— восстановление правильного функционирования сложных систем, когда невозможно или нецелесообразно немедленное проведение ремонтно-восстановительных мероприятий, а также исключается подключение резервной или дублирующей составляющей или она вышла из строя;

— организация модификации поведения сложных систем без их физического перепроектирования, только за счет использования текущих функциональных возможностей;

— разработка отказоустойчивых систем, использующих весь спектр потенциальных средств для восстановления своего поведения — от традиционного резервирования-дублирования до особенностей с существующего в данный момент времени закона функционирования.

Библиографический список

1. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп / Под ред. М.А. Арбиба; пер. с англ. М., 1975.

2. *Богомолов А.М., Сытник А.А., Твердохлебов В.А.* Автоматные модели и рекурсивный конструктивизм. Саратов, 1992.

3. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. М., 1977.

4. *Пикар С.* О базисах симметрической группы // Кибернетический сборник. 1965. № 1.

5. *Сытник А.А.* Методы и модели восстановления поведения автоматов // Автоматика и телемеханика. 1992. № 11.

6. *Sytnik A.A., Posohina N.I.* On some methods of discret systems behaviour simulation // CASYS'97: The 1st Intern. Conf. on computing anticipatory systems. Liege, 1997.

УДК 519.17

Т-НЕПРИВОДИМЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОБЪЕДИНЕНИЙ ПОЛНЫХ ГРАФОВ

С.Г. Курносова
Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии
E-mail: csc@info.sgu.ru

Т-неприводимое расширение является одним из видов оптимальных расширений для графов. Конструкции оптимальных расширений применяются в диагностике дискретных систем и криптографии.
Расширением n-вершинного графа G называется граф H с $n+1$ вершинами такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H. У любого графа есть тривиальное расширение – соединение $G+v$ графа G с одной вершиной. Т-неприводимые расширения получаются из тривиального удалением максимального числа ребер, не нарушающим свойство расширения.
Задача нахождения графа по его Т-неприводимому расширению имеет линейную сложность, а для задачи отыскания всех Т-неприводимых расширений произвольного графа в настоящее время эффективного алгоритма нет. В данной работе предлагается алгоритм построения всех Т-неприводимых расширений и оценка их количества для объединений полных графов, каждый из которых имеет не менее одной вершины.

T-irreducible extensions for unions of complete graphs

S.G. Kurnosova

T-irreducible extension is one of kinds of optimal extensions of graphs. Constructions of optimal extensions are used in diagnosis of discrete systems and in cryptography.
A graph H with $n+1$ vertices is called an extension of a graph G with n vertices if G can be embedded in every maximal subgraph of H. Any graph G has the trivial extension that is the join $G+v$ of G with some outer vertex v. T-irreducible extensions are obtained from the trivial extension by removal of maximal number of edges in such a way that the extension property is preserved.
The problem of finding of the initial graph from any of its T-irreducible extensions has a linear complexity, but until now there is no efficient algorithm for finding of all T-irreducible extensions of a given graph. Graphs studied in this paper are unions of complete graphs each of which has more than one vertex. An algorithm of construction of all T-irreducible extensions for such graphs is presented. Also an estimate of a total amount of the resultihg extensions is made.

Для характеризации надежности дискретной системы А. Авиженисом [1] было введено понятие отказоустойчивости как обеспечения работоспособности системы при наличии в ней ошибок. Хейз [2] формализовал это понятие в терминах теории графов.

Расширением n-вершинного графа G называется граф H с $n+1$ вершиной такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H. Тогда если дискретное устройство представить в виде графа G (вершины графа – элементы устройства, а ребра – связи между элементами), то система, определяемая расширением этого графа H, будет 1-отказоустойчивой реализацией исходного устройства. Для любого графа G существует хотя бы одно расширение $G + 1$ (соединение G с одноэлементным графом), называемое тривиальным (ТР).

Тогда же Хейз предложил один из подходов к оптимальности расширений для графа: минимальность количества ребер в расширении. В 2003 г. В.Н. Салий [3] представил другую оптимальную конструкцию расширения для графа: из ТР графа G удаляется максимальное число ребер без нарушения свойства быть расширением. Полученные графы называются Т-неприводимыми расширениями (ТНР) для G. Одним из преимуществ такого подхода будет то, что при построении ТНР сохраняется первоначальная конструкция графа.

Задача описания ТНР для произвольного графа остается нерешенной. В настоящий момент известны только отдельные классы графов, для которых найдены все ТНР [4–6]. Но кроме этой задачи, несомненный интерес представляет поведение конструкции Т-неприводимого расширения относительно операций над графами: объединение, соединение и дополнение. В данной статье полностью решается задача нахождения Т-неприводимых расширений для объединений полных графов. Один важный частный случай разобран в [7].

Рассмотрим последовательность полных графов $\{K_{n+i}\}_{i=0}^{l}$ $(n>1, l>0)$. Положим $G=\bigcup_{i=0}^{l} m_i K_{n+i}$, где $m_0 > 0$, $m_l > 0$, а остальные $m_i \geq 0$ для $i=\overline{1, l-1}$. Такой граф однозначно определяется числом n и вектором $(m_0, m_1, \ldots, m_l)$.

Лемма. Пусть H – расширение для графа G, заданного вектором $(m_0, m_1, \ldots, m_l)$, причем в графе H есть вершина v, при удалении которой из H получится граф, изоморфный G. Тогда если из H можно удалить ребро uv, где u принадлежит некоторому подграфу K_{n+i} (пусть в расширении обозначение вершин будет как в G), то расширением для графа G будет и граф, полученный из H удалением всех ребер, соединяющих вершину v с вершинами подграфа K_{n+i}, которому принадлежит вершина u.

(Очевидно, что лемма имеет смысл, когда в графе H с вершиной v смежны хотя бы две вершины из подграфа K_{n+i}.)

Доказательство. Положим $H_1 = H - uv$, и пусть H' – граф, полученный из H удалением всех ребер, соединяющих вершину v с вершинами подграфа K_{n+i} (хотя в графе H может быть несколько подграфов K_{n+i}, здесь под обозначением K_{n+i} будет пониматься подграф, которому принадлежит вершина u). Покажем, что H' – расширение для G. Для этого возьмем произвольную вершину z из H' и построим вложение φ' графа G в H'. Рассмотрим представляющиеся случаи.

1. Выбранная вершина z совпадает с u, и в графе H все вершины подграфа K_{n+i} смежны с v. Тогда рассмотрим граф $H_1 - z'$, где z' отличная от u вершина подграфа K_{n+i}. По условию существует вложение φ графа G в $H_1 - z'$. Тогда искомое φ' определим следующим образом:

$$\varphi'(w) = \varphi(w), \text{ если } \varphi(w) \neq z;$$

$$\varphi'(w) = z', \text{ если } \varphi(w) = z.$$

Очевидно, что построенное φ' – взаимно однозначное соответствие между вершинами графов G и $H' - z$. Теперь докажем, что φ' сохраняет свойство смежности. Оно будет сохраняться, если вершины $\varphi^{-1}(w)$, где w принадлежит подграфу $K_{n+i} - z'$, не смежны с вершиной $\varphi^{-1}(v)$. Пусть это не так, и вершины $\varphi^{-1}(w)$, где $w \in M$ (здесь M – непустое подмножество множества вершин подграфа ($K_{n+i} - z'$) $-u$), смежны с $\varphi^{-1}(v)$. Тогда вершина $\varphi^{-1}(v)$ будет смежна только с вершинами $\varphi^{-1}(w)$, где $w \in M$ (в силу транзитивности свойства смежности в исходном графе G). Значит, любая вершина $\varphi^{-1}(w)$, где w из множества M, должна иметь степень $|M|$, так как она смежна с v, которая имеет такую степень (в G любые две смежные вершины имеют одинаковые степени). Из вышесказанного следует, что вершины $\varphi^{-1}(w)$, где $w \in M$, смежны только между собой (в силу транзитивности свойства смежности в графе G) и с вершиной $\varphi^{-1}(v)$. Таким образом, φ^{-1} отображает вершины из $M \bigcup \{v\}$в вершины полного графа размерности $|M| + 1 <$ $< n + i$. То есть вершины полного подграфа $K_{|M|+1}$ графа G, имеющие степень $|M| + 1 < n + i$, переводятся отображением φ в вершины из $M \bigcup \{v\}$. Тогда в граф $H_1 - z'$ без вершин $M \bigcup \{v\}$должен вкладываться оставшийся подграф графа G без $K_{|M|+1}$. Но это невозможно, поскольку в графе $H_1 - z'$, без вершин $M \bigcup \{v\}$, вершин степени не меньшей $n + i$ не больше $\sum_{j=i}^{l} m_j(n+j)+1-(|M|+1)$, тогда как в графе G без $K_{|M|+1}$ их $\sum_{j=i}^{l} m_j(n+j)$.

Таким образом, построенное φ' будет вложением графа G в граф $H' - z$.

2. Вершина z не совпадает с u или вершина z совпадает с u, и в графе H не все вершины подграфа K_{n+i} смежны с v. По условию существует вложение φ графа G в $H_1 - z$. Определим φ' тождественно равным вложению φ. Тогда φ' будет вложением графа G в граф $H' - z$, если вершина $\varphi^{-1}(v)$ не смежна ни с одной вершиной $\varphi^{-1}(w)$, где w принадлежит подграфу K_{n+i}. Докажем выполнение последнего от противного. Пусть для w из некоторого непустого множества M вершин подграфа K_{n+i} вершины $\varphi^{-1}(w)$ смежны с $\varphi^{-1}(v)$. Тогда аналогично предыдущему пункту вершины $\varphi^{-1}(w)$, где $w \in M$, смежны только друг с другом и с вершиной $\varphi^{-1}(v)$. Значит, в вершины $M \bigcup \{v\}$ отображаются вершины некоторого полного графа $K_{|M|+1}$. Покажем, что размерность этого полного графа меньше числа $n + i$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

- Вершина z совпадает с u, и в графе H не все вершины подграфа K_{n+i} смежны с v. Тогда в H_1 не меньше двух вершин из K_{n+i}, не смежных с v. То есть $|M| \le n + i$, а $|M| + 1 < n + i$.
- Вершина z принадлежит подграфу K_{n+i}, но она отлична от u. Тогда в M нет хотя бы двух вершин подграфа K_{n+i} (u и z). А значит, $|M| \le n + i - 2$, и тогда $|M| + 1 < n + i$.
- Вершина z не принадлежит подграфу K_{n+i}. Тогда $|M| \le n + i - 1$, а $|M| + 1 \le n + i$. Но если $|M| + 1 = n + i$, то M состоит из вершин подграфа $K_{n+i} - u$, а так как u в графе H_1 смежна только с вершинами из M, то степень вершины $\varphi^{-1}(u)$ в G будет равна нулю, что невозможно. Значит, $|M| + 1 < n + i$.

Таким образом, размерность полного графа $K_{|M|+1}$ меньше числа $n + i$. Следовательно, G без $K_{|M|+1}$ нельзя вложить в $H_1 - z$ без вершин $M \bigcup \{v\}$ (вложение невозможно по числу вершин степени не меньше $n + i$). Значит, и в этом случае существует вложение графа G в $H' - z$.

Случаи 1 и 2 показывают, что если $H - uv$ является расширением для G, то и H' будет расширением для G. □

Согласно доказанной лемме ТНР рассматриваемого графа G можно задать последовательностью $(a_0, a_1, \ldots, a_l)$, где a_i показывает, со сколькими графами K_{n+i} соединяется вершина v. Например, графу $G = K_n \bigcup K_{n+i}$ соответствует вектор (1,1), а его ТНР определяется вектором (1,0) [3]. Тогда по вектору $(m_0, m_1, \ldots, m_l)$, задающему граф G, можно построить множество векторов $(a_0, a_1, \ldots, a_l)$, определяющих все ТНР для G, используя следующую процедуру.

АЛГОРИТМ
построения всех ТНР для графа G,
заданного вектором $(m_0, m_1, \dots, m_l)$ и $n > 1$

1. Положить $a_0 = m_0$, доопределив $a_{-1} = 0$ и $m_{l+1} = 0$, $i = 1$.

2. По табл. 1, в столбце найти соответствующее значение $m_i\, m_{i+1}$ (где x – любое число больше 1), в строке найти $a_{i-2}\, a_{i-1}$ и на их пересечении получить значение a_i, $i = i+1$.

(Если возможно несколько вариантов («0 или 1»), то на этом этапе процесс дальнейшего построения вектора $(a_0, a_1, \dots, a_l)$ должен происходить отдельно для полученных вариантов.)

Таблица 1

$a_{i-2}\, a_{i-1}$ \ m	$m_i\, m_{i+1}$ 0 0	$m_i\, m_{i+1}$ 0 1	$m_i\, m_{i+1}$ 0 x	$m_i\, m_{i+1}$ 1 0	$m_i\, m_{i+1}$ 1 1	$m_i\, m_{i+1}$ 1 x	$m_i\, m_{i+1}$ x 0	$m_i\, m_{i+1}$ x 1	$m_i\, m_{i+1}$ x x
0 0				1	1	1	m_i	m_i	m_i
1 0				1	1	1	m_i	m_i	m_i
x 0				1	1	1	m_i	m_i	m_i
0 1	0	0	0	0	0 или 1	0 или 1	0	0 или 1	0 или 1
1 1				0	0	0	0	0 или 1	0 или 1
x 1				0	0	0	0	0 или 1	0 или 1
0 x				0	0 или 1	0 или 1	0	0 или 1	0 или 1
1 x	–	–	–	–	–	–	–	–	–
x x	–	–	–	–	–	–	–	–	–

3. Выполнять пункт 2, пока $i \le l$.

Результатом работы алгоритма будет множество векторов $(a_0, a_1, \dots, a_l)$, задающих все ТНР для графа G, определяемого вектором $(m_0, m_1, \dots, m_l)$ и $n > 1$.

Следующая теорема дает обоснование приведенного алгоритма.

Теорема. Представленный алгоритм строит в точности все ТНР для графа G, заданного вектором $(m_0, m_1, \dots, m_l)$ и числом $n > 1$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в три этапа.

I. Покажем сначала, что алгоритм будет работать стабильно, то есть $a_{i-2}a_{i-1}$ не могут принимать значение «1x» или «xx» , где x > 1, по ходу работы алгоритма. Докажем это, используя метод математической индукции по переменной i.

1. Очевидно, что условие выполнено для $i = 1$, так как $a_{-1}a_0$ имеет значение $0m_0$.

2. Пусть условие выполнено для $i > 1$, покажем справедливость условия и для $i + 1$. То есть надо показать, что если $a_{i-2}a_{i-1}$ не может принимать значение «1x» или «xx», то и $a_{i-1}a_i$ также не равно «1x» или «xx». Иначе говоря, если $a_{i-1} > 0$, то $a_i \le 1$, а это следует из правил построения (см. табл. 1) вектора $(a_0, a_1, \dots, a_l)$.

II. Теперь убедимся, что любой вектор $(a_0, a_1, \dots, a_l)$, построенный по алгоритму, будет определять граф H, являющийся ТНР для графа G. Для доказательства этого факта используем полученный ранее критерий Т-неприводимости [5].

Граф H тогда и только тогда будет ТНР графа G, когда

1) Н является расширением для графа G;

2) в графе H существует вершина v, такая что $H - v \cong G$;

3) (свойство неприводимости расширения) граф $H - vu$ не будет расширением для G, если v удовлетворяет пункту 2), а u – любая вершина из G.

Последовательно проверяем выполнимость этих условий.

1) Убедимся, что H будет расширением для графа G. Выберем произвольную вершину u и рассмотрим граф $H - u$. Возможны следующие случаи:

a) вершина u соединена ребром с v, а значит, и все смежные с ней вершины смежны с v. Тогда при вложении вершина u перейдет в v, а остальные сами в себя;

b) вершина u (принадлежащая подграфу K_{n+i}) не соединена ребром с v, а значит, и все смежные с ней вершины не смежны с v. Значит, если $m_i = 1$, то $a_i = 0$, а если $m_i > 1$, то a_i равно 0 или 1. По построению вектора $(a_0, a_1, \dots, a_l)$ имеем $a_{i-1} > 0$, то есть с v смежны вершины какого-то подграфа K_{n+i-1}. Тогда при вложении вершины графа K_{n+i} перейдут в вершины подграфа $K_{n+i-1} + v$, а вершины графа K_{n+i-1} – в вершины подграфа $K_{n+i} - u$.

Из a) и b) следует, что H будет расширением для графа G.

2) По построению в H существует вершина v такая, что $H - v \cong G$.

3) Покажем теперь неприводимость графа H. Выберем произвольную вершину u, принадлежащую некоторому подграфу K_{n+i} (значит, $a_i > 0$). Убедимся, что граф $H - uv$ не будет расширением для исходного графа G. Рассмотрим следующие случаи:

a) пусть $(a_i = 1) \wedge (a_{i-1} \neq 0)$. Тогда по построению $a_{i+1} \neq m_{i+1}$, то есть существует подграф K'_{n+i+1}, вершины которого не соединены ребрами с вершиной v в H. Проверим граф $(H - uv) - u'$, где u' принадлежит подграфу K'_{n+i+1}. В исходном графе G количество вершин со степенью не меньшей $n + i + 1$ равно $\sum_{j=i+1}^{l} m_j(n+j)$, тогда как в графе $(H - uv) - u'$ их не больше

$$\sum_{j=i+1}^{l} m_j(n+j) + 1 + (n+i) - 1 - (n+i+1) = \sum_{j=i+1}^{l} m_j(n+j) - 1\cdot$$

Значит, $H - uv$ не будет расширением для графа G;

b) пусть теперь $(a_i = m_i > 1) \vee [(a_i = 1) \wedge (a_{i-1} = 0)]$. По построению условие $a_i = m_i > 1$ означает, что $a_{i-1} = 0$. Рассмотрим граф $(H - uv) - u'$, где $u' \neq u$ принадлежит тому же графу, что и u. В графе G количество вершин со степенью не меньшей $n + i$ равно $\sum_{j=i}^{l} m_j(n+j)$, а в графе $(H - uv) - u'$ их не больше

$$\sum_{j=i}^{l} m_j(n+j) + 1 - 2 = \sum_{j=i}^{l} m_j(n+j) - 1\cdot$$

Таким образом, $H - uv$ не будет расширением для графа G.

Так как случаи a) и b) исчерпывают все возможные варианты, то $H - uv$ никогда не будет расширением для G. В силу произвольности выбора вершины u, граф H будет ТНР для G.

III. Теперь покажем, что предложенный алгоритм строит все ТНР для графа G. Пусть граф H является ТНР для G. По лемме это расширение можно задать вектором $(a_0, a_1, \dots, a_l)$. Очевидно, если в этот вектор добавить $a_{-1} = 0$, то полученный расширенный вектор также будет задавать ТНР для G – граф H. Значение a_0 должно быть равным m_0. Иначе существует подграф K'_n, вершины которого не смежны с вершиной v в H. Следовательно, в граф $H - u$ (вершина u из подграфа K'_n) не может вкладываться граф G (в G нет вершин степени меньшей n, в то время как в $H - u$ имеется $n - 1$ вершина степени $n - 1$). Таким образом $a_0 = m_0$. Так как начало вектора $(a_0, a_1, \dots, a_l)$ у графа H подчиняется правилам построения, указанным в алгоритме, то для доказательства этого пункта достаточно доказать, что значение a_i, где $0 < i \le l$, не может принимать значения, отличные от указанных в табл. 1, если все значения a_j, где $j < i$, получены по алгоритму. Рассмотрим возможные случаи.

1. Случай $(a_{i-1} > 1) \wedge (a_{i-2} > 0)$ невозможен в силу предположения, что значения в векторе до координаты i подчиняются правилам построения, предложенным в алгоритме.

2. Если $m_i = 0$, очевидно, что a_i может равняться только 0.

3. Если $(a_{i-1} = 0) \wedge (m_i > 0)$, то $a_i = m_i$ (см. табл. 1). Предположим, что в найденном H $a_i < m_i$. Значит, найдется подграф K'_{n+i}, вершины которого не смежны с v в графе H. Тогда в графе $H - u$, где u принадлежит подграфу K'_{n+i}, вершин степени не меньшей $n + i$ будет $\sum_{j=i}^{l} m_j(n+j) - (n+i) + 1$, что меньше числа таких же вершин в исходном графе G. Следовательно, граф H не может быть расширением для G, что противоречит условию. Таким образом, в этом случае a_i может равняться только m_i.

4. Если $(a_{i-1} > 0) \wedge (m_i > 0) \wedge (m_{i+1} = 0)$, то $a_i = 0$ (см. табл. 1). Пусть в графе H значение $a_i > 0$ при $a_{i-1} > 0$, $m_i > 0$, $m_{i+1} = 0$. Покажем, что тогда из H можно удалить все ребра, соединяющие подграфы K_{n+i} с вершиной v. Пусть H' – граф, полученный из H удалением ребер, соединяющих подграфы K_{n+i} с вершиной v. Построим вложение G в граф $H' - u$, где u принадлежит графу H'. Рассмотрим возможные случаи.

• Вершина u принадлежит одному из подграфов K_{n+i}. Так как $a_{i-1} > 0$, то с v смежны вершины какого-то графа K_{n+i-1}. Тогда при вложении вершины графа K_{n+i} перейдут в вершины подграфа $K_{n+i-1} + v$, а вершины графа K_{n+i-1} – в вершины подграфа H'. Оставшиеся вершины перейдут сами в себя.

• Вершина u не принадлежит ни одному из подграфов K_{n+i}. Тогда определим вложение графа G в $H' - u$ тождественно равным вложению φ графа G в $H - u$. Покажем, что при вложении φ удаленные из H ребра не играют роли, то есть вершина $\varphi^{-1}(v)$ не смежна с вершинами $\varphi^{-1}(w)$, для любой w, принадлежащей подграфам K_{n+i}. Предположим противное. Пусть вершины $\varphi^{-1}(w)$ (где $w \in M$, M непустое подмножество множества вершин подграфов K_{n+i}) смежны с $\varphi^{-1}(v)$. Очевидно, что M не может состоять из вершин, принадлежащих разным K_{n+i}. Это будет противоречить определению графа G, в котором свойство смежности транзитивно. По той же причине вершина $\varphi^{-1}(v)$ не может быть смежной с вершиной $\varphi^{-1}(w)$, где w' из графа K_{n+j}, $j \neq i$, а значит, $\varphi^{-1}(v)$ смежна только с вершинами $\varphi^{-1}(w)$, $w \in M$.

M является собственным подмножеством множества вершин одного подграфа K_{n+i}: оно не может состоять из всех вершин подграфа K_{n+i}, иначе их степень при отображении φ^{-1} будет равна $n + i + 1$, а вершин с такой степенью в G нет ($m_{i+1} = 1$). Следовательно, φ^{-1} отображает вершины из $M \cup \{v\}$ в вершины степени не большей $n + i$. На самом деле степень вершин $\varphi^{-1}(w)$, $w \in M$, меньше числа $n + i$. Иначе M состоит из $n + i - 1$ вершин подграфа K_{n+i} и единственная вершина w' из K_{n+i}, не принадлежащая множеству M, в H смежна только с вершинами из M. Значит, степень вершины $\varphi^{-1}(w')$ будет равна нулю, что невозможно. Теперь рассмотрим граф H без вершин $M \cup \{v\}$. Он должен вмещать граф G без $K_{|M|+1}$. А это невозможно, так как в графе H без вершин $M \cup \{v\}$ вершин степени не меньшей $n + i$ осталось $\sum_{j=i}^{l} m_j(n+j) - (|M|+1)$, что меньше количества таких же вершин в графе G без $K_{|M|+1}$. Таким образом, вершины $\varphi^{-1}(v)$ и $\varphi^{-1}(w)$ не смежны для любой w, принадлежащей подграфам K_{n+i}. И, значит, найдено вложение графа G в $H' - u$.

Итак, если $a_i > 0$ при $a_{i-1} > 0$, $m_i > 0$, $m_{i+1} = 0$, то H не обладает свойством неприводимости, а значит, в этом случае a_i может равняться только 0.

5. Если $(a_{i-1} > 0) \wedge (m_i > 1) \wedge (m_{i+1} > 0)$, то, согласно табл. 1 a_i может равняться или 0, или 1. Предположим, что для графа H будет $a_i > 1$. Покажем, что такой граф не может быть ТНР, так как его часть H', у которой нет ребер, соединяющих v с $m_i - 1$ подграфами K_{n+i}, будет расширением для G. Чтобы это доказать, построим вложение графа G в $H' - u$. Пусть в H' есть ребра, соединяющие подграф K'_{n+i} с вершиной v. Рассмотрим возможные случаи.

• Вершина u принадлежит подграфу K'_{n+i}. Тогда при вложении вершина u, принадлежащая графу G, прейдет в v, а остальные сами в себя.

• Вершина u принадлежит одному из подграфов K_{n+i}, отличному от K'_{n+i}. Так как $a_{i-1} > 0$, то найдется граф K_{n+i-1}, вершины которого смежны с v. Тогда при вложении вершины графа K_{n+i} перейдут в вершины подграфа $K_{n+i-1} + v$, а вершины графа K_{n+i-1} – в вершины подграфа $K_{n+i} - u$. Оставшиеся вершины перейдут сами в себя.

• Вершина u принадлежит подграфу K_{n+j}, $j \neq i$. По предположению существует вложение φ графа G в $H - u$. Пусть вершины $\varphi^{-1}(w)$, где $w \in M$, смежны с $\varphi^{-1}(v)$. Очевидно, что M – подмножество вершин некоторого подграфа K_{n+j} (в силу транзитивности свойства смежности в графе G). Тогда

если M – подмножество множества вершин подграфа K_{n+j}, где $j' \neq i$, то вложение G в $H' - u$ зададим тождественно равным φ;

если M – подмножество множества вершин подграфа K'_{n+i}, то вложение также будет совпадать с φ;

если M – подмножество множества вершин подграфа K''_{n+i}, отличного от K'_{n+i}, то соответствие между вершинами графов G и $H - u$ определим так: вершины G, переходящие в K'_{n+i}, будут отображаться в вершины K''_{n+i}; вершины G, переходящие в K''_{n+i}, будут отображаться в вершины K'_{n+i}; оставшиеся вершины переходят согласно φ. Так как $\varphi^{-1}(v)$ не может быть смежной с $\varphi^{-1}(w)$, где w принадлежит графу K''_{n+i}, и вершины графа K''_{n+i} отличаются от вершин K'_{n+i} только ребрами, смежными с v, то определенное соответствие будет вложением G в $H - u$.

Итак, построенное вложение противоречит свойству неприводимости для H, и, следовательно, в этом случае a_i может равняться или 0, или 1.

6. Если $(a_{i-1} > 0) \wedge (a_{i-2} = 0) \wedge (m_i = 1) \wedge (m_{i+1} > 0)$, то a_i может равняться или 0, или 1 (см. табл. 1). А так как $m_i = 1$, то других вариантов не может быть.

7. Если $(a_{i-1} = 1) \wedge (a_{i-2} > 0) \wedge (m_i = 1) \wedge (m_{i+1} > 0)$, то, $a_i = 0$ (см. табл. 1). Предположим теперь, что значением a_i может быть 1. Пусть в H вершина v соединена с вершинами графа K'_{n+i-1} (имеем $a_{i-1} = 1$). Тогда часть графа H – граф H', у которого нет ребер, соединяющих v с вершинами подграфа K'_{n+i-1}, будет расширением для G. Покажем это, построив вложение графа G в $H' - u$ для произвольной вершины u. Рассмотрим следующие случаи.

• Вершина u принадлежит какому-то подграфу K_{n+i-1}. Так как $a_{i-2} > 0$, то найдется подграф K_{n+i-2}, вершины которого смежны с v. Тогда при вложении вершины графа K_{n+i-1} перейдут в вершины подграфа $K_{n+i-2} + v$, а вершины графа K_{n+i-2} – в вершины подграфа $K_{n+i-1} - u$. Оставшиеся вершины перейдут сами в себя.

• Вершина u принадлежит подграфу K_{n+i}. Согласно предположению, $a_i = m_i = 1$. Тогда при вложении вершины графа K_{n+i} перейдут в вершины подграфа $(K_{n+i} - u) = v$, а остальные сами в себя.

• Вершина u принадлежит подграфу K_{n+j}, $j \neq i$, $j \neq i - 1$. Тогда определим вложение графа G в $H' - u$ тождественно равным вложению φ графа G в $H - u$. Осталось показать, что при вложении φ удаленные из H ребра не играют роли, то есть вершина $\varphi^{-1}(v)$ не смежна с вершинами $\varphi^{-1}(w)$, где w берется из некоторого M – подмножества множества вершин подграфа K'_{n+i-1}. Очевидно, что $\varphi^{-1}(v)$ смежна только с вершинами $\varphi^{-1}(w)$, $w \in M$, а вершины $\varphi^{-1}(w)$, $w \in M$, смежны только друг с другом и с $\varphi^{-1}(v)$ (так как в графе G свойство смежности – транзитивно). Это означает, что в вершины из $M \cup \{v\}$ переходят при вложении в вершины полного графа степени $|M| + 1 \leq n + i$.

Покажем, что $|M| + 1 < n + i$. Если предположить, что вершины полного графа степени $n + i$ переходят при вложении в вершины из $M \bigcup \{v\}$, то оставшийся подграф H''(граф H без вершин подграфа $K'_{n+i-1} + v$) должен вмещать граф G', полученный из G удалением вершин полного графа степени $n + i$. Граф H'' состоит из $\sum_{j=0}^{l} m_j - 1$ полных графов. Из такого же количества полных графов состоит и граф G'. Так как G' вкладывается в H'', то оставшемуся подграфу K_{n+i} графа H'' должен соответствовать полный граф степени $n + i$ в графе G'. Но в G' нет такого графа, что противоречит существованию вложения φ. Следовательно, $|M| + 1 < n + i$. На самом деле $|M| + 1 < n + i - 1$ (иначе, если $|M| = n + i - 1$, то в единственную вершину, не принадлежащую M, но смежную только с вершинами из этого множества, будет отображаться вершина степени нуль, что невозможно). Таким образом, будет нарушено свойство расширения для графа $H - u$ (по количеству вершин степени не меньшей $n+i-1$), а значит, предположение неверно и построенное вложение φ будет и вложением G в $H' - u$.

Итак, построенное вложение противоречит свойству неприводимости для H, а значит, если $a_{i-1} = 1$, $a_{i-2} > 0$, $m_i = 1$, $m_{i+1} > 1$, то a_i может равняться только 0.

Случаи 1 – 7 исчерпывают все возможные варианты, и в каждом из этих случаев было показано, что a_i, где $0 < i \le l$, не может принимать значений, отличных от указанных в таблице. Таким образом, любое ТНР для G будет построено по представленному алгоритму. □

Пример. Построение всех ТНР для графа G, заданного вектором (1,0,1,10,1,0,0,2,3,3,3,0,1,1,1,1,1) и некоторым фиксированным числом $n > 1$.

Процедура построения отображена в табл. 2.

Таблица 2

<table>
<tr><td>a_{-1}:</td><td colspan="18">0</td><td></td></tr>
<tr><td>a_0:</td><td colspan="18">1</td><td>m_0: 1</td></tr>
<tr><td>a_1:</td><td colspan="18">0</td><td>m_1: 0</td></tr>
<tr><td>a_2:</td><td colspan="18">1</td><td>m_2: 1</td></tr>
<tr><td>a_3:</td><td colspan="9">0</td><td colspan="9">1</td><td>m_3: 10</td></tr>
<tr><td>a_4:</td><td colspan="9">1</td><td colspan="9">0</td><td>m_4: 1</td></tr>
<tr><td>a_5:</td><td colspan="9">0</td><td colspan="9">0</td><td>m_5: 0</td></tr>
<tr><td>a_6:</td><td colspan="9">0</td><td colspan="9">0</td><td>m_6: 0</td></tr>
<tr><td>a_7:</td><td colspan="9">2</td><td colspan="9">2</td><td>m_7: 2</td></tr>
<tr><td>a_8:</td><td colspan="3">0</td><td colspan="6">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="6">1</td><td>m_8: 3</td></tr>
<tr><td>a_9:</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">1</td><td>m_9: 3</td></tr>
<tr><td>a_{10}:</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">0</td><td>m_{10}: 3</td></tr>
<tr><td>a_{11}:</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td colspan="3">0</td><td>m_{11}: 0</td></tr>
<tr><td>a_{12}:</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">1</td><td colspan="3">1</td><td>m_{12}: 1</td></tr>
<tr><td>a_{13}:</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td>m_{13}: 1</td></tr>
<tr><td>a_{14}:</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td colspan="2">1</td><td>0</td><td>m_{14}: 1</td></tr>
<tr><td>a_{15}:</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>m_{15}: 1</td></tr>
<tr><td>a_{16}:</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>m_{16}: 1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>m_{17}: 0</td></tr>
</table>

Таким образом, у графа G восемнадцать неизоморфных ТНР, определяемых векторами:

(1,0,1,0,1,0,0,2,0,3,0,0,1,0,1,0,1)
(1,0,1,0,1,0,0,2,0,3,0,0,1,0,1,1,0)
(1,0,1,0,1,0,0,2,0,3,0,0,1,1,0,1,0)
(1,0,1,0,1,0,0,2,1,0,3,0,1,0,1,0,1)
(1,0,1,0,1,0,0,2,1,0,3,0,1,0,1,1,0)
(1,0,1,0,1,0,0,2,1,0,3,0,1,1,0,1,0)
(1,0,1,0,1,0,0,2,1,1,0,0,1,0,1,0,1)
(1,0,1,0,1,0,0,2,1,1,0,0,1,0,1,1,0)
(1,0,1,0,1,0,0,2,1,1,0,0,1,1,0,1,0)
(1,0,1,1,0,0,0,2,0,3,0,0,1,0,1,0,1)

(1,0,1,1,0,0,0,2,0,3,0,0,1,0,1,1,0)
(1,0,1,1,0,0,0,2,0,3,0,0,1,1,0,1,0)
(1,0,1,1,0,0,0,2,1,0,3,0,1,0,1,0,1)
(1,0,1,1,0,0,0,2,1,0,3,0,1,0,1,1,0)
(1,0,1,1,0,0,0,2,1,0,3,0,1,1,0,1,0)
(1,0,1,1,0,0,0,2,1,1,0,0,1,0,1,0,1)
(1,0,1,1,0,0,0,2,1,1,0,0,1,0,1,1,0)
(1,0,1,1,0,0,0,2,1,1,0,0,1,1,0,1,0)

Оценим количество ТНР для графа G, заданного вектором $(m_0, m_1, \ldots, m_l)$ и числом $n > 1$. Для этого рассмотрим два случая.

1. Пусть вектор $(m_0, m_1, \ldots, m_l)$ состоит из 1. Для такого графа количество неизоморфных ТНР вычисляется по формуле $s(l) = s(l-2) + s(l-3)$, для $l > 3$. Это соотношение выводится непосредственно из правил построения ТНР. Действительно, развилка наступает после $a_0 = 0$, а затем повторяется на одной из ветвей через 2 элемента, на другой – через 3. Начальные значения последовательности нетрудно вычислить, построив для этих случаев все неизоморфные ТНР: $s(1) = s(2) = 1$, $s(3) = 2$. Остальные можно получить по приведенной выше формуле: $s(4) = s(2) + s(1) = 2$ и так далее. Примечательно, что зависимость $a(n) = a(n-2) + a(n-3)$ – с другими начальными условиями – дает так называемую последовательность Падована [8].

2. Пусть теперь вектор $(m_0, m_1, \ldots, m_l)$ состоит из чисел больших 1. Для такого графа количество неизоморфных ТНР вычисляется по формуле $S(l) = S(l-1) + S(l-2)$, для $l > 2$. Это соотношение также следует из правил построения ТНР:

$$S(l) = S(l-2) + [S(l-3) + \ldots + S(1) + 1] = S(l-2) + S(l-1).$$

Начальные значения последовательности опять находим построением всех неизоморфных ТНР: $S(1) = S(2) = 1$.

В общем случае исходный вектор $(m_0, m_1, \ldots, m_l)$ разобьем на непрерывные, то есть без промежуточных нулей, подпоследовательности чисел, разделенные только нулями. Выделим из множества этих подпоследовательностей p_1 последовательностей единиц с длинами k_1, k_2, …, k_{p_1} и p_2 последовательностей чисел, больших единицы, с длинами $k'_1, k'_2, \ldots, k'_{p_2}$. Пусть оставшиеся p_3 последовательности имеют длины $k''_1, k''_2, \ldots, k''_{p_3}$. Тогда количество неизоморфных ТНР для графа G, заданного вектором $(m_0, m_1, \ldots, m_l)$, будет лежать в пределах от $\prod_{i=1}^{p_1} s(k_i) \cdot \prod_{i=1}^{p_2} S(k'_i) \cdot \prod_{i=1}^{p_3} s(k''_i)$ до $\prod_{i=1}^{p_1} s(k_i) \cdot \prod_{i=1}^{p_2} S(k'_i) \cdot \prod_{i=1}^{p_3} S(k''_i)$. Если какое-нибудь $p_j = 0, 1 \le j \le 3$, то соответствующее произведение отбрасывается.

Библиографический список

1. *Авиженис А.* Отказоустойчивость – свойство, обеспечивающее постоянную работоспособность цифровых систем // Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. 1978. Т. 66, № 10. С. 5–25.

2. *Hayes P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. V. C-25, № 9. P. 875–884.

3. *Салий В.Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширениях графов // Вестн. Томск. ун-та. 2003. Прил. № 6. С. 63–65.

4. *Курносова С.Г.* Т-неприводимые расширения 3-, 4-, 5- и 6-вершинных графов. Саратов, 2003. 18 с. Деп. в ВИНИТИ 21.06.2003, №1203-В2003.

5. *Курносова С.Г.* Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2005. Вып. 6.

6. *Курносова С.Г.* Каталог Т-неприводимых расширений для деревьев с числом вершин не более 10. Саратов, 2004. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 30.06.2004, № 1126-В2004.

7. *Курносова С.Г.* Т-неприводимые расширения бесповторных объединений полных графов // Молодежь. Образование. Экономика: Сб. науч. ст. Ярославль, 2004. Ч. 4. С. 289–292.

8. Онлайн-энциклопедия целочисленных последовательностей, последовательность номер A000931. http://www.research.att.com/~njas/sequences.