



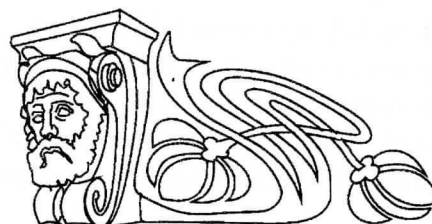
УДК 532.5; 532.135

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ СРЕДАХ

А.И. Сафрончик, М.И. Сафрончик

Саратовский государственный университет,
кафедра вычислительного эксперимента в механике
E-mail: samary@rotbox.ru

Рассматривается переход от одного стационарного режима течения вязкопластичной среды между параллельными плоскостями к другому. Задача ставится в рамках пятипараметрической модели, позволяющей учесть различие в поведении материала при нагружении и разгрузке, а также возможное проскальзывание вдоль твердых стенок. Гистерезис деформаций учитывается с помощью гипотезы Слибара–Паслая, а для учета «пристенного» скольжения предложена модель плавного перехода от прилипания к проскальзыванию. Решение задачи строится методом «мгновенных» собственных функций Меламеда–Гринберга.



Research into the time-depended transactional processes in viscoplastic fluids

A.I. Safronchik, M.I. Safronchik

The paper presents problem of transition from one steady-state conditions of viscoplastic fluid flow to another between parallel planes. The problem definition is given within the limits of five-parameter model, which permits to take up differences between behavior under stress and without stress and possible slippage along the solid walls. Hysteresis of deformation is considered by means of model of smooth transition from adhesion to slippage. The solution is determined by method of momentary eigenfunctions of Melamed–Grinberg.

Рассматривается переход от одного стационарного режима течения вязкопластичной среды между параллельными плоскостями к другому. Постановка задачи дается в рамках пятипараметрической модели, позволяющей учесть различие в поведении материала при нагружении и разгрузке, а также возможное проскальзывание вдоль твердых стенок.

Гистерезис деформаций учитывается с помощью модели Слибара — Паслая [1], которая для случая чистого сдвига имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \text{Нагружение} & \text{Разгрузка} \\
 \tau - \tau_{\partial} = \eta \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n} & \text{ при } \tau > \tau_{cm} & \tau - \tau_{\partial} = \eta \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n} & \text{ при } \tau > \tau_{\partial} \\
 0 = \frac{\partial V}{\partial n} & \text{ при } \tau \leq \tau_{cm} & 0 = \frac{\partial V}{\partial n} & \text{ при } \tau \leq \tau_{\partial}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь τ_{cm} — статический предел текучести; τ_{∂} — динамический предел текучести; η — структурная вязкость; V — скорость; n — нормаль к направлению скорости.

Для учета «пристенного скольжения» предлагается, в отличие от общепринятого подхода [2,4] — наличие вязкого смазочного слоя, другой подход, суть которого состоит в следующем: при достижении на твердой стенке касательным напряжением некоторого критического значения τ^* , материал начинает скользить вдоль этой стенки. Скорость скольжения предлагается считать пропорциональной разнице между фактическим и критическим напряжениями:

$$\tau - \tau^* = \lambda(V_{жс} - V_{ме}). \tag{2}$$

В этом случае удовлетворяется условие плавного перехода от «прилипания» к проскальзыванию вдоль твердой стенки. Легко заметить аналогию с гипотезой Н.П. Петрова для вязкой

жидкости [2], при этом коэффициент λ можно условно назвать коэффициентом «внешнего» трения вязкопластичной среды о твердую стенку. Наиболее вероятным соотношением между параметрами является $\tau_\partial < \tau_{cm} < \tau^*$.

Пусть вязкопластичный материал, заполняющий пространство между двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии $2H$, движется в одном направлении под действием постоянного перепада давления. Если перепад давления достаточно большой, $\frac{\Delta P_1}{l} > \frac{\tau^*}{H}$, и действует значительное время, то течение станет стационарным. Для нахождения распределения скоростей решается краевая задача:

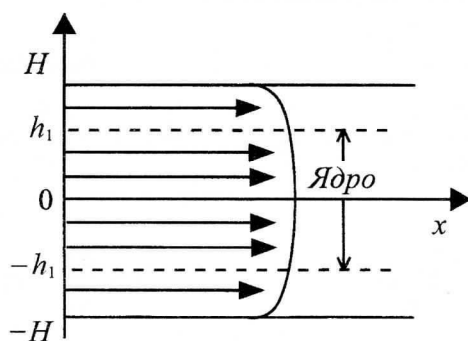
$$\frac{d^2 V_x}{dy^2} + \frac{\Delta P_1}{\eta l} = 0 \quad (h_1 < y < H); \tag{3}$$

$$\tau_\partial - \eta \left(\frac{dV_x}{dy} \right)_{y=H} - \tau^* = \lambda V_x(H); \tag{4}$$

$$\tau_\partial - \eta \left(\frac{dV_x}{dy} \right)_{y=h_1} = \tau_{cm}. \tag{5}$$

Здесь h_1 — половина высоты «ядра» течения (зоны, движущейся как одно целое без взаимного скольжения слоев) $h_1 = \frac{\tau_{cm} l}{\Delta P_1}$. Ввиду симметрии задача решается в области ($h_1 < y < H$).

Система координат выбрана как показано на рисунке.



Распределение скоростей легко находится и представляется в виде

$$V_x(y) = \frac{\Delta P_1}{2\eta l} (H^2 - y^2) - \frac{\tau_\partial}{\eta} (H - y) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\Delta P_1 H}{l} - \tau^* \right). \tag{6}$$

Пусть теперь перепад давления «мгновенно» уменьшился до значения $\frac{\Delta P_2}{l}$, причем

$\frac{\tau_\partial}{H} < \frac{\Delta P_2}{l} < \frac{\tau_{cm}}{H}$. Возникнет нестационарный переходный процесс, который при продолжитель-



ном воздействии этого перепада давления будет стремиться к другому стационарному режиму, в котором уже будет отсутствовать «пристенное скольжение», а распределение скоростей определяется по формуле

$$V_x(y) = \frac{\Delta P_2}{2\eta l} (H^2 - y^2) - \frac{\tau_\partial}{\eta} (H - y), \quad h_2 < y < H, \quad h_2 = \frac{\tau_\partial l}{\Delta P_2}. \quad (7)$$

В этом нестационарном процессе можно выделить два характерных временных этапа: этап, предшествующий восстановлению структуры, и этап её частичного восстановления. К началу переходного процесса напряжение во всей области течения превосходит τ_{cm} , а на границе «ядра» равно τ_{cm} , учитывая, что восстановление структуры происходит в областях, где напряжение меньше τ_∂ . На первом этапе размеры «ядра» остаются неизменными, а напряжение на его поверхности падает от τ_{cm} до τ_∂ . Как только напряжение на границе «ядра» достигнет τ_∂ , начнется второй этап – восстановление структуры. «Ядро» течения начнет увеличиваться, причем по неизвестному заранее закону.

Такое развитие событий возможно лишь в случае выполнения условия

$$\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} < \frac{\tau_\partial}{\tau_{cm}}. \quad (8)$$

В противном случае этап восстановления структуры будет отсутствовать, и переход от одного режима к другому будет происходить при неизменных размерах «ядра» течения.

При выполнении условия (8) этап, предшествующий восстановлению структуры, может происходить по двум возможным сценариям: либо все время $0 < t \leq T$ со скольжением ($\tau(H, t) > \tau^*$ и $\tau(h_1, T) = \tau_\partial$), либо частично в интервале $0 < t \leq t_1$ со скольжением ($\tau(H, t) > \tau^*$ и $\tau(h_1, t_1) > \tau_\partial$), а в интервале $t_1 < t \leq T$ без скольжения ($\tau(H, t) > \tau^*$ и $\tau(h_1, T) > \tau_\partial$). Прекращение скольжения вдоль твердой стенки в первом случае происходит уже на этапе восстановления структуры.

Рассмотрим для определенности второй случай. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\Delta P_2}{\rho l}, \quad h_1 < y < H, \quad 0 < t \leq t_1, \quad (9)$$

$V_x(y, 0) = V_x(y)$ – начальное условие определяется формулой (6),

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=h_1} = - \frac{\tau_1(t) - \tau_\partial}{\eta}, \quad (10)$$

$$\lambda V_x(H, t) + \eta \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=H} = \tau_\partial - \tau^*. \quad (11)$$

Здесь через $\tau(t_1)$ обозначается напряжение на поверхности «ядра» $\tau(h_1, t) = \tau_1(t)$, а $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ – аналог кинематической вязкости. Решение задачи (9) – (11) строится операционным методом. В изображениях она принимает вид

$$\frac{d^2 \bar{V}_x(y, S)}{dy^2} = \frac{S}{\nu} [\bar{V}_x(y, S) - V_x(y)] - \frac{\Delta P_2}{\eta l}, \quad (12)$$



$$\eta \left(\frac{d\bar{V}_x}{dy} \right)_{y=H} + \lambda \bar{V}_x(H, S) = \tau_\partial - \tau^*, \quad (13)$$

$$\left(\frac{d\bar{V}_x}{dy} \right)_{y=h_1} = \frac{-\bar{\tau}_1(S) - \tau_\partial}{\eta}. \quad (14)$$

Решение этой задачи может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{V}_x(y, S) = & V_x(y) + \frac{\Delta P_2}{\rho l S} \left[ch(H-y) \sqrt{\frac{S}{\nu}} - 1 \right] + \\ & + C \left[sh(H-y) \sqrt{\frac{S}{\nu}} + \frac{\eta}{\lambda} \sqrt{\frac{S}{\nu}} ch(H-y) \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Постоянная C определяется по формуле

$$C = - \frac{\tau_{cm} - \bar{\tau}_1(S) + \frac{\Delta P_2}{\rho l S} \eta \sqrt{\frac{S}{\nu}} sh(H-h_1) \sqrt{\frac{S}{\nu}}}{\eta \sqrt{\frac{S}{\nu}} \left[ch(H-h_1) \sqrt{\frac{S}{\nu}} + \frac{\eta}{\lambda} \sqrt{\frac{S}{\nu}} sh(H-h) \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right]}. \quad (16)$$

Опыт исследования переходных процессов для вязких жидкостей показал, что эти процессы весьма кратковременны. Можно предположить, что и для вязкопластичных сред время переходного процесса также невелико. Для малых времен, что соответствует большим по модулю значениям S , формулы (15) и (16) значительно упрощаются:

$$\bar{V}_x(y, S) = V_x(y) - \frac{\Delta P_1 - \Delta P_2}{\rho l S} \left(1 - \frac{\lambda}{\eta} \sqrt{\frac{\nu}{S}} e^{-(H-y)\sqrt{\frac{S}{\nu}}} \right). \quad (17)$$

Учитывая связь между градиентом скорости и напряжением на границе «ядра», найдем закон изменения касательного напряжения на этой границе.

Для малых времен он имеет вид

$$\tau_{cm} - \bar{\tau}_1(s) = \frac{2\lambda(\Delta P_1 - \Delta P_2)}{\rho l S} e^{-(H-h_1)\sqrt{\frac{S}{\nu}}}. \quad (18)$$

Обращая (16) и (19) и обозначив $A = \frac{\Delta P_1 - \Delta P_2}{\rho l}$, получаем:

$$V_x(y, t) = V_x(y) - A \left\{ t - \frac{\lambda}{3\eta} \left[2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} \left(2t - \frac{(H-y)^2}{\nu} \right) e^{-\frac{(H-y)^2}{4\nu t}} + \frac{(H-y)^3}{\nu} \operatorname{erfc} \left(\frac{H-y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right] \right\}, \quad (19)$$



$$\tau_1(t) = \tau_{cm} - 2\lambda A \left[\left(t + \frac{(H-h_1)^2}{2\nu} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{H-h_1}{2\sqrt{\nu t}} \right) - (H-h_1) \sqrt{\frac{t}{\pi\nu}} e^{-\frac{(H-h_1)^2}{4\nu t}} \right]. \quad (20)$$

Момент прекращения скольжения вдоль твердой стенки $t = t_1$ определяется из условия $V_x(H, t_1) = 0$, откуда

$$\frac{\Delta P_1 - \Delta P_2}{\rho l} \left(t_1 - \frac{4\lambda}{3\eta} t_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \right) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\Delta P_1 H}{l} - \tau^* \right). \quad (21)$$

В интервале $t_1 < t < T$ условие скольжения (13) заменяется условием прилипания $V_x(H, t) = 0$. Вводя новый отсчет времени $\theta = t - t_1$, сформулируем краевую задачу для временного интервала $0 < \theta \leq T - t_1$:

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial \theta} = \nu \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial y^2} + \frac{\Delta P_2}{\rho l}, \quad h_1 < y < H, \quad 0 < \theta \leq T - t_1; \quad (22)$$

$$V_x^*(y, 0) = V_x(y, t_1); \quad (23)$$

$$V_x^*(H, \theta) = 0; \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial V_x^*}{\partial y} \right)_{y=h_1} = -\frac{\tau(t_1 + \theta) - \tau_\theta}{\eta}; \quad (25)$$

$$V_x^*(h_1, \theta) = V_x(h_1, t_1) + \frac{1}{\rho l} \left[\Delta P_2 \theta - \frac{\Delta P_1}{\tau_{cm0}} \int_0^\theta \tau(t_1 + \xi) d\xi \right]. \quad (26)$$

Решение этой задачи будем искать в виде суперпозиции двух решений:

$$V_x^*(y, \theta) = V_x(y, t_1 + \theta) - U(y, \theta). \quad (27)$$

Здесь $V_x(y, t_1 + \theta)$ — решение на предыдущем временном отрезке, продолженное для больших значений времени. Для функции $U(y, \theta)$ получается краевая задача:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad h_1 < y < H, \quad 0 < \theta \leq T - t_1; \quad (28)$$

$$U(y, 0) = 0; \quad (29)$$

$$U(H, \theta) = \frac{\Delta P_1 - \Delta P_2}{\rho l} \left\{ \frac{4\lambda}{3\eta} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \left[(t_1 + \theta)^{\frac{3}{2}} - t_1^{\frac{3}{2}} \right] - \theta \right\}; \quad (30)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=h_1} = -\frac{\tau_1(t_1 + \theta) - \tau_2(\theta)}{\eta}; \quad (31)$$



$$U(h_1, \theta) = \frac{1}{\rho l} \left\{ \Delta P_2 t_1 - \frac{\Delta P_1}{\tau_{cm}} \left(\int_0^{t_1+\theta} \tau_1(\xi) d\xi - \int_0^\theta \tau_2(\xi) d\xi \right) \right\}; \quad (32)$$

Здесь $\tau_1(t)$ находится по формуле (20). Окончание данного периода находится из условия $\tau_2(T - t_1) = \tau_\partial$. Решение строится операционным методом и в изображениях представляется в виде

$$\bar{U}(y, S) \approx \frac{\Delta P_1}{\rho l} \left(\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} t_1 - \frac{1}{\tau_{cm}} \int_0^{t_1} \tau_1(\xi) d\xi \right) e^{-(y-h_1)\sqrt{\frac{S}{v}}}; \quad (33)$$

$$\bar{\tau}_2(S) = e^{st_1} \left(\bar{\tau}_1(S) - S \int_0^{t_1} \tau_1(\xi) e^{-s\xi} d\xi \right). \quad (34)$$

Обращая формулы (33) и (34), получаем

$$U(y, t - t_1) = \frac{\Delta P_1}{\rho l} \left(\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} t_1 - \frac{1}{\tau_{cm}} \int_0^{t_1} \tau_1(\xi) d\xi \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{y - h_1}{2\sqrt{v(t - t_1)}} \right); \quad (35)$$

$$\tau_2(t - t_1) = \tau_1(t) - \frac{\Delta P_1}{l} \left(\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} t_1 - \frac{1}{\tau_{cm}} \int_0^{t_1} \tau_1(\xi) d\xi \right) \sqrt{\frac{v}{\pi(t - t_1)}}. \quad (36)$$

Время окончания рассматриваемого периода определяется из уравнения

$$\tau_\partial = \tau_1(T) - \frac{\Delta P_1}{l} \left(\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} t_1 - \frac{1}{\tau_{cm}} \int_0^{t_1} \tau_1(\xi) d\xi \right) \sqrt{\frac{v}{\pi T}}. \quad (37)$$

С момента $t = T$ начнется этап восстановления структуры материала. Задача значительно усложняется, так как она решается в области с неизвестной границей. Вводя новый отсчет времени с $t = 0$, сформулируем краевую задачу для этого этапа:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = v \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\Delta P_2}{\rho l}, \quad h(t) < y < H, \quad t > 0;$$

$$V_x(y, 0) = V_x(y) - A \left\{ T - \frac{\lambda}{3\eta} \left[2\sqrt{\frac{vT}{\pi}} \left(2T - \frac{(H-y)^2}{v} \right) e^{-\frac{(H-y)^2}{4vT}} + \frac{(H-y)^3}{v} \operatorname{erfc} \left(\frac{H-y}{2\sqrt{vT}} \right) \right] \right\} -$$

$$-\frac{\Delta P_1}{\rho l} \left(\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} t_1 - \frac{1}{\tau_{cm}} \int_0^{t_1} \tau_1(\xi) d\xi \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{y - h_1}{2\sqrt{v(T - t_1)}} \right), \quad h(0) = h_1; \quad (38)$$



$$V_x(H, t) = 0; \quad (39)$$

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y=h(t)} \doteq 0; \quad (40)$$

$$V_x(y, t)|_{y=h(t)} = V_x(h_1, 0) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\Delta P_2}{l} t - \tau_\partial \int_0^t \frac{d\xi}{h(\xi)} \right). \quad (41)$$

Решение задачи (9), (38) — (41) строится методом «мгновенных» собственных функций Меламеда — Гринберга [5]. Рассмотрим функцию $V_x(y, t)$, представленную рядом Фурье:

$$V_x(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin \frac{\pi(2k-1)(H-y)}{2(H-h(t))}. \quad (42)$$

Коэффициенты ряда определяются обычным способом

$$A_k(t) = \frac{2}{H-h(t)} \int_{h(t)}^H V_x(y, t) \sin \frac{\pi(2k-1)(H-y)}{2(H-h(t))} dy. \quad (43)$$

Интегрируя два раза по частям и требуя, чтобы функция $V_x(y, t)$ удовлетворяла уравнению (9) и условиям (39) и (40), получим

$$\frac{(2k-1)^2 \pi^2 \nu}{4(H-h(t))^2} A_k(t) = -\frac{2}{H-h(t)} \int_{h(t)}^H \frac{\partial V_x(y, t)}{\partial t} \sin \frac{\pi(2k-1)(H-y)}{2(H-h(t))} dy + \frac{4\Delta P_2}{(2k-1)\pi \rho l}. \quad (44)$$

Входящий в (44) интеграл связан с $A_k(t)$ соотношением

$$\begin{aligned} \int_{h(t)}^H \frac{\partial V_x(y, t)}{\partial t} \sin \frac{\pi(2k-1)(H-y)}{2(H-h(t))} dy &= \frac{d}{dt} \left[\frac{H-h(t)}{2} A_k(t) \right] + \\ &+ (-1)^{k-1} V_x(h, t) h'(t) - \frac{\pi(2k-1)h'(t)}{2(H-h(t))^2} \int_{h(t)}^H (H-y) V_x(y, t) \cos \frac{\pi(2k-1)(H-y)}{2(H-h(t))} dy. \end{aligned} \quad (45)$$

Заменив $V_x(y, t)$ её представлением в виде ряда (42), запишем

$$\begin{aligned} &\int_{h(t)}^H (H-y) V_x(y, t) \cos \frac{\pi(2k-1)(H-y)}{2(H-h(t))} dy = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \int_{h(t)}^H (H-y) \cos \frac{\pi(2k-1)(H-y)}{2(H-h(t))} \sin \frac{\pi(2m-1)(H-y)}{2(H-h(t))} dy = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \int_0^{H-h(t)} z \left(\sin \frac{(m+k-1)\pi z}{H-h(t)} + \sin \frac{(m-k)\pi z}{H-h(t)} \right) dz = \end{aligned}$$



$$= \frac{(H-h)^2(2k-1)}{2\pi} \sum_{m \neq k=1}^{\infty} A_m(t) \frac{(-1)^{m+k-1}}{(m+k-1)(m-k)} + \frac{1}{2\pi} A_k(t) \frac{(H-h)^2}{(2k-1)}. \quad (46)$$

Используя формулы (44), (45) и (46), а также значение скорости «ядра» в виде ряда

$$V_x(y, t)|_{y=h(t)} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_m(t), \quad (47)$$

получим бесконечную связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов ряда

$$\begin{aligned} A'_k(t) + \frac{(2k-1)^2 \pi^2 \nu}{4(H-h(t))^2} A_k(t) + \frac{h'(t)}{2(H-h(t))} A_k(t) = \\ = \frac{4\Delta P_2}{(2k-1)\pi \rho l} - \frac{h'(t)}{2(H-h(t))} \sum_{m \neq k=1}^{\infty} A_m(t) \frac{(-1)^{m+k}(2m-1)^2}{(m+k-1)(m-k)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Положив $\frac{A_k(t)}{\sqrt{H-h(t)}} = B_k(t)$, приведем уравнение (48) к более простому виду:

$$\begin{aligned} B'_k(t) + \frac{(2k-1)^2 \pi^2 \nu}{4(H-h(t))^2} B_k(t) = \frac{4\Delta P_2}{(2k-1)\pi \rho l \sqrt{H-h(t)}} - \\ - \frac{h'(t)}{2(H-h(t))} \sum_{m \neq k=1}^{\infty} B_m(t) \frac{(-1)^{m+k}(2m-1)^2}{(m+k-1)(m-k)}. \end{aligned} \quad (49)$$

При выполнении расчетов бесконечная система укорачивается до конечного числа уравнений. В работе [5] показано, что решение укороченной системы вида (49) стремится к точному при неограниченном увеличении числа уравнений. К системе уравнений (49) присоединим соотношения, вытекающие из условий (41) и (47):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} B_k(t) = \frac{F(t)}{\sqrt{H-h(t)}}, \quad \frac{dF}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta P_2}{l} - \frac{\tau_{\partial}}{h(t)}, \quad (50)$$

где $F(t) = V_x(y, t)|_{y=h(t)}$ — скорость «ядра» течения.

Переходя к безразмерным переменным по формулам

$$y = H\bar{y}, \quad t = \frac{H^2}{\nu} \bar{t}, \quad \frac{\Delta P_1}{l} = a \frac{\tau^*}{H} \quad (a > 1), \quad \lambda = \frac{\eta}{H} \bar{\lambda}, \quad Sen = \frac{\tau H}{\nu U},$$

запишем расчетные формулы в безразмерном виде:

$$\bar{t}_1 + \frac{4\bar{\lambda}}{3\sqrt{\pi}} \bar{t}_1^{\frac{3}{2}} = \frac{a-1}{a\bar{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} \right)}; \quad (51)$$



$$\left(\bar{T} + \frac{(1 - \bar{h}_1)^2}{2} \right) \operatorname{erfc} \frac{1 - \bar{h}_1}{2\sqrt{\bar{T}}} - (1 - \bar{h}_1) \sqrt{\frac{\bar{T}}{\pi}} e^{-\frac{(1 - \bar{h}_1)^2}{4\bar{T}}} = \frac{\operatorname{Sen}^{cm} - \operatorname{Sen}^\delta}{2a\bar{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} \right)}; \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}'_k(\bar{t}) + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4(1 - \bar{h}(\bar{t}))^2} \bar{B}_k(\bar{t}) &= \frac{4a \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} \operatorname{Sen}^*}{(2k-1)\pi \sqrt{1 - \bar{h}(\bar{t})}} - \\ &- \frac{\bar{h}'(\bar{t})}{2(1 - \bar{h}(\bar{t}))} \sum_{m \neq k=1}^{\infty} \bar{B}_m(\bar{t}) \frac{(-1)^{m+k} (2m-1)^2}{(m+k-1)(m-k)}. \end{aligned} \quad (53)$$

Начальное значение $\bar{B}_k(0)$ определяется по формуле

$$\bar{B}_k(0) = \frac{2}{(1 - \bar{h}(\bar{t}))^2} \int_0^1 \bar{V}_x(\bar{y}, \bar{T}) \sin \frac{\pi(2k-1)(1 - \bar{y})}{2(1 - \bar{h}_1)} d\bar{y}. \quad (54)$$

Условия (50) в безразмерной форме приобретут вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \bar{B}_k(\bar{t}) = \frac{\bar{F}(\bar{t})}{\sqrt{1 - \bar{h}(\bar{t})}}, \quad \bar{h}(\bar{t}) = \frac{\operatorname{Sen}^\delta}{a \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} \operatorname{Sen}^* - \frac{d\bar{F}}{d\bar{t}}}. \quad (55)$$

Решение системы (53) находится методом последовательных приближений. Сходимость метода обеспечивается теоремой сравнения Вестфаля. Снабдив последовательные приближения индексом $n = 0, 1, \dots$, придадим расчетным формулам окончательный вид:

$$\begin{aligned} \bar{B}_{k,n}(\bar{t}) &= \bar{B}_k(0) e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 \bar{t}}{4} \int_0^{\bar{t}} \frac{d\xi}{(1 - \bar{h}_n(\xi))^2}} + \frac{4a \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} \operatorname{Sen}^*}{(2k-1)\pi} \int_0^{\bar{t}} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 \bar{t}}{4} \int_\xi^{\bar{t}} \frac{d\sigma}{(1 - \bar{h}_n(\sigma))^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \bar{h}_n(\xi)}} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{m \neq k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k} (2m-1)^2}{(m+k-1)(m-k)} \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{B}_m(\xi) \bar{h}'_n(\xi)}{1 - \bar{h}_n(\xi)} e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 \bar{t}}{4} \int_\xi^{\bar{t}} \frac{d\sigma}{(1 - \bar{h}_n(\sigma))^2}} d\xi, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \bar{B}_{k,n}(\bar{t}) = \frac{\bar{F}_n(\bar{t})}{\sqrt{1 - \bar{h}_n}}, \quad \bar{h}_{n+1}(\bar{t}) = \frac{\operatorname{Sen}^\delta}{a \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} \operatorname{Sen}^* - \frac{d\bar{F}_n}{d\bar{t}}}. \quad (57)$$

За нулевое приближение берется $\bar{h}_0(\bar{t}) = \bar{h}_1 = \frac{\operatorname{Sen}^{cm}}{a\operatorname{Sen}^*}$. Коэффициенты ряда и скорость «ядра» течения для нулевого приближения имеют вид



$$\bar{B}_{k,0}(\bar{t}) = \bar{B}_k(0)e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 \bar{t}}{4(1-\bar{h}_1)^2}} + \frac{16a \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} Sen^* (1-\bar{h}_1)^2}{(2k-1)^3 \pi^3} \left(1 - e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 \bar{t}}{4(1-\bar{h}_1)^2}} \right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \bar{B}_{k,0}(\bar{t}) = \frac{\bar{F}_0(\bar{t})}{\sqrt{1-\bar{h}_1}}, \quad \bar{h}_1(\bar{t}) = \frac{Sen^0}{a \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} Sen^* - \frac{d\bar{F}_0}{d\bar{t}}}. \quad (58)$$

Отметим, что при неограниченном увеличении времени, любое из приближенных значений высоты «ядра» течения стремится к точному $\bar{h}_n(\infty) = \frac{\tau_0 l}{H \Delta P_2}$. Предварительные расчеты для реального диапазона чисел Сен-Венана, перепадов давления и коэффициентов «внешнего» трения показывают, что уже первое приближение удовлетворительно описывает поведение границы зоны течения.

Библиографический список

1. Slibar A., Paslay P.R. Retarded Flow of Bingham Materials // J. of Appl. Mech. 1959. March. P. 107–112.
2. Петров Н.П. Гидродинамическая теория смазки / Под ред. Л.С. Лейбензона. М., 1934. С. 245.
3. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластичных сред. М., 1970. С. 430.
4. Сафрончик А.И. Неустановившееся течение вязкопластичной среды между параллельными стенками с учетом эффектов пристенного скольжения и запаздывания восстановления структуры // Аэродинамика. Саратов, 1975. Вып. 4(7). С. 166–181.
5. Меламед В.Г. Сведение задачи Стефана к системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1958. № 7. С. 848–869.