определенной¹⁰.

Тем не менее течение на грани призмы Треска реализуется в ряде важных случаев: в случае плоского деформированного состояния и в случае скольжений вдоль поверхностей максимальной скорости сдвига (кинематика таких течений будет исследована в заключительном параграфе статьи).

Итак, замкнутая система соотношений для состояний, соответствующих грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \Sigma_2 + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l} + \mathbf{l}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2) ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n})) + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)(\Sigma_3 - \Sigma_2) &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{l} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \mathbf{l} \operatorname{tr}((\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P), \\ \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) &= 0; \\ 2d\boldsymbol{\varepsilon}^P &= \nabla \otimes d\mathbf{u} + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T; \\ \mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

4. СООТНОШЕНИЯ КОШИ В ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ ИЗОСТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Соотношения Коши, связывающие приращение вектора перемещений с приращением тензора полных деформаций, являются фундаментальными уравнениями механики деформируемого твердого тела. С их помощью наиболее просто могут быть выведены все кинематические уравнения теории идеальной пластичности.

Соотношения Коши, записанные для приращений перемещений, имеют форму прямого тензорного уравнения:

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes d\mathbf{u}) + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T. \quad (4.1)$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам локального ортонормированного базиса в пространстве $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m}du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n}du_{\langle 3 \rangle}. \quad (4.2)$$

¹⁰Состояния на грани призмы Треска, вообще говоря, статически неопределимы. Для состояний на грани необходимо совместное рассмотрение уравнений (3.3), (3.8), дополненных условиями нормировки и ортогональности собственных векторов тензора напряжений

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

и соотношениями Коши

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes d\mathbf{u} + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T.$$

Только тогда получается правильно определенная система соотношений.



Здесь величины $du_{\langle j \rangle}$ не являются действительными приращениями, а служат для обозначения физических компонент вектора du в триортогональной изостатической координатной сетке. Тем не менее о величинах $du_{\langle j \rangle}$ мы будем говорить как о приращениях перемещений, помня, однако, что они таковыми в действительности не являются.

Нетрудно видеть, что трехмерный оператор Гамильтона в триортогональной изостатической системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 есть (h_j — параметры Ламе рассматриваемой координатной системы)

$$\nabla = \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3}. \quad (4.3)$$

Градиент приращения вектора перемещения $\nabla \otimes du$ вычисляется в виде

$$\begin{aligned} \nabla \otimes du &= \mathbf{l} \otimes \nabla du_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \nabla du_{\langle 2 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \nabla du_{\langle 3 \rangle} + \\ &+ (du_{\langle 1 \rangle}) \nabla \otimes \mathbf{l} + (du_{\langle 2 \rangle}) \nabla \otimes \mathbf{m} + (du_{\langle 3 \rangle}) \nabla \otimes \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \nabla du_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial \xi^3}, \\ \nabla du_{\langle 2 \rangle} &= \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial \xi^3}, \\ \nabla du_{\langle 3 \rangle} &= \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{\langle 3 \rangle}}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (4.5)$$

или ($d_1 = \mathbf{l} \cdot \nabla$, $d_2 = \mathbf{m} \cdot \nabla$, $d_3 = \mathbf{n} \cdot \nabla$)

$$\begin{aligned} \nabla du_{\langle 1 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 1 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 1 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 2 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 2 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 2 \rangle}), \\ \nabla du_{\langle 3 \rangle} &= \mathbf{l}(d_1 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{m}(d_2 du_{\langle 3 \rangle}) + \mathbf{n}(d_3 du_{\langle 3 \rangle}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Используя далее выражения для производных от базисных векторов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^1} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \mathbf{m} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} \mathbf{n} = -(d_2 h_1) \mathbf{m} - (d_3 h_1) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \mathbf{m} = (d_1 h_2) \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \mathbf{n} = (d_1 h_3) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \mathbf{l} = (d_2 h_1) \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^2} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \mathbf{n} = -(d_1 h_2) \mathbf{l} - (d_3 h_2) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \mathbf{n} = (d_2 h_3) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} \mathbf{l} = (d_3 h_1) \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \mathbf{m} = (d_3 h_2) \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^3} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \mathbf{m} = -(d_1 h_3) \mathbf{l} - (d_2 h_3) \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (4.9)$$



приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}\nabla \otimes \mathbf{l} &= -\frac{1}{h_1}(d_2h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_1}(d_3h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_2}(d_1h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{h_3}(d_1h_3)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \nabla \otimes \mathbf{m} &= \frac{1}{h_1}(d_2h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2}(d_3h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \nabla \otimes \mathbf{n} &= \frac{1}{h_1}(d_3h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)\mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Используя (4.6) и (4.10), соотношение (4.4) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla \otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} \right] + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} \right].\end{aligned}\tag{4.11}$$

Транспонировав уравнение (4.11), получаем

$$\begin{aligned}\nabla \otimes d\mathbf{u})^T &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_3du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} \right] + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} \right].\end{aligned}\tag{4.12}$$

Подставляя выражения (4.11) и (4.12) в соотношения Коши (4.1), получим

$$\begin{aligned}d\varepsilon &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{\langle 3 \rangle} + d_1du_{\langle 1 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{\langle 3 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\ &+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\ &+ \frac{1}{2}\mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{\langle 2 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} \right] +\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} \right].
\end{aligned}$$

Тензор $d\varepsilon$, как явствует из только что полученной формулы, симметричен, что и так ясно а priori. Указанную формулу можно несколько преобразовать, вводя нормальные кривизны κ_{ij} триортогональной системы поверхностей $\xi^s = \text{const}$ (κ_{ij} есть кривизна проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению¹¹ в соответствии с приводимыми ниже равенствами:

$$\begin{aligned}
d_1 h_3 &= h_3 \kappa_{32}, & d_2 h_3 &= h_3 \kappa_{31}, & d_3 h_2 &= h_2 \kappa_{21}, \\
d_1 h_2 &= h_2 \kappa_{23}, & d_2 h_1 &= h_1 \kappa_{13}, & d_3 h_1 &= h_1 \kappa_{12}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

В результате получим следующие выражения для физических компонент тензора $d\varepsilon$ в триортогональных координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3 :

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} &= \kappa_{13} du_{\langle 2 \rangle} + \kappa_{12} du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} &= \kappa_{23} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{21} du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} &= \kappa_{32} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{31} du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} &= -\kappa_{13} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{23} du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} &= -\kappa_{12} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} &= -\kappa_{21} du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь ни $d\varepsilon_{\langle ij \rangle}$, ни $du_{\langle j \rangle}$ действительными приращениями не являются; $d\varepsilon_{\langle ij \rangle}$ — физические компоненты тензора $d\varepsilon$ в изостатической системе координат:

$$\begin{aligned}
d\varepsilon &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_{\langle 21 \rangle} + \\
& + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_{\langle 31 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_{\langle 32 \rangle}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Уравнения (4.14) можно преобразовать, используя величины γ_{ij} (γ_{ij} — геодезическая кривизна изостатической траектории с номером i на поверхности, ортогональной главному направлению с номером j), лишь знаком отличающиеся от κ_{ij} ¹². В итоге получаем

¹¹Напомним, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{23}, & \mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{32}, \\
\mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{13}, & \mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}] &= -\kappa_{31}, \\
\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}] &= -\kappa_{12}, & \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}] &= -\kappa_{21}.
\end{aligned}$$

¹²Если имеется некоторая кривая на поверхности, параметризованная натуральным параметром s , \mathbf{t} — единичный вектор, направленный по касательной к кривой в сторону возрастающих значений параметра s , \mathbf{t}^* — единичный вектор, расположенный в касательной плоскости ортогонально вектору \mathbf{t} , \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности так, чтобы векторы \mathbf{t} , \mathbf{t}^* , \mathbf{n} образовывали правую тройку, то мы определяем

$$\kappa_n = -\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{n}, \quad \kappa_g = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{t}^*$$

соответственно как нормальную кривизну (кривизна проекции рассматриваемой кривой на плоскость, определяемую векторами \mathbf{t} , \mathbf{n}) и геодезическую кривизну (кривизна проекции рассматриваемой кривой на касательную плоскость, определяемую векто-



$$\begin{aligned}
d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} &= -\gamma_{13} du_{\langle 2 \rangle} - \gamma_{12} du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} &= -\gamma_{23} du_{\langle 1 \rangle} - \gamma_{21} du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} &= -\gamma_{32} du_{\langle 1 \rangle} - \gamma_{31} du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} &= \gamma_{13} du_{\langle 1 \rangle} + \gamma_{23} du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} &= \gamma_{12} du_{\langle 1 \rangle} + \gamma_{32} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle}, \\
d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} &= \gamma_{21} du_{\langle 2 \rangle} + \gamma_{31} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

5. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРИОРТОГОНАЛЬНЫХ ИЗОСТАТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В приближении жесткопластического анализа имеем $d\varepsilon = d\varepsilon^P$. Ассоциированный закон течения, как известно, устанавливает соосность тензора напряжений σ и тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$. При использовании критерия текучести Треска следует различать течение на грани (в этом случае уникальный триэдр $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ будет однозначно указывать также и главные оси тензора $d\varepsilon^P$) и течение на ребре, когда равны два главных напряжения $\sigma_1 = \sigma_2$. В случае течения на ребре равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , является главным. При соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска сохраняется неопределенность в ориентации собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}) и они уже, вообще говоря, могут и не быть собственными векторами тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$.

Рассмотрим по отдельности каждый из двух указанных случаев.

1. Течение на грани призмы Кулона – Треска. Триэдр $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ есть также и триэдр главных направлений тензора $d\varepsilon$. Полученная в предыдущем параграфе формула для $d\varepsilon$ приводит к шести соотношениям:

$$d\varepsilon_1^P = \frac{1}{h_1}(d_2 h_1) du_{\langle 2 \rangle} + \frac{1}{h_1}(d_3 h_1) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \tag{5.1}$$

$$d\varepsilon_2^P = \frac{1}{h_2}(d_1 h_2) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_2}(d_3 h_2) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \tag{5.2}$$

$$d\varepsilon_3^P = \frac{1}{h_3}(d_1 h_3) du_{\langle 1 \rangle} + \frac{1}{h_3}(d_2 h_3) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \tag{5.3}$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_2 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_2}(d_1 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} = 0, \tag{5.4}$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_3 h_1) du_{\langle 1 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_1 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} = 0, \tag{5.5}$$

$$-\frac{1}{h_2}(d_3 h_2) du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} - \frac{1}{h_3}(d_2 h_3) du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} = 0. \tag{5.6}$$

Вводя кривизны в соотношения (5.1)–(5.6) согласно (4.13), получим (см. также (4.14))

$$d\varepsilon_1^P = \kappa_{13} du_{\langle 2 \rangle} + \kappa_{12} du_{\langle 3 \rangle} + d_1 du_{\langle 1 \rangle}, \tag{5.7}$$

$$d\varepsilon_2^P = \kappa_{23} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{21} du_{\langle 3 \rangle} + d_2 du_{\langle 2 \rangle}, \tag{5.8}$$

$$d\varepsilon_3^P = \kappa_{32} du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{31} du_{\langle 2 \rangle} + d_3 du_{\langle 3 \rangle}, \tag{5.9}$$

$$-\kappa_{13} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{23} du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 2 \rangle} = 0, \tag{5.10}$$

$$-\kappa_{12} du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 1 \rangle} + d_1 du_{\langle 3 \rangle} = 0, \tag{5.11}$$

$$-\kappa_{21} du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31} du_{\langle 3 \rangle} + d_3 du_{\langle 2 \rangle} + d_2 du_{\langle 3 \rangle} = 0. \tag{5.12}$$

рами \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) кривой на поверхности. В данном выше определении следует особо обратить внимание на знаки. Именно поэтому в применяемой нами терминологии γ_{ij} – геодезическая кривизна изостатической траектории с номером i на поверхности, ортогональной главному направлению с номером j .



Эти соотношения компактно представляются в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \\ d\varepsilon_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_{13} & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & d_2 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & \kappa_{31} & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_{13} + d_2 & -\kappa_{23} + d_1 & 0 \\ -\kappa_{12} + d_3 & 0 & -\kappa_{32} + d_1 \\ 0 & -\kappa_{21} + d_3 & -\kappa_{31} + d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.14)$$

Второе из матричных соотношений выражает соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

Как отмечалось выше (см. параграф ??), в случае пространственного течения на грани призмы Кулона – Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ ассоциированный закон течения устанавливает жесткую (без неопределенности, характерной для ребра призмы Треска) соосность тензоров $d\varepsilon^P$ и σ и еще следующие соотношения для главных значений тензора приращений пластических деформаций:

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda, \quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда сразу же следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Следовательно, для анализа кинематики пространственного течения на грани призмы Кулона – Треска достаточно воспользоваться полученными только что матричными уравнениями (5.13), (5.14), положив в них $d\varepsilon_3^P = 0$ и $d\varepsilon_1^P = -d\varepsilon_2^P$. В результате находим следующие уравнения, выражающие в изостатической координатной системе кинематическое ограничение $d\varepsilon_3^P = 0$, условие несжимаемости и условие соосности:

$$\kappa_{32}du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{31}du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} = 0; \quad (5.15)$$

$$d_1du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} + \kappa_{23}du_{\langle 1 \rangle} + \kappa_{13}du_{\langle 2 \rangle} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})du_{\langle 3 \rangle} = 0; \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} d_2du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{13}du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{23}du_{\langle 2 \rangle} &= 0, \\ d_3du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} - \kappa_{12}du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32}du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ d_3du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} - \kappa_{21}du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31}du_{\langle 3 \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Нетрудно видеть, что если напряженное состояние соответствует грани призмы Кулона – Треска и уже определено, то изостатическую координатную сетку (если таковая существует) можно считать известной. Но в таком случае *три* неизвестных величины $du_{\langle j \rangle}$ должны удовлетворять *пяти* уравнениям (5.15), (5.16), (5.17)¹³. Ниже мы увидим, что подобной проблемы не возникает, например, в случае плоского деформированного состояния, поскольку тогда соотношение (5.15) и два из трех соотношений (5.17) удовлетворяются тождественно.

2. Течение на ребре призмы Кулона – Треска. Триэдр **l**, **m**, **n**, вообще говоря, не будет триэдром главных направлений тензора $d\varepsilon$. Из ассоциированного закона течения можно вывести условие несжимаемости и лишь тот факт, что **n** есть собственный вектор тензора $d\varepsilon$, т.е. соотношения

$$d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d\varepsilon_3 = 0; \quad d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} = 0, \quad d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} = 0.$$

Полученная выше формула для $d\varepsilon$ позволяет представить приведенные выше соотношения в следующем виде:

$$d_1du_{\langle 1 \rangle} + d_2du_{\langle 2 \rangle} + d_3du_{\langle 3 \rangle} + (\kappa_{23} + \kappa_{32})du_{\langle 1 \rangle} + (\kappa_{13} + \kappa_{31})du_{\langle 2 \rangle} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})du_{\langle 3 \rangle} = 0; \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} d_3du_{\langle 1 \rangle} + d_1du_{\langle 3 \rangle} - \kappa_{12}du_{\langle 1 \rangle} - \kappa_{32}du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ d_3du_{\langle 2 \rangle} + d_2du_{\langle 3 \rangle} - \kappa_{21}du_{\langle 2 \rangle} - \kappa_{31}du_{\langle 3 \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

¹³Т.е. на приращения перемещений $du_{\langle j \rangle}$ в триортогональной изостатической координатной сетке в случае пространственного пластического течения на грани призмы Кулона – Треска имеется слишком много ограничивающих соотношений. Поэтому, если в действительности реализуется течение на грани, то некоторые из приведенных соотношений (5.15), (5.16), (5.17) должны удовлетворяться тождественно, либо следовать из остальных соотношений.



Таким образом, в случае течения на ребре призмы Кулона – Треска *три* неизвестных величины $du_{\langle j \rangle}$ должны удовлетворять *трем* уравнениям (5.18), (5.19), т.е. задача расчета приращений перемещений по известному напряженному состоянию является правильно определенной.

Заметим, что уравнение несжимаемости (5.18) приобретает форму

$$\begin{pmatrix} d_1 + H_{(1)} \\ d_2 + H_{(2)} \\ d_3 + H_{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0, \quad (5.20)$$

если ввести средние кривизны $H_{(j)}$ координатных поверхностей $\xi^j = \text{const}$, учитывая, что

$$\begin{aligned} 2H_{(1)} &= \kappa_{32} + \kappa_{23}, \\ 2H_{(2)} &= \kappa_{13} + \kappa_{31}, \\ 2H_{(3)} &= \kappa_{12} + \kappa_{21}. \end{aligned}$$

Докажем, что система, состоящая из уравнений (5.18), (5.19), гиперболична и определим ее характеристические направления. Обозначим через $N_{\langle j \rangle}$ физические компоненты вектора \mathbf{N} единичной нормали к характеристическому элементу относительно пространственного базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} N_{\langle 1 \rangle} & N_{\langle 2 \rangle} & N_{\langle 3 \rangle} \\ N_{\langle 3 \rangle} & 0 & N_{\langle 1 \rangle} \\ 0 & N_{\langle 3 \rangle} & N_{\langle 2 \rangle} \end{vmatrix} = 0$$

или с учетом $N_{\langle 1 \rangle}^2 + N_{\langle 2 \rangle}^2 + N_{\langle 3 \rangle}^2 = 1$

$$N_{\langle 3 \rangle}(2N_{\langle 3 \rangle}^2 - 1) = 0$$

имеет три различных действительных корня

$$N_{\langle 3 \rangle} = 0, \quad N_{\langle 3 \rangle} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

что указывает на гиперболичность системы уравнений (5.18), (5.19). Конус нормалей к характеристическим поверхностным элементам для системы кинематических уравнений пространственной задачи математической теории пластичности (в случае течения на ребре призмы Треска) тот же самый, что и для системы уравнений равновесия.

6. УРАВНЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ ПРИРАЩЕНИЙ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРИОРТОГОНАЛЬНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СЕТКЕ ИЗОСТАТ

Уравнения совместности деформаций наряду с соотношениями Коши, связывающими приращение вектора перемещений с приращением тензора полных деформаций, являются фундаментальными уравнениями механики деформируемого твердого тела. Их также можно применять для анализа кинематики идеально пластического течения. Сформулируем, следуя [3], уравнения совместности приращений малых деформаций в триортогональной криволинейной сетке линий главных напряжений ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

Уравнение совместности малых деформаций в приращениях, как известно, имеет вид

$$-d\mathbf{S} = \nabla \times d\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

где тензор второго ранга $d\mathbf{P}$ есть транспонированный вихрь тензора приращений полных деформаций

$$d\mathbf{P} = (\nabla \times d\boldsymbol{\varepsilon})^T. \quad (6.2)$$

Тензор несовместности $d\mathbf{S}$ симметричен:

$$d\mathbf{S} = (d\mathbf{S})^T. \quad (6.3)$$



Тензор $d\mathbf{P}$ антисимметричен, поскольку:

$$(\nabla \times d\boldsymbol{\varepsilon})^T = -(d\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla). \quad (6.4)$$

Физические компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ относительно триортогональной криволинейной сетки линий главных напряжений ξ^1, ξ^2, ξ^3 вычисляются в форме [8]:

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{h_2} \left[\frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 32 \rangle})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 33 \rangle})}{\partial \xi^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} + \frac{d\varepsilon_{\langle 23 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 22 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \right\} - \\ & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \frac{1}{h_3} \left[\frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 22 \rangle})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 23 \rangle})}{\partial \xi^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{d\varepsilon_{\langle 32 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \frac{d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} - \frac{d\varepsilon_{\langle 33 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \right\} + \\ & + \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 21 \rangle})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 22 \rangle})}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 31 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} + \frac{d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \right] - \\ & - \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 33 \rangle})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 31 \rangle})}{\partial \xi^3} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 21 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} + \frac{d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \right], \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} dS_{\langle 12 \rangle} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{h_1} \left[\frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 33 \rangle})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 31 \rangle})}{\partial \xi^3} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{d\varepsilon_{\langle 21 \rangle}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \frac{d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} - \frac{d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \right\} - \\ & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 23 \rangle})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 21 \rangle})}{\partial \xi^3} \right] + \frac{d\varepsilon_{\langle 31 \rangle}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \frac{d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \right\} + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 23 \rangle})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial (h_3 d\varepsilon_{\langle 33 \rangle})}{\partial \xi^2} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} + \frac{d\varepsilon_{\langle 23 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 22 \rangle}}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \right] + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \left[\frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 21 \rangle})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 22 \rangle})}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 31 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} + \frac{d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \left[\frac{\partial (h_1 d\varepsilon_{\langle 31 \rangle})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (h_2 d\varepsilon_{\langle 32 \rangle})}{\partial \xi^1} \right] + \\ & + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \left[\frac{d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} - \frac{d\varepsilon_{\langle 21 \rangle}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \right], \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $h_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ (по α не суммировать) – параметры Ламе; $dS_{\langle ij \rangle}$ – физические компоненты тензора $d\mathbf{S}$ в изостатической системе координат,

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} dS_{\langle 11 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} dS_{\langle 12 \rangle} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} dS_{\langle 13 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} dS_{\langle 22 \rangle} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} dS_{\langle 21 \rangle} + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} dS_{\langle 23 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} dS_{\langle 31 \rangle} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} dS_{\langle 32 \rangle}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}, dS_{\langle 33 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.5). Компоненты $dS_{\langle 23 \rangle}, dS_{\langle 31 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.6). Здесь представляется уместным еще раз упомянуть о том, что ни $dS_{\langle ij \rangle}$, ни $d\varepsilon_{\langle ij \rangle}$ не являются действительными приращениями величин, находящихся под знаком дифференциала.

Заметим также, что формулы (6.5), (6.6) справедливы для любой триортогональной координатной системы, хотя в дальнейшем нас будет интересовать лишь изостатическая координатная сетка.

В декартовой системе координат компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ вычисляются по следующим формулам:

$$dS_{lp} = e_{nr} e_{mkp} \partial_n \partial_k d\varepsilon_{rm},$$



где e_{nrl} — кососимметричные символы, или

$$\begin{aligned} -dS_{33} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 d\varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ -dS_{11} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 d\varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ -dS_{22} &= \frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 d\varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \\ -dS_{23} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ -dS_{31} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right), \\ -dS_{12} &= -\frac{\partial^2 d\varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial d\varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial d\varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial d\varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

Это известные формулы Сен-Венана, широко применяемые в механике деформируемого твердого тела. Их часто называют условиями сплошности. Сами уравнения были опубликованы в 1864 г. Сен-Венаном в издании одной книги Навье.

Компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ в декартовой системе координат могут быть найдены также в виде

$$-dS_{il} = (\partial_j \partial_j d\varepsilon_{kk} - \partial_j \partial_k d\varepsilon_{jk}) \delta_{il} + \partial_i \partial_k d\varepsilon_{lk} + \partial_l \partial_k d\varepsilon_{ki} - \partial_j \partial_j d\varepsilon_{li} - \partial_i \partial_l d\varepsilon_{kk}.$$

Сделаем ряд существенных замечаний, касающихся числа независимых уравнений совместности малых деформаций¹⁴. Обычно считается, что независимых уравнений совместности должно быть шесть (так как тензор $-d\mathbf{S} = \nabla \times d\mathbf{P}$ симметричен). И это неверное утверждение воспроизводится во всех руководствах по механике деформируемого твердого тела. На самом деле ситуация несколько сложнее. Действительно, тензор $d\mathbf{S}$ удовлетворяет, как это следует из его определения, уравнению¹⁵

$$\nabla \cdot (d\mathbf{S}) = \mathbf{0}. \quad (6.8)$$

Следовательно, независимых условий должно быть всего три. Используя приведенные выше выражения для компонент тензора $d\mathbf{S}$ в декартовой системе координат, прямым подсчетом можно показать, что векторное уравнение (6.8) эквивалентно трем скалярным:

$$\begin{aligned} \partial_1(dS_{11}) + \partial_2(dS_{12}) + \partial_3(dS_{31}) &= 0, \\ \partial_1(dS_{12}) + \partial_2(dS_{22}) + \partial_3(dS_{23}) &= 0, \\ \partial_1(dS_{31}) + \partial_2(dS_{23}) + \partial_3(dS_{33}) &= 0. \end{aligned}$$

На первый взгляд может показаться, что три независимых условия в декартовой системе координат могут составить либо три уравнения $dS_{11} = 0$, $dS_{22} = 0$, $dS_{33} = 0$, либо три уравнения $dS_{23} = 0$, $dS_{31} = 0$, $dS_{12} = 0$. Однако ни три условия первой группы, ни три условия второй группы по отдельности использовать нельзя [9]. Известно [10], что если три условия первой группы удовлетворяются внутри некоторой односвязной области, а вторая тройка условий — на границе этой области, то все три условия второй группы будут удовлетворяться внутри области. Аналогичное утверждение будет справедливо, если поменять группы условий местами.

Опираясь на формулы (6.5), (6.6), запишем уравнение совместности для приращений пластических деформаций в изостатической сетке. Мы будем (как принято всюду в настоящей работе) пренебрегать упругими деформациями: $d\varepsilon = d\varepsilon^P$.

¹⁴Хотя условия совместности деформаций были известны уже Сен-Венану, в настоящее время нет полной ясности в вопросе о числе независимых условий совместности.

¹⁵Приводимое ниже уравнение в тензорном анализе традиционно называется тождеством Бианки (L. Bianchi) (см.: Схуттен А.Я. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. С. 146, 147).



Поскольку в силу ассоциированного закона течения тензоры σ и $d\varepsilon^P$ соосны, то в сетке изостат матрица тензора $d\varepsilon^P$ диагональна

$$\left\| \begin{array}{ccc} d\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & d\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_3 \end{array} \right\|,$$

т.е.

$$d\varepsilon = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}d\varepsilon_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}d\varepsilon_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}d\varepsilon_3,$$

и в физических компонентах имеем

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & -d_2d_2d\varepsilon_3 - d_3d_3d\varepsilon_2 + (\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2)(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + d_3(\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)) - \\ & - d_2(\kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)) - \kappa_{23}\kappa_{32}(d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\ & - \kappa_{31}d_2d\varepsilon_3 - \kappa_{21}d_3d\varepsilon_2 - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{23}d_1d\varepsilon_3, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} dS_{\langle 12 \rangle} = & d_2d_1d\varepsilon_3 + d_2[\kappa_{32}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)] + \kappa_{31}d_1(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) - \\ & \kappa_{23}d_2d\varepsilon_3 + \kappa_{31}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)(\kappa_{32} - \kappa_{23}), \end{aligned} \quad (6.10)$$

где, как и ранее, компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}$, $dS_{\langle 33 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.9), а компоненты $dS_{\langle 23 \rangle}$, $dS_{\langle 31 \rangle}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.10).

Для ясного понимания условий применимости полученных выше выражений для физических компонент тензора несовместности еще раз повторим следующее. Ассоциированный закон течения устанавливает соосность тензора напряжений σ и тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$. При использовании критерия текучести Треска следует различать течение на грани (в этом случае уникальный триэдр \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} будет однозначно указывать также и главные оси тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$) и течение на ребре, когда равны два главных напряжения $\sigma_1 = \sigma_2$. В случае течения на ребре равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , является главным. Поэтому при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона – Треска есть известная доля произвола при выборе собственных векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n}). Следовательно, векторы \mathbf{l} и \mathbf{m} уже могут и не быть собственными векторами тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon^P$. Следовательно, возможно существование триортогональной сетки линий главных напряжений с локальным триэдром \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} , таким, что векторы \mathbf{l} и \mathbf{m} не являются собственными для тензора $d\varepsilon^P$, но тогда формулы (6.9), (6.10) подлежат модификации с целью учета недиагональности матрицы тензора $d\varepsilon = d\varepsilon^P$ в базисе \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} :

$$\left\| \begin{array}{ccc} d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} & d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} & 0 \\ d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} & d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_3 \end{array} \right\|.$$

Подобного рода модификация без труда осуществляется с помощью полученных выше формул для физических компонент тензора несовместности (6.5), (6.6)¹⁶.

Сначала несколько упростим запись формул для физических компонент тензора несовместности (см. (6.5), (6.6))

$$\begin{aligned} dS_{\langle 11 \rangle} = & 2\kappa_{23}\kappa_{32}d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\ & + [\kappa_{31}^2 - \kappa_{21}^2 - \kappa_{32}\kappa_{23} + (d_2\kappa_{31}) - (d_3\kappa_{21}) + \kappa_{31}d_2 - \kappa_{32}d_1 - 2\kappa_{21}d_3 - d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\ & + [\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 - \kappa_{32}\kappa_{23} + (d_3\kappa_{21}) - (d_2\kappa_{31}) + \kappa_{21}d_3 - \kappa_{23}d_1 - 2\kappa_{31}d_2 - d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\ & + [\kappa_{31}\kappa_{32} + \kappa_{23}\kappa_{31} + 2\kappa_{32}\kappa_{13} + (d_2\kappa_{32}) + 2\kappa_{32}d_2]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \\ & + [\kappa_{21}\kappa_{23} + \kappa_{32}\kappa_{21} + 2\kappa_{23}\kappa_{12} + (d_3\kappa_{23}) + 2\kappa_{23}d_3]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \\ & + [4\kappa_{31}\kappa_{21} + \kappa_{21}\kappa_{23} + 2(d_2\kappa_{21}) + (d_2\kappa_{31}) + (d_3\kappa_{31}) + \\ & + 3\kappa_{21}d_2 + 2\kappa_{31}d_3 + \kappa_{31}d_2 + d_2d_3 + d_3d_2]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle}, \end{aligned}$$

¹⁶Она не требуется в плоском и осесимметричном случаях.



$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 22 \rangle} = & 2\kappa_{31}\kappa_{13}d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}^2 - \kappa_{32}^2 - \kappa_{13}\kappa_{31} + (d_3\kappa_{12}) - (d_1\kappa_{32}) + \kappa_{12}d_3 - \kappa_{13}d_2 - 2\kappa_{32}d_1 - d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2 - \kappa_{13}\kappa_{31} + (d_1\kappa_{32}) - (d_3\kappa_{12}) + \kappa_{32}d_1 - \kappa_{31}d_2 - 2\kappa_{12}d_3 - d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}\kappa_{13} + \kappa_{31}\kappa_{12} + 2\kappa_{13}\kappa_{21} + (d_3\kappa_{13}) + 2\kappa_{13}d_3]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}\kappa_{31} + \kappa_{13}\kappa_{32} + 2\kappa_{31}\kappa_{23} + (d_1\kappa_{31}) + 2\kappa_{31}d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \\
 & + [4\kappa_{12}\kappa_{32} + \kappa_{32}\kappa_{31} + 2(d_3\kappa_{32}) + (d_3\kappa_{12}) + (d_1\kappa_{12}) + \\
 & + 3\kappa_{32}d_3 + 2\kappa_{12}d_1 + \kappa_{12}d_3 + d_3d_1 + d_1d_3]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 33 \rangle} = & 2\kappa_{12}\kappa_{21}d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}^2 - \kappa_{13}^2 - \kappa_{21}\kappa_{12} + (d_1\kappa_{23}) - (d_2\kappa_{13}) + \kappa_{23}d_1 - \kappa_{21}d_3 - 2\kappa_{13}d_2 - d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}^2 - \kappa_{23}^2 - \kappa_{21}\kappa_{12} + (d_2\kappa_{13}) - (d_1\kappa_{23}) + \kappa_{13}d_3 - \kappa_{12}d_3 - 2\kappa_{23}d_1 - d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}\kappa_{21} + \kappa_{12}\kappa_{23} + 2\kappa_{21}\kappa_{32} + (d_1\kappa_{21}) + 2\kappa_{21}d_1]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}\kappa_{12} + \kappa_{21}\kappa_{13} + 2\kappa_{12}\kappa_{31} + (d_2\kappa_{12}) + 2\kappa_{12}d_2]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \\
 & + [4\kappa_{23}\kappa_{13} + \kappa_{13}\kappa_{12} + 2(d_1\kappa_{13}) + (d_1\kappa_{23}) + (d_2\kappa_{23}) + \\
 & + 3\kappa_{13}d_1 + 2\kappa_{23}d_2 + \kappa_{23}d_1 + d_1d_2 + d_2d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 12 \rangle} = & -\kappa_{31}d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + [\kappa_{31}(\kappa_{23} - \kappa_{32}) - (d_2\kappa_{32}) - \kappa_{32}d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{31}(\kappa_{32} - \kappa_{23}) + (d_2\kappa_{32}) + \kappa_{31}d_1 + (\kappa_{32} - \kappa_{23})d_2 + d_2d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}\kappa_{32} + 2\kappa_{31}\kappa_{13} + 2\kappa_{21}\kappa_{12} - \kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 + (d_3\kappa_{12}) - (d_2\kappa_{31}) + \kappa_{21}d_3 + \\
 & + \kappa_{12}d_3 + d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{21}(\kappa_{31} + \kappa_{13}) - 2\kappa_{31}\kappa_{12} + \kappa_{21}d_2 - \kappa_{31}d_3 - 2(d_2\kappa_{12}) - 2\kappa_{12}d_2 - d_2d_3]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{21}(\kappa_{23} + \kappa_{32}) - (d_3\kappa_{32}) + (\kappa_{23} - \kappa_{32})d_3 - 2\kappa_{21}d_1 - d_3d_1]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 13 \rangle} = & -\kappa_{23}d_3d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + [\kappa_{23}(\kappa_{12} - \kappa_{21}) - (d_1\kappa_{21}) - \kappa_{21}d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) + (d_1\kappa_{21}) + \kappa_{23}d_3 + (\kappa_{21} - \kappa_{12})d_1 + d_1d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}\kappa_{21} + 2\kappa_{23}\kappa_{32} + 2\kappa_{13}\kappa_{31} - \kappa_{13}^2 - \kappa_{23}^2 + (d_2\kappa_{31}) - (d_1\kappa_{23}) + \kappa_{13}d_2 + \\
 & + \kappa_{31}d_2 + d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}(\kappa_{23} + \kappa_{32}) - 2\kappa_{23}\kappa_{31} + \kappa_{13}d_1 - \kappa_{23}d_2 - 2(d_1\kappa_{31}) - 2\kappa_{31}d_1 - d_1d_2]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}(\kappa_{12} + \kappa_{21}) - (d_3\kappa_{21}) + (\kappa_{12} - \kappa_{21})d_2 - 2\kappa_{13}d_3 - d_2d_3]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 23 \rangle} = & -\kappa_{12}d_2d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + [\kappa_{12}(\kappa_{31} - \kappa_{13}) - (d_3\kappa_{13}) - \kappa_{13}d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}(\kappa_{13} - \kappa_{31}) + (d_3\kappa_{13}) + \kappa_{12}d_2 + (\kappa_{13} - \kappa_{31})d_3 + d_3d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{31}\kappa_{13} + 2\kappa_{12}\kappa_{21} + 2\kappa_{32}\kappa_{23} - \kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2 + (d_1\kappa_{23}) - (d_3\kappa_{12}) + \kappa_{32}d_1 + \\
 & + \kappa_{23}d_1 + d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}(\kappa_{12} + \kappa_{21}) - 2\kappa_{12}\kappa_{23} + \kappa_{31}d_3 - \kappa_{12}d_1 - 2(d_3\kappa_{23}) - 2\kappa_{23}d_3 - d_3d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}(\kappa_{31} + \kappa_{13}) - (d_1\kappa_{13}) + (\kappa_{31} - \kappa_{13})d_1 - 2\kappa_{32}d_2 - d_1d_2]d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}.
 \end{aligned}$$

Затем положим в них $d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} = 0$, $d\varepsilon_{\langle 23 \rangle} = 0$. В результате приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 11 \rangle} = & 2\kappa_{23}\kappa_{32}d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{31}^2 - \kappa_{21}^2 - \kappa_{32}\kappa_{23} + (d_2\kappa_{31}) - (d_3\kappa_{21}) + \kappa_{31}d_2 - \kappa_{32}d_1 - 2\kappa_{21}d_3 - d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 - \kappa_{32}\kappa_{23} + (d_3\kappa_{21}) - (d_2\kappa_{31}) + \kappa_{21}d_3 - \kappa_{23}d_1 - 2\kappa_{31}d_2 - d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{31}\kappa_{32} + \kappa_{23}\kappa_{31} + 2\kappa_{32}\kappa_{13} + (d_2\kappa_{32}) + 2\kappa_{32}d_2]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 22 \rangle} = & 2\kappa_{31}\kappa_{13}d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{12}^2 - \kappa_{32}^2 - \kappa_{13}\kappa_{31} + (d_3\kappa_{12}) - (d_1\kappa_{32}) + \kappa_{12}d_3 - \kappa_{13}d_2 - 2\kappa_{32}d_1 - d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2 - \kappa_{13}\kappa_{31} + (d_1\kappa_{32}) - (d_3\kappa_{12}) + \kappa_{32}d_1 - \kappa_{31}d_2 - 2\kappa_{12}d_3 - d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{32}\kappa_{31} + \kappa_{13}\kappa_{32} + 2\kappa_{31}\kappa_{23} + (d_1\kappa_{31}) + 2\kappa_{31}d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 33 \rangle} = & 2\kappa_{12}\kappa_{21}d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{23}^2 - \kappa_{13}^2 - \kappa_{21}\kappa_{12} + (d_1\kappa_{23}) - (d_2\kappa_{13}) + \kappa_{23}d_1 - \kappa_{21}d_3 - 2\kappa_{13}d_2 - d_2d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
 & + [\kappa_{13}^2 - \kappa_{23}^2 - \kappa_{21}\kappa_{12} + (d_2\kappa_{13}) - (d_1\kappa_{23}) + \kappa_{13}d_3 - \kappa_{12}d_3 - 2\kappa_{23}d_1 - d_1d_1]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
 & + [4\kappa_{23}\kappa_{13} + \kappa_{13}\kappa_{12} + 2(d_1\kappa_{13}) + (d_1\kappa_{23}) + (d_2\kappa_{23}) + \\
 & + 3\kappa_{13}d_1 + 2\kappa_{23}d_2 + \kappa_{23}d_1 + d_1d_2 + d_2d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
dS_{\langle 12 \rangle} = & -\kappa_{31}d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + [\kappa_{31}(\kappa_{23} - \kappa_{32}) - (d_2\kappa_{32}) - \kappa_{32}d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
& + [\kappa_{31}(\kappa_{32} - \kappa_{23}) + (d_2\kappa_{32}) + \kappa_{31}d_1 + (\kappa_{32} - \kappa_{23})d_2 + d_2d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
& + [\kappa_{23}\kappa_{32} + 2\kappa_{31}\kappa_{13} + 2\kappa_{21}\kappa_{12} - \kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2 + (d_3\kappa_{12}) - (d_2\kappa_{31}) + \kappa_{21}d_3 + \\
& + \kappa_{12}d_3 + d_3d_3]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}, \tag{6.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 13 \rangle} = & -\kappa_{23}d_3d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + [\kappa_{23}(\kappa_{12} - \kappa_{21}) - (d_1\kappa_{21}) - \kappa_{21}d_1]d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + \\
& + [\kappa_{23}(\kappa_{21} - \kappa_{12}) + (d_1\kappa_{21}) + \kappa_{23}d_3 + (\kappa_{21} - \kappa_{12})d_1 + d_1d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
& + [\kappa_{13}(\kappa_{12} + \kappa_{21}) - (d_3\kappa_{21}) + (\kappa_{12} - \kappa_{21})d_2 - 2\kappa_{13}d_3 - d_2d_3]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 23 \rangle} = & -\kappa_{12}d_2d\varepsilon_{\langle 33 \rangle} + [\kappa_{12}(\kappa_{31} - \kappa_{13}) - (d_3\kappa_{13}) - \kappa_{13}d_3]d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \\
& + [\kappa_{12}(\kappa_{13} - \kappa_{31}) + (d_3\kappa_{13}) + \kappa_{12}d_2 + (\kappa_{13} - \kappa_{31})d_3 + d_3d_2]d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \\
& + [\kappa_{32}(\kappa_{12} + \kappa_{21}) - 2\kappa_{12}\kappa_{23} + \kappa_{31}d_3 - \kappa_{12}d_1 - 2(d_3\kappa_{23}) - 2\kappa_{23}d_3 - d_3d_1]d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}.
\end{aligned}$$

Приведенные выражения должны использоваться, когда пластическое течение происходит на ребре призмы Кулона – Треска. Компоненты $dS_{\langle 22 \rangle}$, $dS_{\langle 33 \rangle}$ *нельзя* получить циклической перестановкой индексов в уравнении (6.11). То же самое относится к компонентам $dS_{\langle 23 \rangle}$, $dS_{\langle 31 \rangle}$ и уравнению (6.12). Вывод этих уравнений следует осуществлять, как это было сделано, исходя непосредственно из формул (6.5), (6.6) для физических компонент тензора несовместности.

В качестве примера применения уравнений совместности деформаций выясним аналитическую классификацию и найдем характеристики пространственных кинематических уравнений в случае течения на ребре призмы Кулона – Треска $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$. Для этого выпишем главные части уравнений совместности деформаций

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_2d_2d\varepsilon_3 - d_3d_3d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_1d_1d\varepsilon_3 - d_3d_3d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_2d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_1d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + (d_1d_2 + d_2d_1)d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 12 \rangle} &= d_2d_1d\varepsilon_3 + d_3d_3d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 23 \rangle} &= d_3d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_3d_1d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 13 \rangle} &= d_1d_3d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} - d_2d_3d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0.
\end{aligned}$$

Пользуясь соотношением несжимаемости

$$d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d\varepsilon_3 = 0,$$

устраним из полученной системы уравнений $d\varepsilon_3$. В результате приходим к системе

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 11 \rangle} &= d_2d_2d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} - d_3d_3d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d_2d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 22 \rangle} &= d_1d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d_1d_1d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_3d_3d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_2d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_1d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + (d_1d_2 + d_2d_1)d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0,
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
dS_{\langle 12 \rangle} &= -d_2d_1d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_2d_1d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} + d_3d_3d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 23 \rangle} &= d_3d_2d\varepsilon_{\langle 11 \rangle} - d_3d_1d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0, \\
dS_{\langle 13 \rangle} &= d_1d_3d\varepsilon_{\langle 22 \rangle} - d_2d_3d\varepsilon_{\langle 12 \rangle} + \dots = 0.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Только три из этих уравнений независимы, причем а priori неизвестно какие. Однако соображения симметрии позволяют быстро обнаружить нужные уравнения. Искомые уравнения есть $dS_{\langle 12 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$, т.е. выбираются такие уравнения, чтобы индексы у компонент тензора несовместности $d\mathbf{S}$ не включали номер 3. Эти уравнения следует рассматривать как систему уравнений в частных производных относительно $d\varepsilon_{\langle 11 \rangle}$, $d\varepsilon_{\langle 22 \rangle}$, $d\varepsilon_{\langle 12 \rangle}$.

Найдем характеристики построенной системы. Составляя характеристический определитель, приходим к характеристическому уравнению ($N_{\langle j \rangle}$ – физические компоненты единичного вектора нормали к характеристике относительно ортонормированного базиса собственных векторов тензора напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n}):

$$\begin{vmatrix} -N_{\langle 2 \rangle}N_{\langle 1 \rangle} & -N_{\langle 2 \rangle}N_{\langle 1 \rangle} & N_{\langle 3 \rangle}^2 \\ N_{\langle 2 \rangle}^2 & N_{\langle 2 \rangle}^2 - N_{\langle 3 \rangle}^2 & 0 \\ N_{\langle 1 \rangle}^2 - N_{\langle 3 \rangle}^2 & N_{\langle 1 \rangle}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{6.15}$$



или

$$N_{<3>}^4(N_{<1>}^2 + N_{<2>}^2 - N_{<3>}^2) = 0.$$

Учитывая условие нормировки

$$N_{<1>}^2 + N_{<2>}^2 + N_{<3>}^2 = 1,$$

преобразуем характеристическое уравнение к виду

$$N_{<3>}^4(1 - 2N_{<3>}^2) = 0,$$

откуда сразу же становится ясно, что оно имеет три различных вещественных корня:

$$N_{<3>} = 0, \quad N_{<3>} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

причем кратность нулевого корня равна четырем, т.е. система дифференциальных уравнений в частных производных

$$dS_{<12>} = 0, \quad dS_{<11>} = 0, \quad dS_{<22>} = 0 \quad (6.16)$$

гиперболична, а ее характеристики идентичны характеристикам поля напряжений¹⁷.

Выясним, зависимы ли остальные уравнения совместности для приращений деформаций

$$dS_{<33>} = 0, \quad dS_{<13>} = 0, \quad dS_{<23>} = 0 \quad (6.17)$$

от трех уравнений совместности (6.16). Для этого рассмотрим тождество Бианки для тензора несовместности $d\mathbf{S}$. В изостатической координатной сетке оно представляется в форме

$$\begin{aligned} d_1 dS_{<11>} + \kappa_{23}(dS_{<11>} - dS_{<22>}) + \kappa_{32}(dS_{<11>} - dS_{<33>}) + \\ + (2\kappa_{13} + \kappa_{31} + d_2)dS_{<12>} + (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)dS_{<13>} = 0, \\ d_2 dS_{<22>} + \kappa_{31}(dS_{<22>} - dS_{<33>}) + \kappa_{13}(dS_{<22>} - dS_{<11>}) + \\ + (2\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1)dS_{<21>} + (2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3)dS_{<23>} = 0, \\ d_3 dS_{<33>} + \kappa_{12}(dS_{<33>} - dS_{<11>}) + \kappa_{21}(dS_{<33>} - dS_{<22>}) + \\ + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1)dS_{<31>} + (2\kappa_{31} + \kappa_{13} + d_2)dS_{<32>} = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Учитывая (6.16), уравнения (6.18) приводим к виду

$$\begin{aligned} (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)dS_{<13>} - \kappa_{32}dS_{<33>} = 0, \\ (2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3)dS_{<23>} - \kappa_{31}dS_{<33>} = 0, \\ d_3 dS_{<33>} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})dS_{<33>} + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1)dS_{<13>} + (2\kappa_{31} + \kappa_{13} + d_2)dS_{<23>} = 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Отсюда видно, что эта система линейных уравнений в частных производных относительно трех компонент $dS_{<33>}$, $dS_{<13>}$, $dS_{<23>}$ тензора несовместности $d\mathbf{S}$ нормальна по изостатической переменной ξ^3 , ибо приводится к нормальной форме Коши по этой переменной

$$\begin{aligned} \frac{\partial dS_{<13>}}{\partial \xi^3} = \dots, \\ \frac{\partial dS_{<23>}}{\partial \xi^3} = \dots, \\ \frac{\partial dS_{<33>}}{\partial \xi^3} = \dots. \end{aligned} \quad (6.20)$$

¹⁷Указанная система дифференциальных уравнений в частных производных, как нетрудно заметить, не является ξ^3 -гиперболической (или строго гиперболической относительно переменной ξ^3), так как ее характеристическое уравнение имеет кратный корень. Поэтому проблема корректности постановки задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных (6.16) с начальными данными на слое $\xi^3 = \text{const}$ векторного поля \mathbf{n} нуждается в дополнительном исследовании. Заметим, что многие важные уравнения математической физики имеют характеристическую форму с кратными корнями. Можно даже сказать, что условие строгой гиперболичности очень редко выполняется для линейных систем первого порядка.



Следовательно, задача Коши для системы уравнений (6.19) с начальными данными на слое $\xi^3 = \text{const}$ векторного поля \mathbf{n} поставлена корректно. В частности, поставлена корректно задача Коши с нулевыми начальными данными на слое $\xi^3 = \text{const}$

$$dS_{\langle 33 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 13 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 23 \rangle} = 0 \quad (\xi^3 = \text{const}). \quad (6.21)$$

Такая задача Коши имеет, очевидно, единственное нулевое решение. В случае, когда коэффициенты линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (6.19) являются аналитическими функциями изостатических координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и слой $\xi^3 = \text{const}$ векторного поля \mathbf{n} есть аналитическая поверхность, единственность аналитического решения рассматриваемой задачи Коши прямо следует из теоремы Коши – Ковалевской (см., например, [11], с. 30–37), поскольку как мы покажем далее слой $\xi^3 = \text{const}$ не является характеристической поверхностью для системы (6.19).

Единственность нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений (6.19) (если по-прежнему считать коэффициенты этой системы аналитическими функциями изостатических координат ξ^1, ξ^2, ξ^3) с нулевыми начальными данными на слое $\xi^3 = \text{const}$ в классе непрерывно дифференцируемых функций гарантируется теоремой Хольмгрена (Holmgren, 1901) (см., например, [12]–[15])¹⁸ поскольку слой $\xi^3 = \text{const}$ не является характеристической поверхностью для системы (6.19). Действительно, составляя характеристическое уравнение, имеем ($N_{\langle j \rangle}$ — физические компоненты вектора нормали к плоскому характеристическому элементу относительно базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$)

$$\begin{vmatrix} N_{\langle 3 \rangle} & 0 & 0 \\ 0 & N_{\langle 3 \rangle} & 0 \\ N_{\langle 1 \rangle} & N_{\langle 2 \rangle} & N_{\langle 3 \rangle} \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. находится корень $N_{\langle 3 \rangle}^3 = 0$ кратности 3, а сама характеристическая форма вырождается, что говорит о параболическом вырождении системы уравнений (6.19) и что нормали к характеристикам располагаются в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} ¹⁹. Поэтому всюду в области достижимости слоя $\xi^3 = \text{const}$ будут выполняться три оставшихся условия совместности (6.17), если они выполняются на слое.

Итак, если три уравнения совместности

$$dS_{\langle 12 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 11 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 22 \rangle} = 0$$

выполнены, то три оставшихся

$$dS_{\langle 33 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 13 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 23 \rangle} = 0$$

также выполняются, если они выполняются на каком-либо слое $\xi^3 = \text{const}$ векторного поля \mathbf{n} , причем гарантировать выполнение трех оставшихся условий совместности можно в области достижимости слоя $\xi^3 = \text{const}$ или в более широком смысле в той области пространства, где начальные данные (6.21) однозначно определяют решение системы уравнений (6.20)²⁰. Поскольку характеристические поверхности системы уравнений в частных производных (6.20) составляются из векторных линий

¹⁸Теорема Хольмгрена имеет весьма общий характер и применяется к *линейным* системам дифференциальных уравнений в частных производных любого аналитического типа (гиперболического, эллиптического, параболического). В условной части теоремы Хольмгрена можно не требовать аналитичности поверхности, на которой выставляются начальные данные. Теорема Хольмгрена указывает также и форму области, где решение задачи Коши единственным образом определяется начальными данными: это «линзообразная» область, ограниченная начальной поверхностью и частью пространства, заполненного семейством аналитических поверхностей, представляющим собой аналитическую деформацию начального слоя при фиксированном его крае, причем на всех поверхностях этого семейства характеристический определитель должен быть отделен от нуля одной и той же для всех поверхностей семейства постоянной. Насколько далеко удастся продвинуться этим методом от начального слоя зависит от геометрии характеристических поверхностей.

¹⁹Поэтому поверхности, составленные из векторных линий поля \mathbf{n} , будут характеристическими для системы дифференциальных уравнений в частных производных (6.19). Такие же поверхности являются характеристическими и для уравнений равновесия в случае состояний на ребре призмы Треска (см. уравнение (1.10)) $\nabla \Sigma - \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n} + \mathbf{n} \text{divn} = \mathbf{0}$.

²⁰Этот важный результат проливает свет на отмеченную выше проблему о том, какие именно три уравнения составляют независимую систему условий совместности малых деформаций.



поля \mathbf{n} , то область достижимости слоя $\xi^3 = \text{const}$ будет, по-видимому, ограничена векторными линиями поля \mathbf{n} , выпущенными из точек контура, являющегося краем слоя $\xi^3 = \text{const}$. Ясно, что в приведенных формулировках слой $\xi^3 = \text{const}$ может быть заменен любой поверхностью, не являющейся характеристической для параболически вырожденной системы дифференциальных уравнений в частных производных (6.19).

Укажем еще на одно интересное обстоятельство. Если часть границы тела свободна от контактных усилий, то в качестве граничного условия здесь можно принять условие касания вектора \mathbf{n} . Следовательно, указанная часть границы тела будет характеристической поверхностью для системы уравнений в частных производных (6.19). Если дополнить ее произвольной нехарактеристической поверхностью так, чтобы образовалась «линзообразная» пространственная область, то три условия совместности

$$dS_{\langle 33 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 13 \rangle} = 0, \quad dS_{\langle 23 \rangle} = 0 \quad (6.22)$$

будут выполнены всюду в образованной области, если они выполняются на дополняющей поверхности и если три других условия совместности выполняются всюду в указанной области.

Дальнейшие уточнения выполнимости условий (6.22) требует более детального анализа системы уравнений в частных производных

$$d_1 \begin{pmatrix} dS_{\langle 13 \rangle} \\ dS_{\langle 23 \rangle} \\ dS_{\langle 33 \rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_{\langle 13 \rangle} \\ dS_{\langle 23 \rangle} \\ dS_{\langle 33 \rangle} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(2\kappa_{12} + \kappa_{21}) & 0 & \kappa_{32} \\ 0 & -(2\kappa_{21} + \kappa_{12}) & \kappa_{31} \\ -(2\kappa_{32} + \kappa_{23}) & -(2\kappa_{31} + \kappa_{13}) & -(\kappa_{21} + \kappa_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS_{\langle 13 \rangle} \\ dS_{\langle 23 \rangle} \\ dS_{\langle 33 \rangle} \end{pmatrix}.$$

7. КИНЕМАТИКА ПЛОСКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Опираясь на полученные в предыдущем параграфе статьи результаты, можно исследовать кинематику плоского пластического течения.

Любое условие пластичности в случае плоского деформированного состояния приводится к виду $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$. В плоскости течения $x_1 x_2$ имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером 1, другое — номером 2. В условиях плоского деформированного состояния имеем $d_3 = 0, du_{\langle 3 \rangle} = 0, d\varepsilon_3^P = 0, \kappa_{31} = 0, \kappa_{32} = 0, \kappa_1 = \kappa_{13}, \kappa_2 = \kappa_{23}$.

Обозначая через θ угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, получаем

$$\kappa_1 = \kappa_{13} = -d_1\theta, \quad \kappa_2 = \kappa_{23} = d_2\theta. \quad (7.1)$$

Имеется всего одно дериационное соотношение, связывающее кривизны изостатических траекторий, которое имеет вид (см. [3])

$$d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 0 \quad (7.2)$$

и удовлетворяется тождественно в силу $\kappa_1 = -d_1\theta, \kappa_2 = d_2\theta$.

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе – Максвелла

$$d_1\sigma_1 + \kappa_2(\sigma_1 - \sigma_2) = 0, \quad d_2\sigma_2 + \kappa_1(\sigma_2 - \sigma_1) = 0, \quad (7.3)$$

или

$$d_1\sigma_1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0, \quad d_2\sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0, \quad (7.4)$$

где ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается



произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории.

Так как в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, то уравнения (7.4) приобретают следующий вид:

$$d_1\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_2} = 0, \quad d_2\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_1} = 0. \quad (7.5)$$

Эта система гиперболична. Характеристики делят пополам угол между главными направлениями напряжений. Вводя в систему (7.5) производные вдоль характеристических направлений (примем, что первая характеристика отклоняется от первого главного направления напряжений, соответствующего наибольшему главному напряжению, на угол $\pi/4$ по ходу часовой стрелки)

$$\bar{d}_1 = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{d}_2 = \frac{d_1 + d_2}{\sqrt{2}}, \quad (7.6)$$

складывая, а затем вычитая уравнения этой системы, получим интегрируемые соотношения Генки (Н. Генски) вдоль характеристик:

$$\bar{d}_1(\sigma_1 - 2k\theta) = 0, \quad \bar{d}_2(\sigma_1 + 2k\theta) = 0. \quad (7.7)$$

Интересно заметить, что в случае плоской деформации единственная ненулевая компонента $dS_{\langle 33 \rangle}$ тензора несовместности $d\mathbf{S} = \nabla \times d\boldsymbol{\varepsilon} \times \nabla$ может быть вычислена по формуле

$$dS_{\langle 33 \rangle} = \nabla \cdot (\nabla \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) - \Delta d\varepsilon_{jj}.$$

Поэтому в случае плоской деформации условия совместности в приращениях деформаций сводятся к одному уравнению (см. [3])

$$dS_{\langle 33 \rangle} = -d_1d_1d\varepsilon_2 - d_2d_2d\varepsilon_1 - (d_1\kappa_2 - d_2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_2d_1(2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_1d_2(2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0. \quad (7.8)$$

Соотношения Коши в случае плоского деформированного состояния:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_1 \\ \kappa_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_1 + d_2 & -\kappa_2 + d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ du_{\langle 2 \rangle} \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.10)$$

Следовательно, условие несжимаемости и соосности тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций в сетке линий главных напряжений можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\kappa_2 + d_1)du_{\langle 1 \rangle} + (\kappa_1 + d_2)du_{\langle 2 \rangle} &= 0, \\ (-\kappa_1 + d_2)du_{\langle 1 \rangle} + (-\kappa_2 + d_1)du_{\langle 2 \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

С помощью условия несжимаемости $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = 0$ из уравнения (7.8) исключается $d\varepsilon_2$, поэтому получается уравнение только относительно $d\varepsilon_1$. По главной части этого уравнения

$$d_1d_1d\varepsilon_1 - d_2d_2d\varepsilon_1 + \dots = 0$$

легко устанавливается, что кинематические уравнения принадлежат к гиперболическому типу, и характеристики являются линиями скольжения.

Ясно, что уравнение второго порядка для $d\varepsilon_1$ может быть заменено системой двух уравнений первого порядка. С этой целью введем обозначения:

$$u = \ln |d\varepsilon_1|, \quad p = d_1u, \quad q = d_2u. \quad (7.12)$$

Переменная u — логарифмическое приращение деформации.



Принимая во внимание, что

$$d_1 d\varepsilon_1 = p e^u, \quad d_2 d\varepsilon_1 = q e^u, \quad d_1 d_1 d\varepsilon_1 = e^u d_1 p + e^u p^2, \quad d_2 d_2 d\varepsilon_1 = e^u d_2 q + e^u q^2,$$

уравнение совместности деформаций представим в форме

$$d_2 q - d_1 p = p^2 - q^2 + 3(\kappa_2 p - \kappa_1 q) + 2(d_1 \kappa_2 - d_2 \kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2). \quad (7.13)$$

Заметим далее, что в силу

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = -\kappa_1 d_1 + \kappa_2 d_2 \quad (7.14)$$

справедливо соотношение

$$d_2 p - d_1 q = -\kappa_1 p + \kappa_2 q. \quad (7.15)$$

Следовательно, относительно величин p и q имеем систему уравнений первого порядка (7.13), (7.15).

Вводя обозначения $P = d_1 \theta$, $Q = d_2 \theta$, систему кинематических уравнений можно привести к следующему симметричному виду:

$$\begin{aligned} d_2 q - d_1 p &= p^2 - q^2 + 3(pQ + qP) + 2(d_1 Q + d_2 P + Q^2 - P^2), \\ d_2 p - d_1 q &= pP + qQ. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Напомним, что здесь величины p и q — производные вдоль линий главных напряжений от логарифмического приращения деформации.

Уравнения статики также преобразуются к симметричной форме относительно величин P и Q . Действительно, уравнения равновесия (7.5) с помощью обозначений $P^* = d_1 \sigma_1 / (2k)$, $Q^* = d_2 \sigma_1 / (2k)$ представляются как

$$P^* = -Q, \quad Q^* = -P. \quad (7.17)$$

На основании (7.14) находим

$$d_2 P^* - d_1 Q^* = -\kappa_1 P^* + \kappa_2 Q^* = PP^* + QQ^*$$

и в силу (7.17) —

$$d_1 P - d_2 Q = -2PQ.$$

Переписывая в новых обозначениях дериационную формулу (7.2), имеем

$$d_2 P - d_1 Q = P^2 + Q^2.$$

Таким образом, получаем систему статических уравнений плоской задачи в форме:

$$\begin{aligned} d_1 P - d_2 Q &= -2PQ, \\ d_2 P - d_1 Q &= P^2 + Q^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Последняя система уравнений позволяет сформулировать ряд новых результатов, касающихся геометрии поля изостат (см. также [16]).

Преобразуя систему уравнений (7.18) к характеристическим переменным (см. (7.6)), находим

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \bar{d}_1 (P + Q) &= -(P + Q)^2, \\ \sqrt{2} \bar{d}_2 (P - Q) &= (P - Q)^2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 \frac{1}{P + Q} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \bar{d}_2 \frac{1}{P - Q} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (7.19)$$



Вспоминая определение величин P и Q , получим следующие соотношения вдоль характеристик:

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \bar{d}_2 \frac{1}{\kappa_2 + \kappa_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

т.е. обратная разность (сумма) кривизн изостатических линий при продвижении вдоль первой (второй) характеристики изменяется пропорционально пройденному пути²¹.

Не представляет труда и вывод соотношений для приращений перемещений вдоль характеристических направлений. Складывая уравнения (7.11), а затем вычитая одно из другого, с учетом (7.6) находим

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \bar{d}_2 (du_{\langle 1 \rangle} + du_{\langle 2 \rangle}) + (\kappa_2 - \kappa_1) (du_{\langle 1 \rangle} - du_{\langle 2 \rangle}) &= 0, \\ \sqrt{2} \bar{d}_1 (du_{\langle 1 \rangle} - du_{\langle 2 \rangle}) + (\kappa_2 + \kappa_1) (du_{\langle 1 \rangle} + du_{\langle 2 \rangle}) &= 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Замечая далее, что при повороте осей главных напряжений 1, 2 на угол $\pi/4$ по ходу часовой стрелки получаем характеристические оси $\bar{1}$, $\bar{2}$, так что физические компоненты вектора $d\mathbf{u}$ относительно указанных осей вычисляются в виде $(du_{\langle \bar{1} \rangle}, du_{\langle \bar{2} \rangle})$ — физические компоненты вектора $d\mathbf{u}$ относительно характеристических осей)

$$\begin{aligned} \sqrt{2} du_{\langle \bar{1} \rangle} &= du_{\langle 1 \rangle} - du_{\langle 2 \rangle}, \\ \sqrt{2} du_{\langle \bar{2} \rangle} &= du_{\langle 1 \rangle} + du_{\langle 2 \rangle}. \end{aligned}$$

Следовательно, для физических компонент²² приращения вектора перемещений имеем

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 du_{\langle \bar{1} \rangle} + \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}} du_{\langle \bar{2} \rangle} &= 0, \\ \bar{d}_2 du_{\langle \bar{2} \rangle} + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}} du_{\langle \bar{1} \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}} = \frac{d_2 + d_1}{\sqrt{2}} \theta = \bar{d}_2 \theta, \quad \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}} = \frac{d_2 - d_1}{\sqrt{2}} \theta = -\bar{d}_1 \theta,$$

из (7.22) получаем соотношения Гейрингера (H. Geiringer) вдоль характеристик

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 du_{\langle \bar{1} \rangle} - du_{\langle \bar{2} \rangle} \bar{d}_1 \theta &= 0, \\ \bar{d}_2 du_{\langle \bar{2} \rangle} + du_{\langle \bar{1} \rangle} \bar{d}_2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

или на основании $\bar{\kappa}_1 = -\bar{d}_1 \theta$, $\bar{\kappa}_2 = \bar{d}_2 \theta$

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 du_{\langle \bar{1} \rangle} + \bar{\kappa}_1 du_{\langle \bar{2} \rangle} &= 0, \\ \bar{d}_2 du_{\langle \bar{2} \rangle} + \bar{\kappa}_2 du_{\langle \bar{1} \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Напомним, что производные по характеристическим направлениям $\bar{1}$, $\bar{2}$ связаны с производными по главным направлениям 1, 2 следующими соотношениями:

$$\sqrt{2} \bar{d}_1 = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial S_1} = d_1 - d_2 = \frac{\partial}{\partial S_1} - \frac{\partial}{\partial S_2},$$

²¹Этот результат — аналог второй теоремы Генки о геометрии поля скольжения в состоянии плоской деформации (см., например [17, с. 218]). Вторая теорема Генки непосредственно следует из (7.20). Действительно, применяя (7.6) к θ , находим

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}},$$

где $\bar{\kappa}_1 = -\bar{d}_1 \theta$, $\bar{\kappa}_2 = \bar{d}_2 \theta$ — кривизны характеристических линий, что означает

$$\bar{d}_1 \frac{1}{\bar{\kappa}_2} = 1, \quad \bar{d}_2 \frac{1}{\bar{\kappa}_1} = 1,$$

а эти соотношения как раз и составляют содержание второй теоремы Генки.

²²Относительно характеристических направлений.



$$\sqrt{2} \bar{d}_2 = \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial S_2} = d_1 + d_2 = \frac{\partial}{\partial S_1} + \frac{\partial}{\partial S_2}.$$

Следовательно, соотношения Гейрингера (7.23) могут быть представлены в развернутой форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial du_{\langle \bar{1} \rangle}}{\partial S_1} - du_{\langle \bar{2} \rangle} \frac{\partial \theta}{\partial S_1} &= 0, \\ \frac{\partial du_{\langle \bar{2} \rangle}}{\partial S_2} + du_{\langle \bar{1} \rangle} \frac{\partial \theta}{\partial S_2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Вводя в уравнения (7.23) вместо приращений перемещений $du_{\langle \bar{1} \rangle}$, $du_{\langle \bar{2} \rangle}$ физические компоненты скорости $v_{\langle \bar{1} \rangle}$, $v_{\langle \bar{2} \rangle}$ относительно ортогональной сетки характеристических линий, имеем

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 v_{\langle \bar{1} \rangle} - v_{\langle \bar{2} \rangle} \bar{d}_1 \theta &= 0, \\ \bar{d}_2 v_{\langle \bar{2} \rangle} + v_{\langle \bar{1} \rangle} \bar{d}_2 \theta &= 0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Соотношения Гейрингера (7.26) устанавливают, что скорости удлинений прямолинейных элементов, касающихся линий скольжения, равны нулю (см., например: *Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. С. 267, 272, 273*). Если через $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle}$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle}$ обозначить физические компоненты тензора скорости деформаций $\dot{\epsilon}$ в характеристической системе координат, то соотношения Гейрингера будут эквивалентны уравнениям

$$\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} = 0.$$

Связывая с помощью тензорного закона преобразования декартовы компоненты $\dot{\epsilon}_{11}$, $\dot{\epsilon}_{22}$, $\dot{\epsilon}_{12}$ тензора $\dot{\epsilon}$ с его компонентами относительно характеристической координатной системы $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle}$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle}$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{2} \rangle}$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} &= \dot{\epsilon}_{11} \cos^2(\theta - \frac{\pi}{4}) + 2\dot{\epsilon}_{12} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \dot{\epsilon}_{22} \sin^2(\theta - \frac{\pi}{4}), \\ \dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} &= \dot{\epsilon}_{11} \cos^2(\theta + \frac{\pi}{4}) + 2\dot{\epsilon}_{12} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \dot{\epsilon}_{22} \sin^2(\theta + \frac{\pi}{4}), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} &= \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \right) + \\ &+ \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \right), \\ \dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} &= \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \right) + \\ &+ \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \right). \end{aligned}$$

Записывая полученные уравнения с помощью операторов дифференцирования по характеристическим направлениям, находим

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} &= \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \bar{d}_1 v_1 + \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \bar{d}_1 v_2, \\ \dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} &= \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \bar{d}_2 v_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \bar{d}_2 v_2, \end{aligned}$$

что при условиях $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{1}\bar{1} \rangle} = 0$, $\dot{\epsilon}_{\langle \bar{2}\bar{2} \rangle} = 0$ позволяет сразу же найти соотношения вдоль характеристик

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \bar{d}_1 v_1 + \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \bar{d}_1 v_2 &= 0, \\ \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) \bar{d}_2 v_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \bar{d}_2 v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Рассмотрим далее физические компоненты скорости $v_{\langle \bar{1} \rangle}$, $v_{\langle \bar{2} \rangle}$ относительно характеристической координатной системы, связав их с декартовыми компонентами скорости с помощью тензорного закона преобразования

$$v_{\langle \bar{1} \rangle} = v_1 \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) + v_2 \sin(\theta - \frac{\pi}{4}),$$



$$v_{\langle \bar{2} \rangle} = v_1 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + v_2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

Дифференцируя последние уравнения вдоль первого и второго характеристических направлений соответственно и учитывая

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{\langle \bar{1} \rangle} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - v_{\langle \bar{2} \rangle} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \\ v_2 &= -v_{\langle \bar{1} \rangle} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + v_{\langle \bar{2} \rangle} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{d}_1 v_{\langle \bar{1} \rangle} &= \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \bar{d}_1 v_1 + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \bar{d}_1 v_2\right) + v_{\langle \bar{2} \rangle} \bar{d}_1 \theta, \\ \bar{d}_2 v_{\langle \bar{2} \rangle} &= \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \bar{d}_2 v_1 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \bar{d}_2 v_2\right) - v_{\langle \bar{1} \rangle} \bar{d}_2 \theta, \end{aligned}$$

и, принимая во внимание, что выражения в скобках в правых частях равны нулю на основании (7.27), снова приходим к соотношениям Гейрингера в форме (7.26).

Соотношения Гейрингера, как показывает внимательный анализ их вывода, остаются справедливыми при плоской несжимаемой деформации любого изотропного тела²³. Их появление в рамках теории плоской задачи математической теории пластичности — не более чем дань традиции.

8. КИНЕМАТИКА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа²⁴: 1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k . Первый случай исследуется сравнительно элементарными средствами. Второй случай — состояние «полной пластичности» Хаара – Кармана. Если присвоить тангенциальному главному направлению второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему состояние «полной пластичности»

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

В осесимметричном случае линии главных напряжений образуют триортогональную координатную сетку ξ^i . При этом ξ^2 — угловая координата. Кроме того, имеем: $d_2 = 0$, $du_{\langle 2 \rangle} = 0$, $\kappa_{13} = 0$, $\kappa_{31} = 0$. Поэтому приходим к более простым, по сравнению с общим пространственным случаем, соотношениям, описывающим распределения напряжений и скоростей.

Деривационные соотношения выражаются группой уравнений:

$$\begin{aligned} d_1 \kappa_{32} + d_3 \kappa_{12} + \kappa_{12}^2 + \kappa_{32}^2 &= 0, \\ d_1 \kappa_{23} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{12} \kappa_{21} &= 0, \\ d_3 \kappa_{21} + \kappa_{21}^2 + \kappa_{23} \kappa_{32} &= 0, \\ d_3 \kappa_{23} &= \kappa_{21} (\kappa_{32} - \kappa_{23}). \end{aligned}$$

Уравнения равновесия, сформулированные относительно изостатической сетки, есть

$$\begin{aligned} d_1 \sigma_1 + \kappa_{23} (\sigma_1 - \sigma_2) + \kappa_{32} (\sigma_1 - \sigma_3) &= 0, \\ d_3 \sigma_3 + \kappa_{21} (\sigma_3 - \sigma_2) + \kappa_{12} (\sigma_3 - \sigma_1) &= 0, \end{aligned} \tag{8.1}$$

и при догружении вдоль ребра призмы Треска $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k$ в этих уравнениях следует положить $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$, $\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$.

²³Поскольку для их вывода в рамках теории плоского деформированного состояния достаточно условия несжимаемости и условия коориентированности главных осей тензора напряжений и тензора скоростей деформаций.

²⁴Тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии.



Условия совместности приращений деформаций выражаются тремя уравнениями относительно изостатических координат

$$\begin{aligned}
 dS_{\langle 11 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_2 + \kappa_{21}^2 (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + d_3 [\kappa_{21} (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23} \kappa_{32} (d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\
 &\quad - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_2 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_3 = 0, \\
 dS_{\langle 22 \rangle} &= -d_3 d_3 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_3 + (\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2) (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + d_1 [\kappa_{32} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \\
 &\quad - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{32} d_1 d\varepsilon_3 - d_3 [\kappa_{12} (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] = 0, \\
 dS_{\langle 33 \rangle} &= -d_1 d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{23}^2 (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - d_1 [\kappa_{23} (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21} \kappa_{12} (d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 - 2d\varepsilon_3) - \\
 &\quad - \kappa_{23} d_1 d\varepsilon_2 - \kappa_{21} d_3 d\varepsilon_1 - \kappa_{12} d_3 d\varepsilon_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

из которых, в силу тождества Бианки $\nabla \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{0}$, независимы только два, например, первое и третье. Действительно, условия $dS_{\langle 12 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 23 \rangle} = 0$, $dS_{\langle 31 \rangle} = 0$ удовлетворяются тождественно в силу $\kappa_{31} = 0$, $\kappa_{13} = 0$, $d_2 = 0$. Это означает, что тензор $d\mathbf{S}$ соосен тензору напряжений и $dS_{\langle 11 \rangle} = dS_1$, $dS_{\langle 22 \rangle} = dS_2$, $dS_{\langle 33 \rangle} = dS_3$. Тождества Бианки при этом сводятся к двум уравнениям:

$$\begin{aligned}
 d_1 dS_1 + \kappa_{23} (dS_1 - dS_2) + \kappa_{32} (dS_1 - dS_3) &= 0, \\
 d_3 dS_3 + \kappa_{12} (dS_3 - dS_1) + \kappa_{21} (dS_3 - dS_2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Следовательно, если хотя бы одна из кривизн κ_{23} или κ_{21} отлична от нуля, то из условий $dS_1 = 0$, $dS_3 = 0$ необходимо $dS_2 = 0$.

Независимыми можно также считать два условия $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$ и $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$. Если кривизна κ_{32} отлична от нуля, то из уравнений (8.3) необходимо следует $dS_{\langle 33 \rangle} = 0$.

Независимые условия совместности $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$ и $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$ после исключения из них величины $d\varepsilon_2$ с помощью условия несжимаемости позволяют сформулировать систему двух уравнений второго порядка относительно $d\varepsilon_1$ и $d\varepsilon_3$. Главная часть этой системы есть

$$d_3 d_3 d\varepsilon_1 + d_3 d_3 d\varepsilon_3 + \dots = 0, \quad -d_3 d_3 d\varepsilon_1 - d_1 d_1 d\varepsilon_3 + \dots = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} N_{\langle 3 \rangle}^2 & N_{\langle 3 \rangle}^2 \\ -N_{\langle 3 \rangle}^2 & N_{\langle 1 \rangle}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $N_{\langle j \rangle}$ — физические компоненты вектора нормали \mathbf{N} к характеристическому элементу относительно базиса $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ при условии $N_{\langle 1 \rangle}^2 + N_{\langle 3 \rangle}^2 = 1$ приобретает вид

$$N_{\langle 3 \rangle}^2 (N_{\langle 3 \rangle}^2 - N_{\langle 1 \rangle}^2) = 0$$

и имеет четыре действительных корня: $N_{\langle 3 \rangle} = 0$ (корень кратности два), $N_{\langle 3 \rangle} = 1/\sqrt{2}$, $N_{\langle 3 \rangle} = -1/\sqrt{2}$, т.е. система уравнений $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$ и $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$ принадлежит к гиперболическому типу; направления, ортогональные третьей главной оси напряжений, — характеристические, а остальные характеристические направления делят пополам углы между главными осями напряжений 1 и 3. Следовательно, характеристиками системы уравнений совместности приращений деформаций $dS_{\langle 11 \rangle} = 0$ и $dS_{\langle 22 \rangle} = 0$ будут изостаты, ортогональные третьему главному направлению, и линии скольжения.

В осесимметричном случае соотношения Коши, связывающие приращения тензора малых деформаций с приращениями перемещений, в криволинейной ортогональной координатной сетке линий главных напряжений имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \\ d\varepsilon_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & 0 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\kappa_{23} + d_1 & 0 \\ -\kappa_{12} + d_3 & 0 & -\kappa_{32} + d_1 \\ 0 & -\kappa_{21} + d_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{\langle 1 \rangle} \\ 0 \\ du_{\langle 3 \rangle} \end{pmatrix} = 0. \tag{8.5}$$



Следовательно, условие несжимаемости и соосности тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций в сетке линий главных напряжений можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1)du_{\langle 1 \rangle} + (\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)du_{\langle 3 \rangle} &= 0, \\ (-\kappa_{12} + d_3)du_{\langle 1 \rangle} + (-\kappa_{32} + d_1)du_{\langle 3 \rangle} &= 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$N_{\langle 1 \rangle}^2 - N_{\langle 3 \rangle}^2 = 0$$

при условии

$$N_{\langle 1 \rangle}^2 + N_{\langle 3 \rangle}^2 = 1$$

имеет два действительных различных корня, что указывает на гиперболичность приведенной выше системы уравнений. Характеристические линии являются линиями скольжения.

9. КИНЕМАТИКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассмотрим, следуя [18]–[20], кинематику пространственного пластического течения на поверхности скольжения. Исключительный интерес здесь будут представлять соотношения, связывающие скачки тангенциальных приращений перемещений при переходе через линии сильного разрыва, расположенные на самой поверхности максимальной скорости сдвига. Указанные линии, как будет доказано, являются асимптотическими линиями поверхности максимальной скорости сдвига, а соотношения вдоль них, связывающие скачки, оказываются интегрируемыми. Изложение в основном следует статье: Радаев Ю.Н. Кинематика пространственного идеально пластического течения на поверхностях скольжения // Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. 2006. №9(49). С. 30–41.

Поверхность скольжения в идеально пластическом теле суть поверхность разрыва касательных составляющих приращений перемещений $d\mathbf{u}$.

Как показывает анализ, данный в [18], [19], на поверхности разрыва касательных составляющих приращений перемещений реализуется чисто сдвиговое течение, когда главные приращения пластических деформаций удовлетворяют условиям

$$d\varepsilon_i^P = 0, \quad d\varepsilon_j^P + d\varepsilon_l^P = 0 \quad (i \neq j, j \neq l, l \neq i). \quad (9.1)$$

Действительно, если считать, что поверхность сильного разрыва касательных составляющих приращений перемещений заменяется тонким слоем, внутри которого вектор $d\mathbf{u}$ изменяется непрерывно (рис. 1), то можно получить (\mathbf{N} — единичный вектор, ортогональный рассматриваемой поверхности)

$$d\varepsilon = \psi([d\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes [d\mathbf{u}]),$$

где ψ — некоторая функция, определенная на поверхности разрыва приращений перемещений.

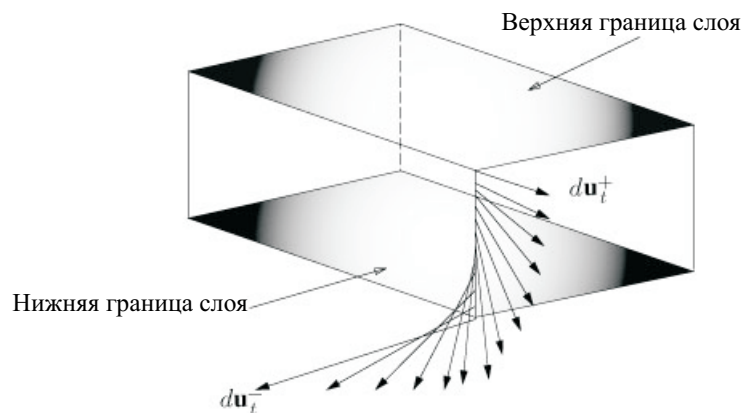


Рис. 1. Слой скольжения внутри идеально пластического тела (касательная составляющая приращений перемещений $d\mathbf{u}_t$ непрерывно переходит внутри слоя из положения $d\mathbf{u}_t^-$ в положение $d\mathbf{u}_t^+$)



Привлекая затем соотношение совместности для скачка вектора $d\mathbf{u}$ при переходе через поверхность разрыва приращений перемещений

$$\mathbf{N} \cdot [d\mathbf{u}] = 0,$$

следующее из условия несжимаемости²⁵, сразу же приходим к уравнению

$$\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} = \psi [d\mathbf{u}], \quad (9.2)$$

с помощью которого получаем следующее представление приращений деформаций на поверхности разрыва касательных составляющих приращений перемещений:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes (\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (9.3)$$

Соотношения (9.1) без труда устанавливаются с помощью (9.3).

Ассоциированный закон течения, сформулированный для грани призмы Кулона – Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, устанавливает жесткую (без неопределенности, характерной для ребра призмы Треска) соосность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и еще следующие соотношения для главных значений тензора приращений пластических деформаций:

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda, \quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Видно, что характер пластического течения, если реализуется напряженное состояние на грани призмы Кулона – Треска, оказывается чисто сдвиговым. Сдвиг происходит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} (рис. 2). Направления максимальной скорости сдвига расположены в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{n} , и делят пополам прямые углы, образованные направленными вдоль векторов \mathbf{l} и \mathbf{m} пересекающимися прямыми.

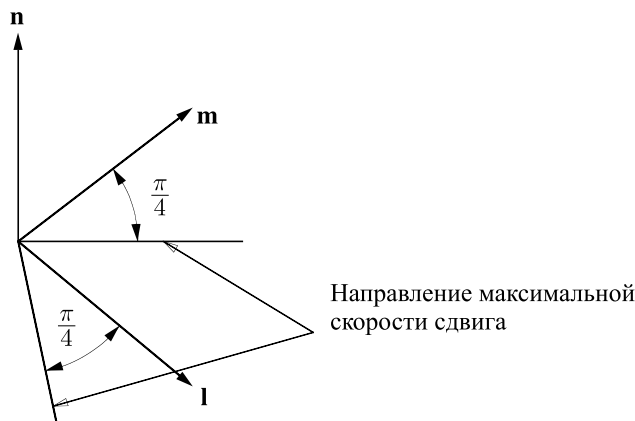


Рис. 2. Положение направлений максимальной скорости сдвига относительно триэдра главных осей напряжений \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} (течение на грани призмы Кулона – Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$)

Чисто сдвиговое течение (9.1) характерно для состояний на грани призмы Треска, и тогда необходимо совместное рассмотрение уравнений (3.3), (3.8), дополненных соотношениями Коши. Однако чисто сдвиговое течение (9.1) возможно и на ребре призмы Треска тогда, когда вектор, представляющий приращения пластических деформаций в трехмерном пространстве главных напряжений Хэя – Вестергарда, занимает одно из крайних своих возможных положений между нормальными к граням

²⁵Последнее, поскольку речь идет о сильных разрывах приращений перемещений, следует брать в интегральной форме $\oint_S \boldsymbol{\nu} \cdot d\mathbf{u} = 0$, где S – произвольная замкнутая поверхность, расположенная внутри тела и не изменяющаяся в процессе нагружения, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вектор нормали к указанной поверхности.



призмы, пересечением которых образуется само ребро²⁶. В любом случае в дальнейшем при анализе течения вдоль поверхностей скольжения мы будем, помимо (9.3), использовать лишь условия несжимаемости и соотношения Коши.

Деформация в нормальных сечениях поверхности скольжения представляет собой сдвиг одной стороны поверхности относительно другой. В одном из нормальных сечений поверхности скольжения скорость деформации сдвига максимальна²⁷. Линия пересечения этого нормального сечения с касательной плоскостью указывает направление максимальной скорости сдвига²⁸. Действительно, рассмотрим произвольную нормальную к поверхности скольжения плоскость, опирающуюся на единичные векторы \mathbf{t} , \mathbf{N} . Вектор \mathbf{t} касается поверхности скольжения. Согласно (9.2) скорость деформации сдвига в этой плоскости вычисляется как

$$\mathbf{N} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{t} = \psi [d\mathbf{u}] \cdot \mathbf{t}. \quad (9.4)$$

Ясно, что максимум эта величина достигает тогда, когда вектор \mathbf{t} становится коллинеарным вектору $[d\mathbf{u}]$. Проведенное рассуждение показывает также, что на поверхности максимальной скорости сдвига удобно ввести локальный ортогональный триэдр, состоящий из ортов \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{N} (орт \mathbf{t}_1 имеет направление $[d\mathbf{u}]$, орт \mathbf{t}_2 ортогонален $[d\mathbf{u}]$, а орт \mathbf{N} нормален поверхности (рис. 3)).

В базисе \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{N} матрица тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ на основании (9.3) имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} \\ 0 & 0 & 0 \\ d\varepsilon_{\langle 13 \rangle} & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

где $d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}$ — единственная ненулевая физическая компонента тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ в указанном базисе. Следовательно, можно сразу же вычислить собственные значения тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$: $0, \pm d\varepsilon_{\langle 13 \rangle}$.

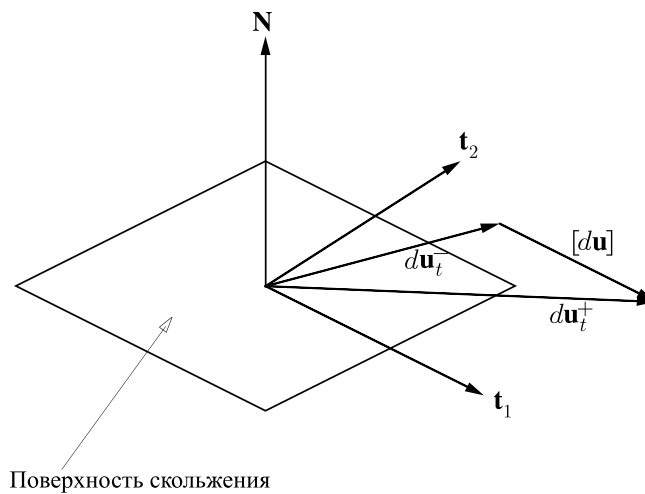


Рис. 3. Ориентация локального репера \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{N} на поверхности скольжения

²⁶Здесь мы говорим о *ребре* призмы Треска, хотя, по существу, сдвиговое течение (9.1) соответствует *грани*, с тем, чтобы оперировать с правильно определенной гиперболической системой кинематических уравнений (2.19) и ее решениями, подчиняющимися ограничениям (9.1). Мы пользуемся возможностью трактовать состояния на ребре как предельные случаи состояний на гранях, пересечением которых образовано ребро. Действительное течение на грани, помимо кинематических связей (9.1), ограничивается еще и жестким предписанием триэдра главных осей тензора приращений пластических деформаций (он предписан триэдром главных осей тензора напряжений). На ребре призмы Треска предписывается лишь одно из трех главных направлений тензора приращений пластических деформаций.

²⁷Это нормальное сечение имеет направление вектора разности векторов тангенциальных приращений вектора перемещения с двух сторон поверхности.

²⁸Именно поэтому поверхность скольжения мы будем называть также поверхностью максимальной скорости сдвига.



Из ассоциированного закона течения следует, что касательное напряжение на поверхности максимальной скорости сдвига также имеет максимальное значение²⁹. Следовательно, если допускать отмеченную выше возможность реализации сдвигового течения вида (9.1) для состояний на ребре призмы Треска, то поверхность максимальной скорости сдвига — характеристическая для правильно определенной системы уравнений кинематики течения на ребре. Поясним сказанное примером. Рассмотрим грань призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ и две ее крайние точки, расположенные в девиаторной плоскости, соответствующие ребрам (рис. 4)

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 + 2k, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_1 - 2k.$$

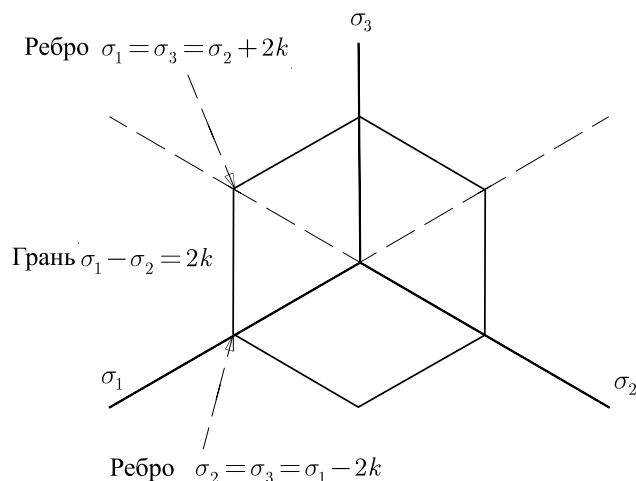


Рис. 4. Крайние состояния для грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ в девиаторной плоскости пространства главных напряжений

Обобщенный ассоциированный закон течения допускает реализацию для таких состояний чисто сдвигового течения вида

$$d\varepsilon_3 = 0, \quad d\varepsilon_1 = -d\varepsilon_2.$$

Направления максимальной скорости сдвига для рассматриваемых состояний ортогональны вектору \mathbf{n} и делят пополам угол между векторами \mathbf{l} и \mathbf{m} .

Вектор \mathbf{N} (единичная нормаль к поверхности скольжения), поскольку он нормален характеристической площадке, должен для состояния $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 + 2k$ удовлетворять соотношению

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{N} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а для состояния $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_1 - 2k$ —

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{N} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая еще, что вектор \mathbf{N} ортогонален направлению максимальной скорости сдвига, удается однозначно определить его ориентацию относительно локального триэдра $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ (рис. 5). Заметим, что в каждом из двух состояний $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 + 2k$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_1 - 2k$ вектор \mathbf{N} ортогонален вектору \mathbf{n} , а вектор \mathbf{n} касается поверхности скольжения.

²⁹Можно показать (см. [19], с. 47–49), что только условие пластичности Треска обеспечивает существование в идеально пластических телах поверхностей разрыва касательных составляющих приращений перемещений с чисто сдвиговой картиной деформирования (9.1).

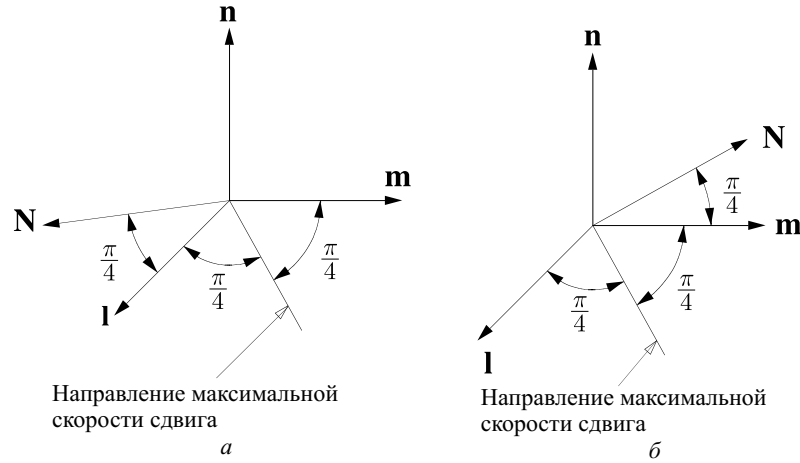


Рис. 5. Ориентация вектора \mathbf{N} относительно локального репера $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ для состояния $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_1 - 2k$ (а) и $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 + 2k$ (б)

Итак, поверхность максимальной скорости сдвига есть, вообще говоря, поверхность сильного разрыва приращений перемещений. Нормальная составляющая вектора $d\mathbf{u}$ должна быть непрерывной при переходе через поверхность максимальной скорости сдвига, а касательная составляющая разрывна. Все последующие соотношения поэтому следует интерпретировать как выполняющиеся на каждой из двух сторон поверхности.

Как было установлено выше, на поверхности максимальной скорости сдвига выполняется соотношение

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes (\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}),$$

т.е. сдвиги происходят в плоскостях, содержащих вектор \mathbf{N}^{30} , а в касательной плоскости сдвигов не происходит. Кроме него имеются также соотношение Коши и условие несжимаемости:

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes d\mathbf{u} + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T, \quad (9.5)$$

$$\text{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}) = 0. \quad (9.6)$$

Введем на поверхности скольжения Гауссовы координаты τ^1, τ^2 . Обозначим через \mathbf{i}_α локальные базисные векторы, соответствующие параметризации τ^1, τ^2 . Разложим тензор $\nabla \otimes d\mathbf{u}$ на рассматриваемой поверхности, используя триэдр $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{N}$:

$$\nabla \otimes d\mathbf{u} = \mathbf{N} \otimes (\mathbf{N} \cdot \nabla)d\mathbf{u} + a^{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \otimes \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\beta}, \quad (9.7)$$

где $a^{\alpha\beta}$ — компоненты фундаментального тензора поверхности. В справедливости этого соотношения нетрудно убедиться, производя внутреннее умножение слева на векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{N}$.

Опираясь на условие несжимаемости и (9.5), (9.7), заключаем, что

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{N} \cdot \nabla)d\mathbf{u} = -a^{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\beta}. \quad (9.8)$$

Умножая (9.5) слева на \mathbf{N} и учитывая (9.7) и (9.8), находим

$$(\mathbf{N} \cdot \nabla)d\mathbf{u} = 2\mathbf{N} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + a^{\alpha\beta} \left(\left(\mathbf{i}_\alpha \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\beta} \right) \mathbf{N} - \mathbf{i}_\beta \left(\mathbf{N} \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) \right). \quad (9.9)$$

Умножая тензорно обе части полученного уравнения справа и слева на вектор \mathbf{N} , складывая и используя (9.3),

$$\mathbf{N} \otimes (\mathbf{N} \cdot \nabla)d\mathbf{u} = \nabla \otimes d\mathbf{u} - a^{\alpha\beta} \mathbf{i}_\alpha \otimes \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\beta},$$

³⁰Точнее, в одной из нормальных плоскостей (опирающейся на векторы \mathbf{t}_2, \mathbf{N}) скорость деформации сдвига равна нулю, а во всех остальных нормальных плоскостях она будет отлична от нуля.



а также (9.5), приходим к

$$2a^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \cdot \mathbf{i}_\beta \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + a^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \otimes \mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\beta \otimes \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) = a^{\alpha\beta} \left(\mathbf{N} \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) (\mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{i}_\beta). \quad (9.10)$$

Переходя в этом уравнении к следу, имеем $a^{\alpha\beta} \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \cdot \mathbf{i}_\beta = 0$, что позволяет несколько упростить уравнение (9.10)

$$a^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \otimes \mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\beta \otimes \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) = a^{\alpha\beta} \left(\mathbf{N} \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) (\mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{i}_\beta). \quad (9.11)$$

Приращения перемещений на поверхности максимальной скорости сдвига должны удовлетворять тензорному уравнению (9.11). Оно дает лишь три независимых скалярных уравнения, так как умножение обеих его частей на вектор \mathbf{N} приводит к тождеству. Независимые соотношения получаются умножением обеих частей уравнения (9.11) на вектор \mathbf{i}_μ слева, что приводит к

$$\left(\mathbf{i}_\mu \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\alpha} \right) \mathbf{i}^\alpha + \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\mu} = \left(\mathbf{N} \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\mu} \right) \mathbf{N},$$

а затем — на вектор \mathbf{i}_λ , что дает

$$\mathbf{i}_\mu \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\lambda} + \mathbf{i}_\lambda \cdot \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\mu} = 0. \quad (9.12)$$

Поскольку уравнение (9.12) должно удовлетворяться на каждой из сторон поверхности максимальной скорости сдвига, то для скачков приращений перемещений имеем следующее соотношение:

$$\mathbf{i}_\mu \cdot \frac{\partial [d\mathbf{u}]}{\partial \tau^\lambda} + \mathbf{i}_\lambda \cdot \frac{\partial [d\mathbf{u}]}{\partial \tau^\mu} = 0.$$

Для дальнейшего анализа разложим вектор $d\mathbf{u}$ по векторам локального триэдра $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{N}$:

$$d\mathbf{u} = (dU)\mathbf{N} + du^\alpha \mathbf{i}_\alpha.$$

Ясно, что dU, du^α не являются действительными приращениями и служат для сокращенной записи проекций вектора $d\mathbf{u}$ на указанный триэдр.

На основании формулы Вейнгартена $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \tau^\gamma} = -a^{\omega\sigma} b_{\omega\gamma} \mathbf{i}_\sigma$ ($b_{\omega\gamma}$ — компоненты второй квадратичной формы поверхности максимальной скорости сдвига) можно получить следующие выражения для частных производных вектора $d\mathbf{u}$ по Гауссовым параметрам поверхности:

$$\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial \tau^\gamma} = -(dU)a^{\omega\sigma} b_{\omega\gamma} \mathbf{i}_\sigma + \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\gamma} \mathbf{i}_\alpha + (du^\alpha) \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \mathbf{i}_\sigma + \mathbf{N} \frac{\partial dU}{\partial \tau^\gamma},$$

внося которые в (9.12) и учитывая $\Gamma_{\alpha\lambda,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu,\lambda} = \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha}$, приходим к уравнению

$$-2b_{\mu\lambda}(dU) + a_{\mu\alpha} \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\lambda} + a_{\lambda\alpha} \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\mu} + du^\alpha \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha} = 0. \quad (9.13)$$

Поскольку уравнение (9.13) должно удовлетворяться на каждой из сторон поверхности максимальной скорости сдвига, а нормальная составляющая dU непрерывна при переходе через эту поверхность, то скачки касательных составляющих приращений перемещений связаны посредством следующего соотношения:

$$a_{\mu\alpha} \frac{\partial [du^\alpha]}{\partial \tau^\lambda} + a_{\lambda\alpha} \frac{\partial [du^\alpha]}{\partial \tau^\mu} + [du^\alpha] \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha} = 0. \quad (9.14)$$

Сворачивая обе части уравнения (9.13) с $g^{\lambda\mu}$, имеем

$$4H(dU) + 2 \frac{\partial du^\lambda}{\partial \tau^\lambda} + a^{\lambda\mu} \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha} du^\alpha = 0, \quad (9.15)$$

где H — средняя кривизна поверхности максимальной скорости сдвига:

$$H = -\frac{1}{2} b_{\mu\lambda} a^{\lambda\mu}.$$



Для скачков (принимая во внимание, что $[dU] = 0$) соответственно находим уравнение

$$2 \frac{\partial [du^\lambda]}{\partial \tau^\lambda} + a^{\lambda\mu} \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial \tau^\alpha} [du^\alpha] = 0. \quad (9.16)$$

Исключая затем с помощью соотношения (9.15) из (9.13) нормальную составляющую dU , получаем

$$-H a_{\mu\alpha} \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\lambda} - H a_{\lambda\alpha} \frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\mu} - b_{\mu\lambda} \frac{\partial du^\beta}{\partial \tau^\beta} = 0. \quad (9.17)$$

Это уравнение³¹ собственно и определяет пластическое скольжение вдоль поверхности максимальной скорости сдвига и должно удовлетворяться на каждой из двух ее сторон (касательные составляющие du^α могут иметь различные значения на разных сторонах поверхности; нормальная составляющая dU непрерывна при переходе через эту поверхность, если не допускать нарушения сплошности тела).

Для анализа кинематики течения на поверхности максимальной скорости сдвига исследуем уравнение (9.17) на предмет существования действительных характеристических направлений. Можно воспользоваться стандартной техникой Адамара – Томаса [5] геометрических условий совместности слабых разрывов касательных составляющих приращений перемещений. Слабый разрыв характеризуется скачками производных, в поперечных по отношению к характеристическим линиям направлениях, величина которых вычисляется согласно

$$\left[\frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\lambda} \right] = A^\alpha \nu_\lambda,$$

где ν_λ — единичный вектор нормали к характеристической линии на поверхности максимальной скорости сдвига³². Ясно, что

$$\nu_\lambda \nu^\lambda = 1, \quad A^\alpha A_\alpha > 0.$$

Из уравнений (9.17) выводятся соотношения для скачков касательных составляющих приращений перемещений. В результате находим, что компоненты ν_λ должны определяться из условий нетривиальной разрешимости относительно A_α ($A^\alpha A_\alpha > 0$) системы уравнений

$$-H(A_\mu \nu_\lambda + A_\lambda \nu_\mu) - (A^\beta \nu_\beta) b_{\mu\lambda} = 0. \quad (9.18)$$

Несложные рассуждения показывают, что вещественные характеристические направления существуют, только когда главные нормальные кривизны поверхности максимальной скорости сдвига κ_1 , κ_2 имеют разный знак (т.е. Гауссова кривизна поверхности K отрицательна). При этом характеристики представляют собой асимптотические линии на поверхности максимальной скорости сдвига³³. Действительно, система уравнений (9.18) в ортогональной Гауссовой сетке имеет вид

$$\begin{aligned} -2H A_1 \nu_1 - (a^{11} A_1 \nu_1 + a^{22} A_2 \nu_2) b_{11} &= 0, \\ -2H A_2 \nu_2 - (a^{11} A_1 \nu_1 + a^{22} A_2 \nu_2) b_{22} &= 0, \\ -H(A_1 \nu_2 + A_2 \nu_1) - (a^{11} A_1 \nu_1 + a^{22} A_2 \nu_2) b_{12} &= 0. \end{aligned}$$

³¹Вместе с соответствующим уравнением, связывающим скачки касательных составляющих приращений перемещений

$$-H a_{\mu\alpha} \frac{\partial [du^\alpha]}{\partial \tau^\lambda} - H a_{\lambda\alpha} \frac{\partial [du^\alpha]}{\partial \tau^\mu} - b_{\mu\lambda} \frac{\partial [du^\beta]}{\partial \tau^\beta} = 0.$$

³²Вектор ν расположен в касательной к поверхности плоскости ортогонально характеристической линии.

³³Напомним, что асимптотическими линиями на поверхности называются линии, нормальная кривизна которых равна нулю. Если t есть касательный вектор к асимптотической линии, то

$$b_{\mu\lambda} t^\mu t^\lambda = 0.$$

На поверхности отрицательной гауссовой кривизны асимптотические линии образуют координатную сетку. Угол ι между асимптотическими линиями вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\iota}{2} = \sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}.$$



Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2H\nu_1 - a^{11}b_{11}\nu_1 & -a^{22}b_{11}\nu_2 \\ -H\nu_2 - a^{11}b_{12}\nu_1 & -H\nu_1 - a^{22}b_{12}\nu_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(2H_1 + a^{11}b_{11})(H\nu_1 + a^{22}b_{12}\nu_2)\nu_1 = a^{22}b_{11}(H\nu_2 + a^{11}b_{12}\nu_1)\nu_2,$$

принимает наиболее простую форму

$$b_{22}\nu_1^2 + b_{11}\nu_2^2 = 0,$$

когда криволинейная сетка на поверхности совпадает с сеткой линий кривизны (в этом случае $a_{12} = 0$, $b_{12} = 0$, $-b_{11}/a_{11} = \kappa_1$, $-b_{22}/a_{22} = \kappa_2$). Переходя в последнем уравнении к физическим компонентам $\nu_{\langle 1 \rangle}$, $\nu_{\langle 2 \rangle}$ относительно локального базиса сетки линий кривизны согласно $\nu_1 = \sqrt{a_{11}}\nu_{\langle 1 \rangle}$, $\nu_2 = \sqrt{a_{22}}\nu_{\langle 2 \rangle}$, получим

$$\kappa_2\nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \kappa_1\nu_{\langle 2 \rangle}^2 = 0, \quad \nu_{\langle 1 \rangle}^2 + \nu_{\langle 2 \rangle}^2 = 1,$$

откуда следует, что система уравнений (9.17) гиперболична, только если главные кривизны поверхности имеют разные знаки. Из этого же уравнения на основании формулы Эйлера для нормальной кривизны кривой на поверхности, составляющей угол ω с первой линией кривизны,

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \omega + \kappa_2 \sin^2 \omega$$

закключаем, что нормальная кривизна характеристик системы уравнений (9.17) равна нулю, т.е. характеристики есть асимптотические линии поверхности максимальной скорости сдвига. Этот факт сразу же позволяет сделать вывод о том, что пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Поэтому результатом такого рода необратимого деформирования должны быть мозаичные узоры, составленные из отрезков линий микроскольжения, ориентированных в асимптотических направлениях. Даже локально поверхность отрицательной Гауссовой кривизны имеет довольно сложную форму. Любая окрестность точки поверхности отрицательной Гауссовой кривизны имеет седлообразную форму и делится асимптотическими направлениями на четыре части, причем две из них являются вогнутыми и две выпуклыми.

Предположим, что Гауссова кривизна поверхности максимальной скорости сдвига K отрицательна. Выберем параметризацию поверхности максимальной скорости сдвига так, чтобы координатные линии $\tau^1 = \text{const}$, $\tau^2 = \text{const}$ были асимптотическими линиями. Поскольку в этом случае

$$b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad K = -\frac{b_{12}^2}{a}, \quad H = \frac{a_{12}b_{12}}{a}, \quad -\frac{H}{K} = \frac{a_{12}}{b_{12}},$$

то из системы уравнений (9.17) можно получить два независимых уравнения³⁴

$$a_{11} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + a_{12} \frac{\partial du^2}{\partial \tau^1} = 0, \quad a_{22} \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} + a_{12} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^2} = 0. \quad (9.19)$$

Здесь $a_{\mu\lambda}$ — компоненты метрического тензора поверхности, вычисленные в асимптотической координатной сетке. Система уравнений (9.19) записана в характеристических координатах. Каждое из уравнений этой системы есть соотношение вдоль характеристики.

В случае, когда система уравнений (9.17) эллипична, в координатной сетке линий кривизны имеем

$$\begin{aligned} 2Ha_{11} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + b_{11} \left(\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} \right) &= 0, \\ 2Ha_{22} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + b_{22} \left(\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} \right) &= 0, \\ Ha_{22} \frac{\partial du^2}{\partial \tau^1} + Ha_{11} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned}$$

³⁴При $\mu = 1$, $\lambda = 1$ и $\mu = 2$, $\lambda = 2$. Уравнение, соответствующее $\mu = 1$, $\lambda = 2$, не дает нового независимого соотношения.



откуда получаем два независимых уравнения

$$\kappa_2 \frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} - \kappa_1 \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} = 0, \quad a_{11} \frac{\partial du^1}{\partial \tau^2} + a_{22} \frac{\partial du^2}{\partial \tau^1} = 0. \quad (9.20)$$

Здесь, подчеркнем еще раз, координатная сетка τ^1, τ^2 совпадает с сеткой линий кривизны поверхности максимальной скорости сдвига. Второе уравнение приведенной системы можно преобразовать, переходя к физическим компонентам приращений перемещений и лонгальным параметрам s_1, s_2 вдоль линий кривизны. В результате имеем уравнение

$$\frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial s_2} + \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial s_1} + \gamma_1 du_{\langle 1 \rangle} + \gamma_2 du_{\langle 2 \rangle} = 0,$$

где γ_1, γ_2 — геодезические кривизны линий кривизны поверхности максимальной скорости сдвига

$$\gamma_1 = -\frac{\partial \ln \sqrt{a_{11}}}{\partial s_2}, \quad \gamma_2 = -\frac{\partial \ln \sqrt{a_{22}}}{\partial s_1}.$$

Заметим, что главные кривизны и геодезические кривизны линий кривизны связаны уравнениями Гаусса и Кодацци:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_2}{\partial s_1} + (\kappa_1 - \kappa_2) \gamma_2 &= 0, \\ \frac{\partial \kappa_1}{\partial s_2} - (\kappa_1 - \kappa_2) \gamma_1 &= 0, \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1} - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 &= K. \end{aligned}$$

В итоге главная часть системы дифференциальных уравнений (9.20) приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} \kappa_2 \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial s_1} - \kappa_1 \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial s_2} + \dots &= 0, \\ \frac{\partial du_{\langle 1 \rangle}}{\partial s_2} + \frac{\partial du_{\langle 2 \rangle}}{\partial s_1} + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Исследуем, наконец, соотношения для сильных разрывов касательных (по отношению к асимптотическим линиям поверхности максимальной скорости сдвига), составляющих приращения вектора перемещений. Поскольку уравнения (9.17) должны выполняться на поверхности максимальной скорости сдвига с каждой стороны соответствующей асимптотической линии, то для скачков имеем соотношения

$$a_{11} \frac{\partial [du^1]}{\partial \tau^1} + a_{12} \frac{\partial [du^2]}{\partial \tau^1} = 0, \quad a_{22} \frac{\partial [du^2]}{\partial \tau^2} + a_{12} \frac{\partial [du^1]}{\partial \tau^2} = 0.$$

Так как нормальные (по отношению к асимптотическим линиям поверхности максимальной скорости сдвига) составляющие приращения вектора перемещений непрерывны, то вдоль каждой из двух асимптотических линий справедливо соотношение

$$\nu_1 [du^1] + \nu_2 [du^2] = 0.$$

Принимая во внимание, что для ковариантных компонент нормалей к асимптотическим линиям

$$\begin{aligned} \nu_1 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_1 = 0, \quad \nu_2 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_2 = \sqrt{a_{22}} \sin \iota; \\ \nu_2 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \nu_1 = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_1 = -\sqrt{a_{11}} \sin \iota, \end{aligned}$$

приходим к следующим соотношениям вдоль асимптотических линий:

$$\begin{aligned} [du^2] = 0, \quad \frac{\partial [du^1]}{\partial \tau^1} = 0 \quad \text{вдоль } \tau^1\text{-линии;} \\ [du^1] = 0, \quad \frac{\partial [du^2]}{\partial \tau^2} = 0 \quad \text{вдоль } \tau^2\text{-линии;} \end{aligned}$$



интегрируя которые получаем четыре конечных соотношения:

$$\begin{aligned} [du^2] &= 0, & [du^1] &= \text{const} & \text{вдоль } \tau^1\text{-линии;} \\ [du^1] &= 0, & [du^2] &= \text{const} & \text{вдоль } \tau^2\text{-линии.} \end{aligned}$$

Таким образом, вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига соотношения для скачков контравариантных (относительно локального базиса, который образует асимптотическая координатная сеть) компонент приращения вектора перемещений интегрируются. Два из четырех интегралов устанавливают непрерывность нормальных к асимптотическим линиям (и располагающихся в касательной плоскости к поверхности максимальной скорости сдвига) составляющих приращения вектора перемещений. Два других интеграла указывают на сохранение вдоль асимптотических линий одного семейства скачков тех контравариантных компонент приращения вектора перемещений, которые соответствуют базисным векторам, нормальным асимптотическим линиям другого семейства.

Библиографический список

1. *Ивлев Д.Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124, № 3. С. 546–549; *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 15–20.
2. *Ивлев Д.Д.* О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. №3. С. 137; *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 20–21.
3. *Радаев Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарск. гос. ун-та, 2004. 147 с.
4. *Надаи А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 280 с.; *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч.1. Уруго-пластические деформации. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.
5. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
6. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
7. *Быковцев Г.И.* Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сб. статей. Владивосток: Дальнаука, 2002. С. 153.
8. *Malvern L.* Introduction to the Mechanics of Continuous Medium. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1969. 714 p.
9. *Washizu K.* A note on the conditions of compatibility// J. Math. Phys. 1958. V. 36. P. 306–312.
10. *Moriguti S.* Fundamental theory of dislocations of elastic bodies // Oyo Sugaku Rikigaku. 1947. V.1. P. 87–90.
11. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. М.: Высш. шк., 1964. 560 с.
12. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. С. 259–261.
13. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. С. 58–63.
14. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. С. 239–241.
15. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. С. 49–54.
16. *Радаев Ю.Н.* Дополнительные теоремы теории плоской и осесимметричной задачи математической теории пластичности// Вестн. Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучная сер. 2004. № 2(32). С. 41–61.
17. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
18. *Быковцев Г.И., Мяснянкин Ю.М.* О поверхностях скольжения в трехмерных жесткопластических телах // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 6. С. 1260–1262.
19. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
20. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д., Мяснянкин Ю.М.* О кинематических соотношениях на поверхностях скольжения в идеальных жесткопластических телах// Прикл. матем. и механика. 1968. Т. 32, вып. 4. С. 623–631.



ИНФОРМАТИКА

УДК 681.518

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ДЛЯ ПОИСКА МАСКИ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

С.В. Миронов

Саратовский государственный университет,
кафедра математической кибернетики и компьютерных наук
E-mail: MironovSV@info.sgu.ru

Рассматривается задача сокращения диагностической информации с использованием масок. Предлагается новый жадный алгоритм для решения упомянутой задачи. Приводятся статистические данные, подтверждающие эффективность предложенного алгоритма для диагностической информации, полученной для схем из каталога ISCAS'89.

On One Algorithm for Finding of a Mask of Diagnostic Information

S.V. Mironov

This paper describes an approach to reduction of a diagnostic information with a help of masks. The new algorithm for finding of a mask is proposed. The algorithm has appropriate time characteristics and small memory requirements. The experimental results show an effectiveness of proposed algorithm on fault dictionaries of circuits in ISCAS'89 benchmark set.

ВВЕДЕНИЕ

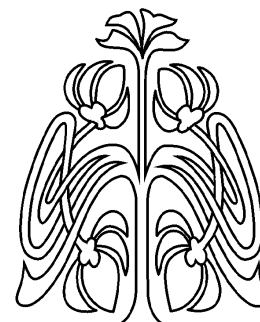
Диагностирование дискретных устройств (ДУ) требует хранения тестов, реакций на эти тесты исправного ДУ (эталонной реакции) и реакций всех его неисправных модификаций (словаря неисправностей). Всю эту информацию в совокупности называют диагностической информацией (ДИ).

Процесс диагностирования с использованием ДИ предполагает подачу на вход исследуемого ДУ диагностической последовательности, получения выходной последовательности и ее сравнение с реакциями в ДИ. Реакция в ДИ, идентичная полученной выходной последовательности, свидетельствует об исправности ДУ или о наличии в нем соответствующей неисправности.

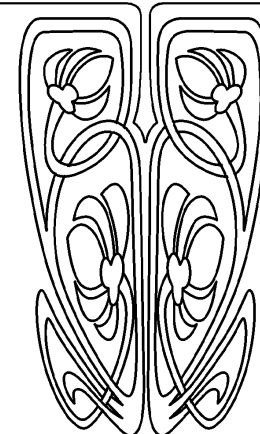
Для современных ДУ объем ДИ, как правило, чрезвычайно велик и его сокращение представляет собой актуальную задачу.

К сокращению ДИ предложено множество подходов [1–11]. Большинство из них предполагает значительное сокращение словаря неисправностей за счет того, что вместо полной реакции на диагностический тест в словаре сохраняется некоторая компактная свертка этой реакции. В некоторых случаях компактная свертка заменяет и реакцию эталонного устройства. Некоторые из таких подходов связаны с использованием так называемых масок ДИ [9–18], когда в словаре неисправностей в качестве компактной свертки сохраняется результат наложения маски на полную реакцию на диагностический тест.

Маску ДИ можно представить в виде битового вектора, каждый элемент которого соответствует некоторому разряду полной реакции ДУ на тестовую последовательность. Нулевые биты маски



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





соответствуют разрядам удаляемой (избыточной) информации в словаре неисправностей, единичные — оставляемым разрядам в ДИ для идентификации неисправностей. Результат наложения маски на выходную последовательность ДУ получается удалением разрядов полной реакции, соответствующих нулевым разрядам маски. Таким образом, объем ДИ после сокращения пропорционален количеству единичных разрядов в маске.

Процесс диагностирования с использованием маски ДИ предполагает наблюдение выходной последовательности исследуемого ДУ, получение компактной свертки этой последовательности и сравнение последней со свертками в ДИ.

Сокращение ДИ с помощью масок может быть частью или существенным дополнением других методов для сокращения объема словаря неисправностей.

Так, таблица неисправностей (ТН) часто используется в качестве словаря неисправностей. Эта таблица состоит из N строк и k столбцов, где N — число моделируемых неисправностей, а k — число входных наборов в диагностической последовательности. В i -й позиции строки ТН ставится 1, если по крайней мере на одном из выходов соответствующей моделируемой неисправности реакция на i -й тестовый набор отлична от реакции исправного ДУ, и 0 — в противном случае. Хотя использование словаря неисправностей в виде ТН в общем случае приводит к ухудшению разрешающей способности диагностирования, оно сокращает объем хранимой ДИ в m раз, где m — количество выходных полюсов ДУ.

Хотя сама ТН уже представляет собой сокращенную ДИ, ее объем может быть еще уменьшен с помощью маски. В этом случае информация в ТН, соответствующая неисправным модификациям ДУ, играет роль (вместо полных реакций на тест) исходных данных для нахождения маски.

Для повышения разрешающей способности диагностирования в [1] было предложено использовать словарь неисправностей, полученный из ТН добавлением некоторой информации из полной ДИ, для выбора которой может быть использован жадный алгоритм. Упомянутый жадный алгоритм есть, по сути, не что иное, как алгоритм поиска маски ДИ.

Еще один метод подобного рода предложен в [2], где диагностическая последовательность делится на блоки, и в словаре неисправностей хранятся совместные сигнатуры для реакции на каждый блок тестовых векторов. Вторая фаза этого метода состоит в нахождении маски для словаря неисправностей, полученного из ТН специальным образом.

В [3] предложена организация словаря неисправностей, при которой для каждой неисправной модификации сохраняются разряды полной реакции, отличные от соответствующих разрядов эталонной реакции. Такой словарь неисправностей может быть более компактным, если он создается на основе ДИ, предварительно сокращенной с помощью маски, т. е. не содержащей избыточной информации.

Понятно, что идеальная общая маска должна максимально сокращать объем ДИ без потери полезной информации, т. е. не допускается потери глубины диагностирования. Задача нахождения такой маски относится к числу переборных и, следовательно, при больших объемах полной ДИ может потребовать неприемлемых временных затрат. Возможным выходом из данной ситуации является применение различных эвристик, доставляющих хотя и не оптимальное, но достаточно близкое к оптимальному решение. Так, в работе [2] задача нахождения маски сводится к задаче нахождения минимального покрытия множества, что требует дополнительного пространства памяти порядка $O(kN^2)$, а общая временная сложность — алгоритма порядка $O(kN^3)$.

В настоящей работе предлагается новый эффективный жадный алгоритм для нахождения маски ДИ, требующий использования дополнительной памяти очень небольшого объема и обладающий малой временной сложностью.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Далее будем использовать следующие обозначения.

Пусть $B = \{0, 1\}$ — бинарный алфавит.

Предполагается, что рассматриваемое ДУ f_0 имеет m выходных полюсов, множество $F = \{f_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ есть множество его неисправных модификаций (неисправностей) и на каждом выходе упомянутых ДУ может появиться только двоичный сигнал (сигнал из B).

Пусть $T = t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ — диагностическая последовательность (тест) для рассматриваемого



устройства, где t_j , $0 \leq j \leq k - 1$ — входные вектора. Тогда количество битов $n = mk$ в полной реакции ДУ на тест назовем объемом полной реакции. Саму полную реакцию устройства f_i на тест T можно представить в виде двоичного вектора $D_i \in B^n$, в котором на s -м месте, $0 \leq s \leq n - 1$, находится значение сигнала на выходном полюсе ДУ с номером $s - m \lfloor s/m \rfloor$ после подачи входного вектора с номером $\lfloor s/m \rfloor$. Здесь запись $\lfloor s/m \rfloor$ означает целую часть от деления s на m .

Представим ДИ для ДУ f_0 с множеством неисправностей F в виде матрицы D порядка $(N + 1) \times n$, где строка с номером i , $0 \leq i \leq N$, есть вектор D_i . Тогда объем диагностической информации для ДУ f_0 есть количество элементов в матрице D .

Обозначим $R(D)$ — число пар отличных друг от друга строк в матрице D и $P = C_{N+1}^2 = N(N + 1)/2$ — общее число пар строк из D . Величину $R(D)/P$ будем использовать в качестве меры разрешающей способности диагностирования с использованием ДИ D .

Определим маску H диагностической информации D в виде вектора из B^n , каждый элемент которого соответствует столбцу матрицы D . Объемом маски H будем называть количество ненулевых элементов в ней. Результат применения маски H к ДИ D представим в виде новой матрицы D_H , полученной из D удалением всех столбцов, соответствующих нулевым разрядам в H .

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

В работе рассматривается следующая задача: требуется найти такую маску H минимального объема для заданной ДИ D , чтобы для матрицы D_H выполнялось $R(D_H)/P = R(D)/P$.

Последнее равенство означает, что сокращение ДИ должно произойти без потери разрешающей способности диагностирования. В нашем случае оптимальный объем такой маски может варьироваться в пределах от $\lceil \log_2(N + 1) \rceil$ до N .

В предлагаемом ниже алгоритме решения сформулированной задачи используются идеи известного алгоритма С4.5, предложенного в [19] для решения задач классификации.

Будем производить разбиение множества неисправностей F в соответствии со значениями в столбцах матрицы D . Каждый столбец матрицы D разбивает множество неисправностей F на два блока (подмножества) следующим образом: неисправности, для которых значение в данном столбце равно единице, помещаются в первый блок, а неисправности, для которых значение равно нулю — во второй. Можно производить дальнейшее разбиение каждого из полученных блоков в соответствии со значениями в других столбцах матрицы D . Если $R(D)/P = 1$, то, производя последовательно разбиение множества F с помощью всех столбцов матрицы D , получим в результате одноэлементные блоки.

Таким образом, найти маску ДИ D означает найти такое подмножество столбцов из D , с помощью которого можно получить то же самое разбиение множества F , что и с помощью D .

Для поиска такого подмножества столбцов будем использовать следующий подход.

Пусть имеется множество неисправностей $F' \subset F$ и $|F'|$ — количество элементов в F' . Тогда величина

$$I(F') = \log_2 |F'|$$

представляет собой среднее количество информации, необходимое для идентификации одной неисправности из множества F' . Когда множество F' разбивается на блоки F'_1, F'_2, \dots, F'_z в соответствии со значениями l -го столбца матрицы D , то величина

$$I_l(F') = \sum_{j=1}^z \frac{|F'_j|}{|F'|} \cdot I(F'_j)$$

есть количество информации, необходимое для идентификации неисправности из множества F' после разбиения.

Следовательно, для получения наилучшего разбиения (содержащего наименьшие по мощности блоки) необходимо выбирать столбец, который максимизирует разность

$$G(l, F') = I(F') - I_l(F').$$



Пусть \tilde{F} — разбиение множества F . Тогда величина

$$I'(\tilde{F}) = \sum_{F' \in \tilde{F}} \frac{|F'|}{|F|} \cdot I(F')$$

представляет собой среднее количество информации, необходимое для идентификации произвольной неисправности из F . Заметим, что после проведения разбиения всех блоков из \tilde{F} в соответствии с l -м столбцом величина

$$I'_l(\tilde{F}) = \sum_{F' \in \tilde{F}} \frac{|F'|}{|F|} I_l(F')$$

есть среднее количество информации, необходимое для идентификации произвольной неисправности после разбиения. В этих терминах для получения наилучшего разбиения необходимо выбрать столбец, доставляющий максимум величине

$$G'(l, \tilde{F}) = I'(\tilde{F}) - I'_l(\tilde{F}). \quad (1)$$

Если \tilde{F} состоит из множеств неразличимых неисправностей, то $G'(l, \tilde{F}) = 0$ для любого l . Это обстоятельство может выступать в качестве условия завершения процесса разбиения.

Используя вышеприведенные рассуждения, можно сформулировать алгоритм для нахождения маски ДИ D .

АЛГОРИТМ

Вход: D — диагностическая информация; F — множество неисправностей; M — максимальный объем маски результата (по умолчанию $M = N$).

Выход: H — маска ДИ D .

1. Положить $\tilde{F} = \{F\}$, $i = 0$.
2. Положить $H = 000 \dots 0$ — битовый вектор из n нулей.
3. Найти значение l , доставляющее максимум величине $G'(l, \tilde{F})$.
4. Положить $Gain = G'(l, \tilde{F})$.
5. Если $Gain = 0$, выдать H и закончить алгоритм. В противном случае перейти к шагу 6.
6. Произвести разбиение блоков из \tilde{F} в соответствии со значениями в l -м столбце матрицы D .

Результат разбиения записать в \tilde{F} .

7. Положить $H[l] = 1$, $i = i + 1$.

8. Если $i = M$, то выдать H и закончить алгоритм. Иначе перейти к шагу 3.

Так как для любой пары различимых в D неисправностей найдется хотя бы один различающий их столбец, наличие такой пары в одном блоке разбиения \tilde{F} эквивалентно тому, что значение величины (1) отлично от нуля. Следовательно, разрешающая способность диагностирования D совпадает с разрешающей способностью для D_H , если H получена с помощью предложенного алгоритма.

Стоит заметить, что в процессе работы предложенный алгоритм требует дополнительной памяти только для сохранения маски H и разбиения \tilde{F} , объем которой равен величине $O(k) + O(N)$ при временной сложности $O(kN^2)$.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для оценки эффективности предложенного алгоритма были проведены численные эксперименты с диагностической информацией для ДУ из набора схем ISCAS'89, характеристики которых описаны в [20]. Для каждого ДУ была получена ДИ при моделировании одиночных неисправностей с применением тестовых векторов, сгенерированных с помощью пакета программ НИТЕС [21]. Результаты экспериментов, демонстрируемые ниже, получены на PC Intel Pentium III 1700 MHz, 256 MB RAM.

В ходе первой серии экспериментов для каждого варианта ДИ была найдена маска с помощью вышеизложенного алгоритма. Результаты экспериментов приведены в табл. 1. В первом столбце этой таблицы приводится наименование ДУ в соответствии с [20]. Во втором столбце таблицы указано количество рассматриваемых неисправных модификаций для ДУ. В третьем и четвертом столбцах содержатся соответственно количество битов в полной реакции устройства на тест и объем полной



ДИ для устройства. Пятый столбец табл. 1 показывает объем найденной маски для соответствующего ДУ, а в шестом столбце приведен объем ДИ после сокращения с помощью найденной маски.

Таблица 1

Результаты поиска маски полной ДИ

ДУ	N	n	Объем ДИ, бит	Объем маски, бит	Объем сокращенной ДИ, бит	Доля сокращенной ДИ от полной ДИ, %	Время работы алгоритма, сек
S297	177	1932	343896	61	10797	3.16	1.464
S343	240	1397	336677	59	14160	4.22	1.272
S349	243	1474	359656	62	15066	4.21	1.440
S382	190	12444	2376804	55	10450	0.44	9.072
S386	274	2002	550550	91	24934	4.55	3.360
S400	194	13284	2590380	58	11252	0.44	10.272
S444	191	13440	2580480	60	11460	0.45	10.224
S510	446	700	312900	70	31220	10.00	1.512
S526	138	13548	1883172	38	5244	0.28	5.784
S641	345	5016	1735536	132	45540	2.63	16.944
S713	343	3979	1368776	131	44933	3.29	13.464
S820	712	21185	15104905	244	173728	1.15	304.776
S832	719	21603	15554160	253	181907	1.17	324.432
S953	326	322	105294	91	29666	28.26	0.648
S1423	293	750	220500	93	27249	12.40	1.368
S1488	1359	22230	30232800	384	521856	1.73	1300.056

Во второй серии экспериментов для рассматриваемых ДУ были построены ТН, после чего к каждой ТН был применен алгоритм нахождения маски с целью еще большего сокращения ДИ. Результаты данной серии экспериментов приведены в табл. 2. В третьем столбце этой таблицы приведено количество битов в строке ТН. Как видно из табл. 2, объем ТН может быть существенно сокращен, несмотря

Таблица 2

Сокращение объема ТН с помощью маски

ДУ	N	k	Объем ТН, бит	Объем маски, бит	Объем сокращенной ТН, бит	Доля сокращенной ДИ от полной ДИ, %	Время работы алгоритма, сек
S298	177	322	56994	30	5310	9.32	0.168
S344	240	127	30480	29	6960	22.83	0.096
S349	243	134	32562	35	8505	26.12	0.120
S382	190	2074	394060	28	5320	1.35	1.032
S386	274	286	78364	65	17810	22.73	0.624
S400	194	2214	429516	32	6208	1.45	2.376
S444	191	2240	427840	30	5730	1.34	2.352
S526	138	2258	311604	28	3864	1.24	1.464
S641	345	209	72105	58	20010	27.75	0.576
S713	343	173	59339	58	19894	33.53	0.456
S820	712	1115	793880	147	104664	13.18	21.816
S832	719	1137	817503	151	108569	13.28	22.080
S953	326	14	4564	13	4238	92.86	0.024
S1423	293	150	43950	58	16994	38.67	0.360
S1488	1359	1170	1590030	158	214722	13.50	64.056

на тот факт, что объем ТН уже значительно меньше объема исходной ДИ. Принимая во внимание незначительность времени на проведение такого сокращения (чуть более минуты для самой большой



по объему ТН), отметим, что такой прием может быть полезен в качестве дополнения для сокращения ДИ с помощью ТН.

В следующей серии экспериментов проводился поиск маски фиксированного объема для тех же ТН, что использовались в предыдущей серии экспериментов. Объем искомой маски был нами заранее ограничен величиной $M = \lceil \log_2(N + 1) \rceil$. Результат применения алгоритма поиска маски приведен в табл. 3. Из этой таблицы видно, что наибольшая потеря в разрешающей способности диагностирования происходит при сокращении ТН для ДУ с наибольшей по объему ДИ. Но, с другой стороны, сокращение ДИ в 100 раз повлекло за собой потерю разрешающей способности в пределах, не превышающих 20%.

Таблица 3

Значительное сокращение объема ТН с помощью маски

ДУ	N	k	$\frac{R(D)}{P}$	M	Объем сокращенной ТН, бит	Доля сокращенной ДИ от полной ДИ, %	Время работы алгоритма, сек	$\frac{R(D_H)}{P}$	Потеря разрешающей способности диагностирования, %
S298	177	322	0.997304	8	1416	2.48	0.048	0.978814	1.85
S344	240	127	0.997455	8	1920	6.30	0.024	0.967434	3.01
S349	243	134	0.997381	8	1944	5.97	0.024	0.970445	2.70
S382	190	2074	0.998273	8	1520	0.39	0.384	0.974770	2.35
S386	274	286	0.999599	9	2466	3.15	0.072	0.920189	7.94
S400	194	2214	0.998184	8	1552	0.36	0.432	0.974360	2.39
S444	191	2240	0.997740	8	1528	0.36	0.408	0.972114	2.57
S526	138	2258	0.994922	8	1104	0.35	0.264	0.975352	1.97
S641	345	209	0.999916	9	3105	4.31	0.096	0.956539	4.34
S713	343	173	0.999915	9	3087	5.20	0.072	0.955313	4.46
S820	712	1115	0.999633	10	7120	0.90	1.584	0.820948	17.88
S832	719	1137	0.999682	10	7190	0.88	1.320	0.832373	16.74
S953	326	14	0.977857	9	2934	64.29	0.012	0.968816	0.92
S1423	293	150	0.999930	9	2637	6.00	0.072	0.930268	6.97
S1488	1359	1170	0.999764	11	14949	0.94	6.384	0.890245	10.95

Наконец, для того чтобы продемонстрировать эффективность предложенного алгоритма, был реализован метод совместных сигнатур сокращения ДИ, предложенный в [2]. Во второй фазе этого метода ищется маска для словаря неисправностей, полученного из ТН после прохождения первой фазы. В оригинальном алгоритме задача поиска маски сводится к задаче нахождения минимального покрытия множества, для чего производится дополнительное построение так называемой матрицы различимости. В табл. 4 сравниваются результаты применения реализованного метода с результа-

Таблица 4

Реализация метода совместных сигнатур для сокращения ДИ

ДУ	N	k	Объем ТН, бит	Результаты оригинального метода				Результаты модифицированного метода		
				Объем маски, бит	Объем сокращенной ТН, бит	Время работы алгоритма, сек	Необходимый объем дополнительной памяти, КБ	Объем маски, бит	Объем сокращенной ТН, бит	Время работы алгоритма, сек
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S298	150	322	48300	14	2100	2.304	439.25	16	2400	0.048
S344	187	127	23749	20	3740	2.328	269.61	21	3927	0.024
S349	190	134	25460	17	3230	2.712	293.70	19	3610	0.024
S382	165	2074	342210	18	2970	36.216	3425.44	16	2640	0.360



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
S386	263	286	75218	41	10783	38.976	1202.83	42	11046	0.120
S400	167	2214	369738	20	3340	43.944	3746.12	20	3340	0.432
S444	158	2240	353920	17	2686	39.504	3391.45	20	3160	0.792
S526	108	2258	243864	16	1728	15.456	1592.62	16	1728	0.480
S641	342	209	71478	31	10602	59.640	1487.67	32	10944	0.216
S713	340	173	58820	35	11900	49.728	1217.04	38	12920	0.192
S820	641	1115	714715	84	53844	933.480	27918.55	84	53844	3.360
S832	656	1137	745872	77	50512	948.384	29818.49	76	49856	3.624
S953	138	14	1932	13	1794	0.04	0.096	13	1794	0.034
S1423	291	150	43650	33	9603	20.208	772.61	33	9603	0.144
S1488	1218	1170	1425060	77	93786	3004.39	105853.15	77	93786	9.408

тами применения того же метода, но в котором поиск маски осуществлялся по предложенному нами алгоритму. Для данной серии экспериментов использовались ТН с разрешающей способностью диагностирования равной 1. Табл. 4 показывает, что оба метода дают близкие друг к другу результаты. Вместе с тем, если принять во внимание временные затраты и затраты памяти, то можно сказать, что предложенный нами метод более предпочтителен для ДИ значительного объема. Другими словами, с ростом объема ДИ его эффективность становится существенно выше по сравнению с методом в [2].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Статистические данные, полученные в результате проведенных численных экспериментов с полутора десятками устройств из международного каталога ISCAS'89, подтверждают достаточно высокую эффективность алгоритма, предложенного в работе. Так, этот алгоритм осуществляют поиск маски за приемлемое время: в худшем случае оно не превышало 25 мин. при их реализации на C++ на PC Intel Pentium III 1700 MHz, 256 MB RAM. Получаемое решение дает возможность сократить ДИ до объема в диапазоне от 0.5% до 30% от первоначального, что в практическом плане является хорошим результатом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-08-18082).

Библиографический список

1. *Pomeranz I., Reddy S. M.* On the generation of small dictionaries for fault location // Proc. of the 1992 IEEE/ACM Intern. Conf. on Computer-Aided design (ICCAD '92). Los Alamitos, CA, USA, 1992. P. 272–279.
2. *Arslan B., Orailoglu A.* Fault dictionary size reduction through test response superposition // Proc. of the 2002 IEEE Intern. Conf. on Computer Design: VLSI in Computers (ICCD'02). Washington, DC, USA, 2002. P. 480–485.
3. *Voppana V., Hartanto I., Fuchs W. K.* Full fault dictionary storage based on labeled tree encoding // Proc. of 14th VLSI Test Symposium. Washington, DC, USA, 1996. P. 174–179.
4. *Abramovici M., Breuer M. A., Friedman A. D.* Digital Systems Testing and Testable Design. N.Y.: Computer Science Press, Inc., 1996.
5. *Ярмолик В. Н.* Контроль и диагностика цифровых узлов ЭВМ. Минск: Наука и техника, 1988.
6. *Ryan P. G., Fuchs W. K., Pomeranz I.* Fault dictionary compression and equivalence class computation for sequential circuits // Proc. of IEEE Intern. Conf. on Computer-Aided Design (ICCAD'93). Los Alamitos, CA, USA, 1993. P. 508–511.
7. *Voppana V., Fuchs W. K.* Fault dictionary compaction by output sequence removal // Proc. of the 1994 IEEE/ACM Intern. Conf. on Computer-aided design (ICCAD '94). Los Alamitos, CA, USA, 1994. P. 576–579.
8. *Chess B., Larrabee T.* Creating small fault dictionaries // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 1999. Vol. 18. № 3. P. 346–356.
9. *Малышенко Ю. В., Раздобрев А. Х.* Метод сокращения объема диагностической информации, используемой для поиска неисправностей // Автоматика и телемеханика. 1977. № 4. С. 160–164.
10. *Сперанский Д. В., Шатохина Н. К.* Методы оптимизации диагностической информации // Теоретические проблемы кибернетики. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. С. 129–132.
11. *Чипулис В. П.* Методы минимизации разрешающей способности и диагностической информации // Автоматика и телемеханика. 1975. № 3. С. 133–141.
12. *Чипулис В. П.* Исследование диагностической ин-



- формации при контроле и поиске неисправностей дискретных устройств // Автоматика и телемеханика. 1975. № 8. С. 150–157.
13. Чипулис В. П. Методы предварительной обработки и формы задания диагностической информации для поиска неисправностей дискретных устройств // Автоматика и телемеханика. 1977. № 4. С. 165–175.
14. Сперанский Д. В., Шатохина Н. К. Приближенные методы решения задач оптимизации глубины диагностирования дискретных устройств // Многопроцессорные вычислительные структуры. Таганрог: Изд-во Таганр. радиотехн. ин-та, 1985. Вып. 7 (XIV) С. 70–72.
15. Вознесенский С. С., Раздобреев А. Х. Трудоемкость поиска неисправностей как критерий качества при сокращении объема диагностической информации // Электронное моделирование. 1980. № 4. С. 83–86.
16. Барашко А. С., Скобцов Ю. А., Сперанский Д. В. Моделирование и тестирование дискретных устройств. Киев: Наук. думка, 1992.
17. Сперанский Д. В. Об одном подходе к решению задач сокращения объема диагностической информации // Автоматика и телемеханика. 1984. № 3. С. 151–160.
18. Шаршунов С. Г. Особенности диагноза технического состояния многовыходных объектов с использованием таблиц неисправностей // Автоматика и телемеханика. 1973. № 12. С. 161–168.
19. Quinlan J. R. C4.5: programs for machine learning. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1993.
20. Brglez F., Bryan D., Kozminski K. Combinational profiles of sequential benchmark circuits // Proc. of Intern. Symposium on Circuits and Systems. Portland, OR, USA, 1989 P. 1929–1934.
21. Niermann T., Patel J. HITEC: a test generation package for sequential circuits // Proc. of European Design Automation Conf. Los Alamitos, CA, USA, 1991. P. 214–218.

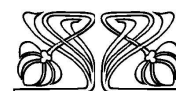
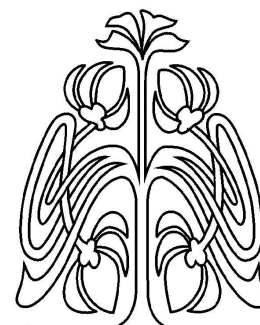
ХРОНИКА

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «XVIII СЕССИЯ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ ПО МОДЕЛЯМ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

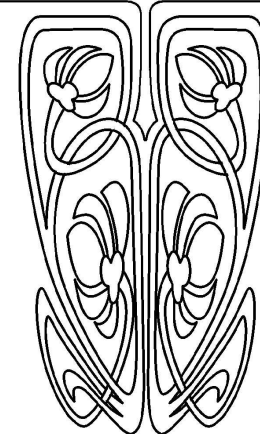
Международная конференция «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» проходила с 27 августа по 1 сентября 2007 года в г. Саратове на базе Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского. Организаторами конференции были: Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, объединенный Научный совет РАН по комплексной проблеме *Механика*, Научный совет РАН по механике деформируемого твердого тела, Научный совет РАН по механике жидкости и газа, Российский национальный комитет по трибологии, Межведомственный научный совет по трибологии при РАН, Министерство образования и науки РФ, Союз научных и инженерных объединений (обществ), Российский фонд фундаментальных исследований, Институт проблем механики РАН, Институт проблем машиноведения РАН, Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.

Научный форум, ставший традиционным, проводился уже в 18 раз. Торжественное открытие конференции состоялось 28 августа 2007 года в актовом зале X учебного корпуса СГУ им. Н.Г. Чернышевского. Открыл Международную конференцию «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» сопредседатель Оргкомитета академик РАН, руководитель школы Никита Федорович Морозов, который в своей речи подчеркнул традиционность проведения летних школ по моделям механики сплошной среды, проанализировал деятельность, достижения и перспективы развития, отметил актуальность тематики конференции, рассказал об особенностях нынешней конференции. Затем с приветственным словом к участникам конференции обратился сопредседатель Оргкомитета ректор СГУ Леонид Юрьевич Коссович. В своем выступлении он ознакомил гостей Саратова с историей и достижениями Саратовского государственного университета, рассказал о развитии механики в университете.

Проблематика исследований, проводимых в России по механике сплошной среды, обширна и затрагивает все существующие в данной области направления. Наиболее актуальные с точки зрения мировой науки проблемы были представлены вниманию слушателей в обзорных лекциях 28 и 29 августа 2007 года, а также были рассмотрены во время работы секций конференции. Заслушаны обзорные лекции, секционные доклады и краткие сообщения по актуальным проблемам механики сплошной среды: модели вязкоупругопластических сред, волны в сплошных средах, механика разрушения и повреждений, механика контактного взаимодействия и трибология, механика наращиваемых тел, динамика неустойчивых систем, турбулентные течения жидкости и газа, модели струйных и отрывных течений, модели многокомпонентных и многофазных сред, горение и взрыв, проблемы вычислительной механики, модели в биомеханике и модели природных процессов.



ПРИЛОЖЕНИЯ





В работе конференции приняли участие российские ученые из Москвы, Санкт-Петербурга, Саратова, Перми, Воронежа, Волгограда, Краснодара, Казани, Сызрани, Перми, Уфы, Владивостока, Балашова, Нижнего Новгорода, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Обнинска, Таганрога, Самары, Сыктывкара, Томска, а также знаменитые ученые из Армении.

Участники конференции — крупные ученые и специалисты, работающие в области механики деформируемого тела, гидродинамики и биомеханики и в других областях.

Среди выступивших на конференции было 5 академиков РАН, 3 член-корреспондента РАН, 1 академик НАН Республики Армения и 1 член-корреспондент НАН Республики Армения.

Вниманию участников школы были представлены 23 обзорные лекции, тематика которых покрывает все разделы механики сплошной среды.

Была проведена работа четырех секций:

- Модели деформирования вязкоупругопластических тел.
- Модели в механике жидкости и газа.
- Модели разрушения деформируемых тел.
- Модели природных процессов и биомеханики.

Наиболее многочисленной и представительной была секция «Модели деформирования вязкоупругопластических тел». Руководили работой секции профессор Самарского университета Ю.Н. Радаев и профессор Института механики сплошных сред УрО РАН А.А. Роговой. Всего на секции было заявлено 23 стендовых и 32 устных доклада. Для работы секции было отобрано 18 докладов, показывающих современное состояние исследований, проводимых в областях теории упругости, теории вязкоупругости, теории пластичности. Данная секция объединила наиболее развитые с точки зрения теории и приложений исследования, идеи и методы которых питают и совершенно новые области. Следует отметить, что многие задачи данной секции вызваны к жизни потребностями машиностроения и инженерных наук.

Работа второй секции «Модели в механике жидкости и газа» проходила 30 и 31 августа 2007 года. Руководили работой секции профессор ИПМ РАН В.Б. Баранов и профессор ЦАГИ И.И. Липатов. Доклады, отобранные для представления в данной секции, посвящены фундаментальным исследованиям, связанным с совершенствованием моделей идеальных и вязких несжимаемых жидкостей и совершенного газа для описания специальных классов течений, ориентированные на наиболее актуальные проблемы современности и интересные с практической точки зрения.

Работа третьей секции «Модели разрушения деформируемых тел» проходила 30 августа 2007 года. Руководил работой секции профессор Московского городского университета управления Правительства Москвы В.А. Ковалев. В секции были заслушаны доклады, в которых излагались современные представления о процессе разрушения деформируемого твердого тела в условиях нагружения. Рассмотрены проблемы прочности тела при деформировании, а также вопросы образования и распространения трещин в хрупких и пластичных материалах.

Работа четвертой секции «Модели природных процессов и биомеханики» проходила 30 августа 2007 года. Руководил работой секции профессор Саратовского госуниверситета П.Ф. Недорезов. Доклады, представленные в четвертой секции, посвящены прикладным исследованиям, касающимся приложений аппарата механики сплошной среды к разработке новых моделей, применяемых на «стыке наук». Были доложены результаты исследований поведения биомеханических систем, геотермальных систем, исследования в области неустойчивых течений, магнитогидродинамических течений, сверхзвуковых сферически симметричных течений и т.д.

Всего на конференции были прочитаны 23 лекции, 58 аудиторных и 96 стендовых докладов.

В работе конференции приняли участие 5 академиков РАН, один академик НАН РА, 3 член-корреспондента РАН, один член-корреспондент НАН РА, 78 докторов наук, 112 кандидатов наук, 16 студентов и аспирантов вузов России, а также 83 студента и аспиранта вузов г. Саратова.

Состав участников школы по механике сплошных сред показал, что представленная на конференции область механики обеспечена высококвалифицированными научными кадрами. Однако новые исследования в настоящий момент финансируются государством явно недостаточно и прогрессирует процесс старения кадров.



Следует отметить высокую степень взаимного соответствия проблематики проектов, поддержанных РФФИ, и перечня актуальных проблем. Многие доклады конференции были сделаны в рамках выполнения проектов РФФИ, что отражено в соответствующих ссылках в трудах конференции.

Представленные на конференции лекции и доклады вновь подтвердили традиционно высокий уровень фундаментальных и прикладных исследований российских ученых в области механики сплошных сред, который соответствует мировому уровню, а по ряду направлений его превосходит. Заслушанные доклады показали, что успешно развиваются как традиционные, так и абсолютно новые направления, соответствующие современным потребностям производства, среди которых наиболее перспективными представляются приложения механики сплошных сред в нано- и биомедицинских технологиях.

Л.Ю. Коссович,
*ректор Саратовского государственного университета,
доктор физико-математических наук, профессор*