УДК 512.5

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕКУРРЕНТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

И.И. Слеповичев
Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ
компьютерной безопасности и криптографии
E-mail: gurgutan@info.sgu.ru

Быстрый рост числа публикаций на темы, связанные с теорией искусственных нейронных сетей, свидетельствует о том, что искусственные нейронные сети являются довольно эффективным инструментом при решении очень широкого класса задач. Однако до сих пор не существует строгого формального обоснования ряда важных свойств нейронных сетей. В данной работе делается попытка формализовать важнейшие объекты нейроинформатики и рассмотреть их свойства с точки зрения прикладной алгебры. Предлагается рассматривать искусственные нейронные сети как многоосновные алгебры, вследствие чего для них оказываются справедливы аналоги важнейших теорем о связи между подалгебрами и гомоморфизмами, теорем о связи между конгруэнциями и гомоморфизмами алгебры, а также теорема о проекциях прямого произведения алгебр.

Algebraic properties of recurrent neural networks of discrete time

I.I. Slepovichev

Artificial neural networks can be used effectively for a quite general class of problems. Still there exists no formal foundation of some important constructions used in the theory. In this paper an attempt is undertaken to formalize some concepts of neuroinformatics and consider their properties from the point of view of applied universal algebra. It is proposed to treat neural networks as heterogeneous algebras which has made it possible to prove for them basic results similar to algebraic theorems on homomorphisms and congruences.

Введение

Более шестидесяти лет назад Мак-Каллоком и Питсом [1] была предложена модель, имитирующая нервную активность живых существ, которая до сих пор используется в качестве основы при создании искусственных нейронных сетей. В последние двадцать лет теория нейронных сетей развивалась довольно активно, о чем свидетельствует быстрый рост числа публикаций на эту тему [2]. Это связано с тем, что искусственные нейронные сети оказались довольно эффективными инструментами для построения вычислений не только в теории компьютерных наук, но и для решения многих практических задач (распознавание образов, прогнозирование, диагностика в медицине и т.д.). Наряду с этим, «современная прикладная алгебра является одним из главных инструментов математической кибернетики» [3]. В рамках современной прикладной алгебры был получен ряд важных результатов, имеющих большое прикладное значение. Однако, несмотря на значительное количество публикаций нейросетевой тематики, попыток применить к нейронным сетям результаты, полученные в рамках прикладной универсальной алгебры, крайне мало [4]. В данной статье делается попытка восполнить существующий пробел и рассмотреть ряд свойств нейронных сетей как объектов прикладной универсальной алгебры.

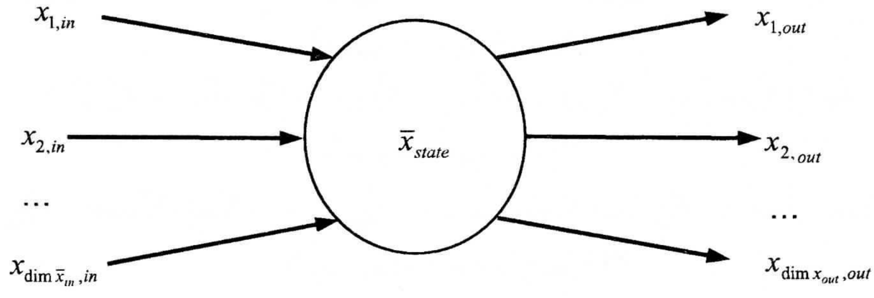
Функциональный элемент

Далее всюду через R обозначается множество всех действительных чисел.

Пусть $e \notin R$ — вспомогательный элемент.

Функциональный элемент (ФЭ) можно задать четверкой $F=(S, X, Y, g)$, где $S=\{\overline{x}_{state}\} \subseteq R^{n_{state}}$ — множество состояний, $X=\{\overline{x}_{in}\} \subseteq R^{n_{in}} \bigcup \{e\}$ — множество входных сигналов, $Y=\{\overline{x}_{out}\} \subseteq R^{n_{out}} \bigcup \{e\}$ — множество выходных сигналов, g: $S \times X \to Y$ — функция преобразования.

Вектор, поступивший на вход ФЭ, а также вектор, снятый на выходе ФЭ, будем называть сигналами. Функционирование такого элемента в дискретном времени происходит следующим образом (рисунок):



- в момент времени $t \in N$ на вход ФЭ подаётся некоторый вектор $\bar{x}_{in} \in X$;
- в момент времени $t+1$ происходит преобразование и выдача сигнала по формуле $\bar{x}_{out} := g(\bar{x}_{state}, \bar{x}_{in})$, причем в определении функции g должно быть описано правило обработки вектора $\bar{x}_{in}$, некоторые компоненты которого равны e. Результатом работы ФЭ является вектор $\bar{x}_{out}$.

В дальнейшем входные и выходные сигналы ФЭ будем рассматривать как функции, зависящие от t. Тогда модель функционирования ФЭ можно будет переписать так: $\bar{x}_{out}(t+1) := g(\bar{x}_{state}, \bar{x}_{in}(t))$. В случае, если состояние ФЭ меняется во времени, эта формула приобретёт вид $\bar{x}_{out}(t+1) := g(\bar{x}_{state}(t), \bar{x}_{in}(t))$.

Связи функциональных элементов

Два ФЭ $F^1 = (S^1, X^1, Y^1, g^1)$ и $F^2 = (S^2, X^2, Y^2, g^2)$ можно соединить следующим образом. Пусть i — номер компоненты выходного вектора $\bar{x}^1_{out}(t) \in Y^1$, а j — номер компоненты входного вектора $\bar{x}^2_{in}(t) \in X^2$, где $t \in N$. Будем говорить, что i-я компонента выхода функционального элемента F^1 соединена с j-й компонентой входа функционального элемента F^2, если $\bar{x}^2_{j,in}(t) := \bar{x}^1_{i,out}(t)$.

Множество функциональных элементов

Пусть у нас есть множество ФЭ $E = \left\{F^i \middle| i = \overline{1,m}\right\}$, $F^1 = (S^1, X^1, Y^1, g^1)$. Введём следующие величины:

$$p_{in} := n^1_{in} + n^2_{in} + \ldots + n^m_{in},$$
$$p_{out} := n^1_{out} + n^2_{out} + \ldots + n^m_{out},$$
$$p_{state} := n^1_{state} + n^2_{state} + \ldots + n^m_{state}.$$

Мы можем определить множества X, Y, S, являющиеся декартовыми произведениями множеств X^i, Y^i, S^i соответственно всех ФЭ из E:

$$X = X^1 \times X^2 \times \ldots \times X^m,$$
$$Y = Y^1 \times Y^2 \times \ldots Y^m,$$
$$S = S^1 \times S^2 \times \ldots \times S^m.$$

В дальнейшем удобно будет иметь сплошную нумерацию компонент выходов, компонент входов и компонент состояний элементов F^i внутри множества E. Для этого введем соответствующие обозначения компонент векторов $\overline{x}_{out} \in Y$, $\overline{x}_{in} \in X$, $\overline{x}_{state} \in S$:

$$\overline{x}_{out} = (x^1_{1,out}, x^1_{2,out}, \ldots, x^1_{n^1_{out},out}, x^2_{1,out}, x^2_{2,out}, \ldots, x^2_{n^2_{out},out}, \cdots, x^m_{1,out}, x^m_{2,out}, \ldots, x^m_{n^m_{out},out}) :=$$
$$=(x_{1,out}, x_{2,out}, \ldots, x_{p_{out},out}),$$
$$x_{in} = (x^1_{1,in}, x^1_{2,in}, \ldots, x^1_{n^1_i\ in}, x^2_{1,in}, x^2_{2,in}, \ldots, x^2_{n^2_i\ in}, \cdots, x^m_{1,in}, x^m_{2,in}, \ldots, x^m_{n^m_i\ in}) :=$$
$$=(x_{1,in}, x_{2,in}, \ldots, x_{p_{in},in}),$$
$$\overline{x}_{state} = (x^1_{1,state}, x^1_{2,state}, \ldots, x^1_{n^1_{state},state}, x^2_{1,state}, x^2_{2,state}, \ldots, x^2_{n^2_{state},state}, \cdots, x^m_{1,state}, x^m_{2,state}, \ldots, x^m_{n^m_{state},state}) :=$$
$$=(x_{1,state}, x_{2,state}, \ldots, x_{p_{state},state}).$$

Можно также определить функцию $G : S \times X \to Y$:

$$G(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in}) := \left(g^1(\overline{x}^1_{state}, \overline{x}^1_{in}), g^2(\overline{x}^2_{state}, \overline{x}^2_{in}), \ldots, g^m(\overline{x}^m_{state}, \overline{x}^m_{in})\right).$$

Введем обозначения:

$$I^X = \underbrace{\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,m\}\times\ldots\times\{1,2,\ldots,m\}}_{p_{in}\ раз} = \{1,2,...,m\}^{p_{in}},$$
$$I^S = \underbrace{\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,m\}\times\ldots\times\{1,2,\ldots,m\} = \{1,2,...,m\}^{p_{state}}}_{p_{state}\ раз},$$
$$I^Y = \underbrace{\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,m\}\times\ldots\times\{1,2,\ldots,m\} = \{1,2,...,m\}^{p_{out}}}_{p_{out}\ раз}.$$

Определим следующие функции:

1) $\alpha : X \to I^X$, $\overline{x}_{in} \mapsto a$, где

$$\overline{x}_{in} = (x^1_{1,in}, x^1_{2,in}, \ldots, x^1_{n^1_{in},in}, x^2_{1,in}, x^2_{2,in}, \ldots, x^2_{n^2_{in},in}, \cdots, x^m_{1,in}, x^m_{2,in}, \ldots, x^m_{n^m_{in},in}) := (x_{1,in}, x_{2,in}, \ldots, x_{p_{in},in}),$$
$$a := (a_1, a_2, \ldots, a_{p_{in}}) := (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n^1_{in}}, \underbrace{2,2,\ldots,2}_{n^2_{in}}, \ldots, \underbrace{m,m,\ldots,m}_{n^m_{in}}).$$

Очевидно, что для любого i, $1 \le i \le m$, и любого $\overline{x}_{in} \in X$, имея функцию $\alpha : X \to I^X$, мы можем однозначно восстановить вектор $\overline{x}^i_{in}$.

2) $\beta : S \to I^S$, $\overline{x}_{state} \mapsto b$, где

$$\overline{x}_{state} = (x^1_{1,state}, x^1_{2,state}, \ldots, x^1_{n^1_{state},state}, x^2_{1,state}, x^2_{2,state}, \ldots, x^2_{n^2_{state},state}, \cdots, x^m_{1,state}, x^m_{2,state}, \ldots, x^m_{n^m_{state},state}) :=$$
$$=(x_{1,state}, x_{2,state}, \ldots, x_{p_{state},state}),$$
$$b := (b_1, b_2, \ldots, b_{p_{state}}) := (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n^1_{state}}, \underbrace{2,2,\ldots,2}_{n^2_{state}}, \ldots, \underbrace{m,m,\ldots,m}_{n^m_{state}}).$$

Аналогично, для любого i, $1 \le i \le m$, и любого $\overline{x}_{state} \in S$, имея функцию $\beta : S \to I^S$, мы можем однозначно восстановить вектор $\overline{x}^i_{state}$.

3) $\delta : Y \to I^Y$, $\overline{x}_{out} \mapsto c$, где

$$\overline{x}_{out} = (x^1_{1,out}, x^1_{2,out}, \ldots, x^1_{n^1_{out},out}, x^2_{1,out}, x^2_{2,out}, \ldots, x^2_{n^2_{out},out}, \cdots, x^m_{1,out}, x^m_{2,out}, \ldots, x^m_{n^m_{out},out}) :=$$
$$=(x_{1,out}, x_{2,out}, \ldots, x_{p_{out},out}),$$

$$c := (c_1, c_2, \ldots, c_{p_{out}}) := (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n^1_{out}}, \underbrace{2,2,\ldots,2}_{n^2_{out}}, \ldots, \underbrace{m,m,\ldots,m}_{n^m_{out}}).$$

Также очевидно, что для любого i, $1 \le i \le m$, и любого $\overline{x}_{out} \in Y$, имея функцию $\delta: Y \to I^Y$, мы можем однозначно восстановить вектор $\overline{x}^i_{out}$

Другими словами, три функции α, β, δ позволяют нам однозначно получить множества X^i, Y^i, S^i, имея множества X, Y, S, а также получить функции g^i, имея функцию G. В общем случае, функции α, β, δ для разных значений аргументов могут принимать различные значения, однако в дальнейшем мы будем считать, что эти функции принимают постоянные значения для всех своих аргументов.

Мы можем задать связи между функциональными элементами из множества E с помощью некоторой операции K. Для этого введём следующие обозначения: $I_{in} = \{1, 2, \ldots, p_{in}\}$ — множество индексов компонент входного вектора, $I_{out} = \{1, 2, \ldots, p_{out}\}$ — множество индексов компонент выходного вектора,

$$I_{in}^{p_{in}} := \underbrace{I_{in} \times \ldots \times I_{in}}_{p_{in}\ \text{раз}},\ I_{out}^{p_{in}} := \underbrace{I_{out} \times \ldots \times I_{out}}_{p_{in}\ \text{раз}},\ \overline{I} := I_{out}^{p_{in}} \cup \{0\},\ \overline{I}_{in}^{p_{in}} := I_{in}^{p_{in}} \cup \{0\}.$$

Определим операцию $K: \overline{I} \times Y \to X$, $\overline{x}_{out} \in Y, \overline{b} \in \overline{I}$ так, что

$$K(\overline{b}, \overline{x}_{out}) := (x'_1, x'_2, \ldots, x'_{p_{in}}),$$

где $x'_i := \begin{cases} x_{b_i, out}, & \text{если } b_i \ne 0, \\ e, & \text{если } b_i = 0. \end{cases}$

Нейронная сеть дискретного времени с постоянным вектором состояния

Пусть у нас есть множество функциональных элементов $E = \left\{F^i \middle| i = \overline{1,m}\right\}$. Теперь можно дать определение нейронной сети, функционирующей в дискретном времени.

Определение 1. Нейронной сетью дискретного времени (НСДВ) назовём структуру $N = (E, G, K, \overline{x}_0, T)$, функционирующую в дискретном времени следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{x}_{in}(0) &= \overline{x}_0, \\ \overline{x}_{out}(t+1) &= G\left(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in}(t)\right), \\ \overline{x}_{in}(t+1) &= K(\overline{b}, \overline{x}_{out}(t+1)), \end{aligned} \tag{1}$$

где T — количество тактов функционирования до останова (до снятия выходного сигнала), $1 \le i \le T$ — такт функционирования, $\overline{b} \in \overline{I}$ — вектор, определяющий связи функциональных элементов, $K: \overline{I} \times Y \to \overline{X}$ — операция, определяющая входной сигнал НСДВ, $X = X^1 \times X^2 \times \ldots \times X^{p_{in}}$ — множество входных векторов нейросети, $Y = Y^1 \times Y^2 \times \ldots \times X^m$ — множество выходных векторов нейросети, $S = S^1 \times S^2 \times \ldots \times S^m$ — множество векторов состояния нейросети, $\overline{x}_{in}(t), \overline{x}_0 \in \overline{X}$ — входной вектор нейросети в момент t и начальный входной вектор соответственно, $\overline{x}_{out}(t) \in Y$ — выходной вектор нейросети в момент t, $\overline{x}_{state} \in S$ — вектор состояния нейросети.

Из определения видно, что нейронная сеть N – это устройство, преобразующее входной вектор $\overline{x}_0$ в выходной вектор $\overline{x}_{out}(T)$ за T тактов функционирования.

Состояние НСДВ в любой момент времени t полностью описывается вектором, задающим состояния $\overline{x}_{state} \in S$, и вектором $\overline{b} \in \overline{I}$ внутренних связей НСДВ. Выше было дано определение НСДВ, для которой состояние, заданное парой $\{\overline{x}_{state}, \overline{b}\}$, оставалось неизменным при всех T тактах функционирования. Однако во многих случаях важен не только результат, получаемый на выходе нейросети, но и то состояние, в которое эта нейросеть перейдёт в следующий момент времени. Модель, описанная в определении 1, не предусматривает такого изменения состояния, поэтому дополним эту модель для случая, когда вектор состояний $\overline{x}_{state} \in S$ может меняться.

Рекуррентная нейронная сеть дискретного времени с изменяющимся вектором состояния

Определение 2. Рекуррентной нейронной сетью дискретного времени (РНСДВ) назовём НСДВ $N = (E, G, K, H, \overline{x}_0, \overline{s}_0, T)$, для которой определены отображения $H : S \times X \to S$, $G : S \times X \to Y$ и вектор начального состояния $\overline{s}_0 \in S$ такие, что

$$\begin{gathered} \overline{x}_{in}(0) = \overline{x}_0, \\ \overline{x}_{state}(0) = \overline{s}_0, \\ \overline{x}_{out}(t+1) = G\left(\overline{x}_{state}(t), \overline{x}_{in}(t)\right), \\ \overline{x}_{state}(t+1) = H\left(\overline{x}_{state}(t), \overline{x}_{in}(t)\right), \\ \overline{x}_{in}(t+1) = K(\overline{b}, \overline{x}_{out}(t+1)). \end{gathered} \tag{2}$$

Эквивалентное определение РНСДВ с изменяющимся вектором состояния

Рассмотрим множество функциональных элементов $E = \left\{F^i \middle| i = \overline{1,m}\right\}$. Это множество мы можем задать с помощью трёх множеств S, X, Y, трёх функций α, β, δ и функции G. Поэтому рекуррентную нейронную сеть дискретного времени мы можем задать и другим способом: $N = (S, X, Y, \alpha, \beta, \delta, G, K, H, \overline{x}_0, \overline{s}_0, T)$. Это определение эквивалентно определению 2, поэтому будем его использовать там, где это удобнее.

Эквивалентность состояний

Теперь определим отношение эквивалентности $\varepsilon \subseteq S \times S$.

Определение 3. Два состояния $\overline{x}_{state1}$ и $\overline{x}_{state2}$ будем считать эквивалентными, если для любого t, $1 \le t \le T$, и для любого $\overline{x}_{in}(t) \in X$ верны равенства

$$\begin{gathered} G\left(\overline{x}_{state1}, \overline{x}_{in}(t)\right) = G\left(\overline{x}_{state2}, \overline{x}_{in}(t)\right) = \overline{x}_{out}(t+1), \\ H\left(\overline{x}_{state1}, \overline{x}_{in}(t)\right) = H\left(\overline{x}_{state2}, \overline{x}_{in}(t)\right) = \overline{x}_{state}(t+1). \end{gathered}$$

Другими словами, два состояния нейронной сети эквивалентны, если при одном и том же входном сигнале оба состояния приводят к одному и тому же выходному сигналу и к одному и тому же новому состоянию.

Очевидно, что заданное таким образом отношение будет рефлексивным и симметричным. Транзитивность же следует из следующих равенств для $(\overline{x}_{state1}, \overline{x}_{state2}) \in \varepsilon$ и $(\overline{x}_{state2}, \overline{x}_{state3}) \in \varepsilon$:

$$\begin{gathered} G(\overline{x}_{state1}, \overline{x}_{in}(t)) = G(\overline{x}_{state2}, \overline{x}_{in}(t)) = \overline{x}_{out}(t+1), \\ G(\overline{x}_{state2}, \overline{x}_{in}(t)) = G(\overline{x}_{state3}, \overline{x}_{in}(t)) = \overline{x}_{out}(t+1). \end{gathered}$$

Аналогичные равенства можно указать для функции H. Следовательно, $(\overline{x}_{state1}, \overline{x}_{state3}) \in \varepsilon$.

Через $\varepsilon(\overline{x}_{state})$ будем обозначать совокупность всех элементов из S, эквивалентных состоянию $\overline{x}_{state}$.

Мы также можем задать эквивалентность $\rho \subseteq X \times X$ на множестве входных векторов РНСДВ N: два вектора $\overline{x}_{in1}$ и $\overline{x}_{in2}$ будем считать эквивалентными, если для любого t, $1 \le t \le T$, и для любого $\overline{x}_{state}(t) \in S$ верны равенства

$$G\left(\overline{x}_{state}(t), \overline{x}_{in1}\right) = G\left(\overline{x}_{state}(t), \overline{x}_{in2}\right) = \overline{x}_{out}(t+1),$$
$$H\left(\overline{x}_{state}(t), \overline{x}_{in1}\right) = H\left(\overline{x}_{state}(t), \overline{x}_{in2}\right) = \overline{x}_{state}(t+1).$$

Через $\rho(\overline{x}_{in})$ будем обозначать совокупность всех элементов из X, эквивалентных $\overline{x}_{in}$.

Можно также определить эквивалентность $\sigma \subseteq Y \times Y$ на множестве выходных векторов нейросети. Два вектора $\overline{x}^1_{out}$ и $\overline{x}^2_{out}$ будем называть эквивалентными, если для любого $\overline{b} \in \overline{I}$ верно равенство $K(\overline{b}, \overline{x}^1_{out}) = K(\overline{b}, \overline{x}^2_{out})$.

Зададим отношение эквивалентности $\tau \subseteq \overline{I} \times \overline{I}$ следующим образом: два вектора $\overline{b}^1, \overline{b}^2 \in \overline{I}$ будем считать эквивалентными в РНСДВ, если для любого t, $1 \le t \le T$, и для любого $\overline{x}_{out}(t) \in Y$ верно равенство $K(\overline{b}^1, \overline{x}_{out}(t)) = K(\overline{b}^2, \overline{x}_{out}(t))$.

Подсеть РНСДВ

Рассмотрим две РНСДВ $N = (E, K, H, \overline{x}_0, \overline{s}_0, T)$ и $N' = (E', K', H', \overline{x}'_0, \overline{s}'_0, T)$, в которой $E' \subseteq E$. Операции для N' определены следующим образом:

$$K'(\overline{b}', \overline{x}'_{out}) = K(\overline{b}, \overline{x}_{out}),$$
$$G'(\overline{x}'_{state}, \overline{x}'_{in}) = G(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in}),$$
$$H'(\overline{x}'_{state}, \overline{x}'_{in}) = H(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in}),$$

где

$$X = X^1 \times X^2 \times \ldots \times X^m,$$
$$Y = Y^1 \times Y^2 \times \ldots \times Y^m,$$
$$S = S^1 \times S^2 \times \ldots \times S^m,$$

m — число функциональных элементов в E,

$$X' = X^{i_1} \times X^{i_2} \times \ldots \times X^{i_k},$$
$$Y' = Y^{i_1} \times Y^{i_2} \times \ldots \times Y^{i_k},$$
$$S' = S^{i_1} \times S^{i_2} \times \ldots \times S^{i_k},$$

k — число функциональных элементов в E',

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m,$$

$\overline{x}_{state} \in S'$, $\overline{x}'_{in} \in X'$, $\overline{x}'_{out} \in Y'$, — какое-либо состояние, входной сигнал и выходной сигнал РНСДВ N' соответственно, а $\overline{x}_{state} \in S$, $\overline{x}_{in} \in X$, $\overline{x}_{out} \in Y$ и получаются из элементов $\overline{x}'_{state}$, $\overline{x}'_{in}$, $\overline{x}'_{out}$ следующим образом:

$$\overline{x}_{out} := (e, \ldots, e, x^{i_1}_{1,out}, x^{i_1}_{2,out}, \ldots, x^{i_1}_{n^{i_1}_{out},out}, e, \ldots, e, x^{i_2}_{1,out}, x^{i_2}_{2,out}, \ldots, x^{i_2}_{n^{i_2}_{out},out}, \cdot 1 \cdot, x^{i_k}_{,out}, x^{i_k}_{2,out}, \ldots, x^{i_k}_{n^{i_k}_{out},out}, e, \ldots, e) :=$$

$$=(e,\dots,e,x'_{i_1,out},e,\dots,e,x'_{i_2,out},e,\dots,e,x'_{p'_{out},out},e,\dots,e).$$

Другими словами, если $j\neq i_l, l=1,\dots,k$, то для любого $r_j=1,2,\dots,n^j_{out}$ компонента $x^j_{r_j,out}$ вектора $\overline{x}_{out}$ равна e. Аналогично определяются вектора $\overline{x}_{state}\in S$, $\overline{x}_{in}\in X$.

Нейронную сеть N' будем называть подсетью сети N. Подсеть N' может быть получена из N удалением некоторых ФЭ и всех связей, в которых эти ФЭ участвуют.

В случае, если РНСДВ N задана другим способом, мы можем определить подсеть N' следующим образом: $N'=(S', X', Y', \alpha', \beta', \delta', G', K', H', \overline{x}'_0, \overline{s}'_0, T)$ является подсетью сети $N=(S,X,Y,\alpha,\beta,\delta,G,K,H,\overline{x}_0,\overline{s}_0,T)$, если $S'\subseteq S$, $X'\subseteq X$, $Y'\subseteq Y$, и существует взаимно однозначное отображение

$$F: I^{S'}\times I^{X'}\times I^{Y'}\to I^S\times I^X\times I^Y,\ F:(b', a', c')\mapsto(b,a,c),$$

такое, что

$$\overline{x}_{state}\in S,\ \beta(\overline{x}_{state})=b,\ \overline{x}_{in}\in X,\ \alpha(\overline{x}_{in})=a,\ \overline{x}_{out}\in Y,\ \delta(\overline{x}_{out})=c,$$

$$\overline{x}'_{state}\in S',\ \beta'(\overline{x}'_{state})=b',\ \overline{x}'_{in}\in X',\ \alpha'(\overline{x}'_{in})=a' \text{ и } \overline{x}'_{out}\in Y',\ \delta'(\overline{x}'_{out})=c',$$

а операции заданы следующим образом: $K'(\overline{d}', \overline{x}'_{out})=K(\overline{d},\overline{x}'_{out})$, $G'(\overline{x}'_{state},\overline{x}'_{in})=G(\overline{x}'_{state},\overline{x}'_{in})$, $H'(\overline{x}'_{state},\overline{x}'_{in})=H(\overline{x}'_{state},\overline{x}'_{in})$, где $\overline{d}'\in\overline{I}'$, $\overline{d}\in\overline{I}$.

Множество подсетей данной РНСДВ N будем обозначать через *Sub N*.

Гомоморфизм РНСДВ

Пусть $N^1=(S^1,X^1,Y^1,\alpha^1,\beta^1,\delta^1,G^1,K^1,H^1,\overline{x}^1_0,\overline{s}^1_0,T)$ и $N^2=(S^2,X^2,Y^2,\alpha^2,\beta^2,\delta^2,G^2,K^2,H^2,\overline{x}^2_0,\overline{s}^2_0,T)$ — некоторые РНСДВ.

Определим гомоморфизм РНСДВ N^1 в N^2 $f: N_1\to N_2$ как отображение $f:=(\omega,\xi,\zeta,\gamma,\varphi,\psi,\chi)$, $\omega: I^{1X}\to I^{2X}$, $\xi: I^{1S}\to I^{2S}$, $\zeta: I^{1Y}\to I^{2Y}$, $\gamma:\overline{I}^1\to\overline{I}^2$, $\varphi: S^1\to S^2$, $\psi: X^1\to X^2$, $\chi: Y^1\to Y^2$, причём

$$\begin{gathered}
\overline{x}^2_0=\psi(\overline{x}^1_0),\\
\overline{s}^2_0=\varphi(\overline{x}^2_0),\\
\alpha^2(\psi(\overline{x}_{in}))=\omega(\alpha^1(\overline{x}_{in})),\\
\beta^2(\varphi(\overline{x}_{state}))=\xi(\beta^1(\overline{x}_{state})),\\
\delta^2(\chi(\overline{x}_{out}))=\zeta(\delta^1(\overline{x}_{out})),\\
\psi\left(K^1(\overline{b},\overline{x}_{out})\right)=K^2\left(\gamma(\overline{b}),\chi(\overline{x}_{out})\right),\\
\varphi\left(H^1(\overline{x}_{state},\overline{x}_{in})\right)=H^2\left(\varphi(\overline{x}_{state}),\psi(\overline{x}_{in})\right),\\
\chi\left(G^1(\overline{x}_{state},\overline{x}_{in})\right)=G^2\left(\varphi(\overline{x}_{state}),\psi(\overline{x}_{in})\right).
\end{gathered}\tag{3}$$

Множество всех гомоморфизмов $f: N_1\to N_2$ будем обозначать *Hom* (N_1, N_2).

Если каждое из отображений ω, ξ, ζ, γ, φ, ψ, χ является биективным, то нейросети N^1 и N^2 будем называть изоморфными.

Конгруэнция РНСДВ

Пусть $N=(E,K,H,\bar{x}_0,\bar{s}_0,T)$ — некоторая РНСДВ. Конгруэнцией нейросети N будем называть четверку эквивалентностей $\theta=(\varepsilon,\rho,\sigma,\tau)$, где $\varepsilon\subseteq S\times S$, $\rho\subseteq X\times X$, $\sigma\subseteq Y\times Y$, $\tau\subseteq\bar{I}\times\bar{I}$, устойчивых относительно отображений $G:S\times X\to Y$, $H:S\times X\to S$ и $K:\bar{I}\times Y\to X$, т. е.

$$\left(\forall 1\le t\le T\right)\left(\forall \bar{x}^1_{state}(t),\bar{x}^2_{state}(t)\in S\right)\left(\forall \bar{x}^1_{in}(t),\bar{x}^2_{in}(t)\in X\right)\left(\forall \bar{x}^1_{out}(t),\bar{x}^2_{out}(t)\in Y\right)\left(\forall \bar{b}^1,\bar{b}^2\in\bar{I}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}(\bar{x}^1_{state}(t),\bar{x}^2_{state}(t))\in\varepsilon\wedge(\bar{x}^1_{in}(t),x^2_{in}(t))\in\rho\wedge(\bar{x}^1_{out}(t),x^2_{out}(t))\in\sigma\wedge(\bar{b}^1,\bar{b}^2)\in\tau\Rightarrow\\ \left(G(\bar{x}^1_{state}(t),\bar{x}^1_{in}(t)),G(\bar{x}^2_{state}(t),\bar{x}^2_{in}(t))\right)\in\sigma\wedge\left(H(\bar{x}^1_{state}(t),\bar{x}^1_{in}(t)),H(\bar{x}^2_{state}(t),\bar{x}^2_{in}(t))\right)\in\varepsilon\wedge\\ \left(K(\bar{b}^1,\bar{x}^1_{out}(t)),K(\bar{b}^2,\bar{x}^2_{out}(t))\right)\in\rho\end{array}\right)$$

Другими словами, если эквивалентны состояния $\bar{x}^1_{state},\bar{x}^2_{state}$, если эквивалентны входные векторы $\bar{x}^1_{in},\bar{x}^2_{in}$, эквивалентны выходные векторы $\bar{x}^1_{out},\bar{x}^2_{out}$, и эквивалентны векторы $\bar{b}^1,\bar{b}^2$, задающие связи, то будут эквивалентны выходные сигналы, входные сигналы и состояния нейросети, полученные в следующий момент времени.

Определение 4. Ядром отображения f называется множество

$$Ker\, f:=\left\{(a,b)\in A\times A\,\middle|\, f(a)=f(b)\right\}.$$

Определение 5. Пусть $N=(S,X,Y,\alpha,\beta,\delta,G,K,H,\bar{x}_0,\bar{s}_0,T)$ — некоторая нейронная сеть и $\theta=(\varepsilon,\rho,\sigma,\tau)$ — некоторая конгруэнция на ней. Факторсетью N/θ будем называть структуру $N/\theta=(S/\varepsilon,X/\rho,Y/\sigma,\alpha,\beta,\delta,\widehat{G},\widehat{K},\widehat{H},\rho(\bar{x}_0),\varepsilon(\bar{s}_0),T)$, в которой S/ε, X/ρ, Y/σ — фактор множества по эквивалентностям конгруэнции θ, а операции определены следующим образом:

$$\widehat{G}\left(\varepsilon(\bar{x}_{state}(t)),\rho(\bar{x}_{in}(t))\right):=\sigma\left(G(\bar{x}_{state}(t),\bar{x}_{in}(t))\right),$$
$$\widehat{H}\left(\varepsilon(\bar{x}_{state}(t)),\rho(\bar{x}_{in}(t))\right):=\varepsilon\left(H(\bar{x}_{state}(t),\bar{x}_{in}(t))\right),$$
$$\widehat{K}\left(\gamma(\bar{b}),\sigma(\bar{x}_{out}(t))\right):=\rho\left(K(\gamma(\bar{b}),\bar{x}_{out}(t))\right).$$

Теорема о связи между подсетями и гомоморфизмами (часть1).

Пусть $N^1=(S^1,X^1,Y^1,\alpha^1,\beta^1,\delta^1,G^1,K^1,H^1,\bar{x}^1_0,\bar{s}^1_0,T)$, $N^2=(S^2,X^2,Y^2,G^2,K^2,H^2,\bar{x}^2_0,\bar{s}^2_0,T)$ и $f:N_1\to N_2$ — гомоморфизм нейросети N^1 в нейросеть N^2. Если $\tilde{N}^1=(\tilde{S}^1,\tilde{X}^1,\tilde{Y}^1,\tilde{\alpha}^1,\tilde{\beta}^1,\tilde{\delta}^1,\tilde{G}^1,\tilde{K}^1,\tilde{H}^1,\bar{x}^1_0,\bar{s}^1_0,T)$ — подсеть в N^1 и $\tilde{N}^2=(\tilde{S}^2,\tilde{X}^2,\tilde{Y}^2,\tilde{\alpha}^2,\tilde{\beta}^2,\tilde{\delta}^2,\tilde{G}^2,\tilde{K}^2,\tilde{H}^2,\bar{x}^2_0,\bar{s}^2_0,T)$ — гомоморфный образ подсети $\tilde{N}^1$, то $f(\tilde{N}^1):=(\tilde{S}^2,\tilde{X}^2,\tilde{Y}^2,\tilde{\alpha}^2,\tilde{\beta}^2,\tilde{\delta}^2,\tilde{G}^2,\tilde{K}^2,\tilde{H}^2,\bar{x}^2_0,\bar{s}^2_0,T)$ — подсеть в N^2.

Доказательство. Пусть $\tilde{N}^1\in Sub\ N^1$ и $\bar{x}^2_{out}\in\chi(\tilde{Y}^1)$, $\bar{x}^2_{state}\in\varphi(\tilde{S}^1)$, $\bar{x}^2_{in}\in\psi(\tilde{X}^1)$, $\bar{b}^2\in\gamma(\tilde{\bar{I}}^1)$ — произвольные элементы. Тогда найдутся $\bar{x}^1_{out}\in\tilde{Y}^1$, $\bar{x}^1_{state}\in\tilde{S}^1$, $\bar{x}^1_{in}\in\tilde{X}^1$, $\bar{b}^1\in\tilde{\bar{I}}^1$ такие, что $\bar{x}^2_{out}=\chi(\bar{x}^1_{out})$, $\bar{x}^2_{state}=\varphi(\bar{x}^1_{state})$, $\bar{x}^2_{in}=\psi(\bar{x}^1_{in})$, $\bar{b}^2=\gamma(\bar{b}^1)$. Так как $K^1(\bar{b}^1,\bar{x}^1_{out})\in\tilde{X}^1$, $H^1(\bar{x}^1_{state},\bar{x}^1_{in})\in\tilde{S}^1$ и $G^1(\bar{x}^1_{state},\bar{x}^1_{in})\in\tilde{Y}^1$, то, поскольку $f\in Hom\ (N_1,N_2)$, имеем

$$\tilde{\alpha}^2(\bar{x}^2_{in})=\tilde{\alpha}^2(\psi(\bar{x}^1_{in}))=\omega(\tilde{\alpha}^1(\bar{x}^1_{in})),$$
$$\tilde{\beta}^2(\bar{x}^2_{state})=\tilde{\beta}^2(\varphi(\bar{x}^1_{state}))=\xi(\tilde{\beta}^1(\bar{x}^1_{state})),$$
$$\tilde{\delta}^2(\bar{x}^2_{out})=\tilde{\delta}^2(\chi(\bar{x}^1_{out}))=\zeta(\tilde{\delta}^1(\bar{x}^1_{out})).$$

Отображение $F^2 : I^{\tilde{S}^2} \times I^{\tilde{X}^2} \times I^{\tilde{Y}^2} \to I^{S^2} \times I^{X^2} \times I^{Y^2}$ определим следующим образом:

$$F^2 : (\xi(\tilde{\beta}^1(\bar{x}^1_{state})), \omega(\tilde{\alpha}^1(\bar{x}^1_{in})), \zeta(\tilde{\delta}^1(x^1_{out}))) \mapsto (\xi(\beta^1(\bar{x}^1_{state})), \omega(\alpha^1(\bar{x}^1_{in})), \zeta(\delta^1(\bar{x}^1_{out}))).$$

Для операций выполняются следующие равенства:

$$K^2(\bar{b}^2, \bar{x}^2_{out}) = K^2(\gamma(\bar{b}^1), \chi(\bar{x}^1_{out})) = \psi(K^1(\bar{b}^1, \bar{x}^1_{out})) \in \psi(\tilde{X}^1),$$

$$H^2(\bar{x}^2_{state}, \bar{x}^2_{in}) = H^2(\varphi(\bar{x}^1_{state}), \psi(\bar{x}^1_{in})) = \varphi(H^1(\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^1_{in})) \in \varphi(\tilde{S}^1),$$

$$G^2(\bar{x}^2_{state}, \bar{x}^2_{in}) = G^2(\varphi(\bar{x}^1_{state}), \psi(\bar{x}^1_{in})) = \chi(G^1(\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^1_{in})) \in \chi(\tilde{Y}^1),$$

и, значит, $f(\tilde{N}^1) \in Sub\, N^2$.

Теорема о связи между подсетями и гомоморфизмами (часть 2).

Пусть $\tilde{N}^2 := (\tilde{S}^2, \tilde{X}^2, \tilde{Y}^2, \tilde{\alpha}^2, \tilde{\beta}^2, \tilde{\delta}^2, \tilde{G}^2, \tilde{K}^2, \tilde{H}^2, \bar{x}^2_0, \bar{s}^2_0, T)$ — подсеть в N^2 и нейронная сеть $\tilde{N}^1 = (\tilde{S}^1, \tilde{X}^1, \tilde{Y}^1, \tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1, \tilde{\delta}^1, \tilde{G}^1, \tilde{K}^1, \tilde{H}^1, \bar{x}^1_0, \bar{s}^1_0, T)$ является прообразом РНСДВ $\tilde{N}^2$ при гомоморфном отображении $f: N^1 \to N^2$: $f^{-1}(\tilde{N}^2) := (\tilde{S}^1, \tilde{X}^1, \tilde{Y}^1, \tilde{\alpha}^1, \tilde{\beta}^1, \tilde{\delta}^1, \tilde{G}^1, \tilde{K}^1, \tilde{H}^1, \bar{x}^1_0, \bar{s}^1_0, T)$. Тогда $\tilde{N}^1$ будет подсетью в N^1.

Доказательство. Пусть $\tilde{N}^2 \in Sub\, N^2$. Если хотя бы одно из множеств $\varphi^{-1}(\tilde{S}^2)$, $\psi^{-1}(\tilde{X}^2)$, $\gamma^{-1}(\tilde{\bar{I}}^2)$ пусто, то $f^{-1}(\tilde{N}^2) \in Sub\, N^1$. Допустим, что эти множества не пустые. Возьмем произвольные элементы $\bar{x}^1_{state} \in \varphi^{-1}(\tilde{S}^2)$, $\bar{x}^1_{in} \in \psi^{-1}(\tilde{X}^2)$, $\bar{b}^1 \in \gamma^{-1}(\tilde{\bar{I}}^2)$, $\bar{x}^1_{out} \in \chi^{-1}(\tilde{Y}^2)$. Используя то, что $\tilde{N}^2 \in Sub\, N^2$, а f — гомоморфизм из N^1 в N^2, получаем:

$$\omega(\tilde{\alpha}^1(\bar{x}^1_{in})) = \tilde{\alpha}^2(\psi(\bar{x}^1_{in})),$$
$$\xi(\tilde{\beta}^1(\bar{x}^1_{state})) = \tilde{\beta}^2(\varphi(\bar{x}^1_{state})),$$
$$\zeta(\tilde{\delta}^1(\bar{x}^1_{out})) = \tilde{\delta}^2(\chi(\bar{x}^1_{out})).$$

Отображение $F^1 : I^{\tilde{S}^1} \times I^{\tilde{X}^1} \times I^{\tilde{Y}^1} \to I^{S^1} \times I^{X^1} \times I^{Y^1}$ определим следующим образом:

$$F^1 : (\xi^{-1}(\tilde{\beta}^2(\bar{x}^1_{state})), \omega^{-1}(\tilde{\alpha}^2(\bar{x}^1_{in})), \zeta^{-1}(\tilde{\delta}^2(x^1_{out}))) \mapsto (\xi^{-1}(\beta^2(\bar{x}^1_{state})), \omega^{-1}(\alpha^2(\bar{x}^1_{in})), \zeta^{-1}(\delta^2(\bar{x}^1_{out}))).$$

Для операций выполняются следующие равенства:

$$\varphi(H^1(\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^1_{in})) = H^2(\varphi(\bar{x}^1_{state}), \psi(\bar{x}^1_{in})) \in \tilde{S}^2,$$

$$\chi(G^1(\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^1_{in})) = G^2(\varphi(\bar{x}^1_{state}), \psi(\bar{x}^1_{in})) \in \tilde{Y}^2,$$

$$\psi(K^1(\bar{b}^1, \bar{x}^1_{out})) = K^2(\gamma(\bar{b}^1), \chi(\bar{x}^1_{out})) \in \tilde{X}^2,$$

откуда $G^1(\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^1_{in}) \in \chi^{-1}(\tilde{Y}^2)$, $H^1(\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^1_{in}) \in \varphi^{-1}(\tilde{S}^2)$ и $K^1(\bar{b}^1, \bar{x}^1_{out}) \in \psi^{-1}(\tilde{X}^2)$, и, значит, $f^{-1}(\tilde{N}^2) \in Sub\, N^1$.

Теорема доказана.

Теорема о связи между гомоморфизмами и конгруэнциями нейросети (часть 1).

Если $f := (\omega, \xi, \zeta, \gamma, \varphi, \psi, \chi)$ — гомоморфизм нейросети $N = (S, X, Y, \alpha, \beta, \delta, G, K, H, \bar{x}_0, \bar{s}_0, T)$, то четверка эквивалентностей $(Ker\, \gamma, Ker\, \varphi, Ker\, \psi, Ker\, \chi)$ является конгруэнцией этой нейросети.

Доказательство. Пусть $f : N^1 \to N^2$ — гомоморфизм нейросети N^1 в нейросеть N^2, $f := (\omega, \xi, \zeta, \gamma, \varphi, \psi, \chi)$, $\omega: I^{1X} \to I^{2X}$, $\xi: I^{1S} \to I^{2S}$, $\zeta: I^{1Y} \to I^{2Y}$, $\gamma: \bar{I}^1 \to \bar{I}^2$, $\varphi: S^1 \to S^2$, $\psi: X^1 \to X^2$, $\chi: Y^1 \to Y^2$.

Покажем, что четверка эквивалентностей (*Ker* γ, *Ker* φ, *Ker* ψ, *Ker* χ) устойчива относительно операций $H^1 : S^1 \times X^1 \to S^1$, $K^1 : \bar{I}^1 \times Y^1 \to X^1$, $G^1 : S^1 \times X^1 \to Y^1$.

Пусть $\bar{x}^1_{out}, \bar{x}^2_{out} \in Y^1$, $\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^2_{state} \in S^1$, $\bar{x}^1_{in}, \bar{x}^2_{in} \in X^1$, $\bar{b}^1, \bar{b}^2 \in \bar{I}^1$. Если $(\bar{x}^1_{out}, \bar{x}^2_{out}) \in Ker\,\chi$, $(\bar{x}^1_{in}, \bar{x}^2_{in}) \in Ker\,\psi$, $(\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^2_{state}) \in Ker\,\varphi$, $(\bar{b}^1, \bar{b}^2) \in Ker\,\gamma$, то $\chi(\bar{x}^1_{out}) = \chi(\bar{x}^2_{out})$, $\psi(\bar{x}^1_{in}) = \psi(\bar{x}^2_{in})$, $\varphi(\bar{x}^1_{state}) = \varphi(\bar{x}^2_{state})$, $\gamma(\bar{b}^1) = \gamma(\bar{b}^2)$.

Так как f – гомоморфизм,

$$\varphi(H^1(\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^1_{in})) = H^2(\varphi(\bar{x}^1_{state}), \psi(\bar{x}^1_{in})) = H^2(\varphi(\bar{x}^2_{state}), \psi(\bar{x}^2_{in})) = \varphi(H^1(\bar{x}^2_{state}, \bar{x}^2_{in})),$$

откуда

$$\left(H^1(\bar{x}^1_{state}, \bar{x}^1_{in}), H^1(\bar{x}^2_{state}, \bar{x}^2_{in})\right) \in Ker\,\varphi.$$

Аналогично

$$\psi(K^1(\bar{b}^1, \bar{x}^1_{out})) = K^2(\gamma(\bar{b}^1), \chi(\bar{x}^1_{out})) = K^2(\gamma(\bar{b}^2), \chi(\bar{x}^2_{out})) = \psi(K^1(\bar{b}^2, \bar{x}^2_{out})),$$

а значит,

$$\left(K^1(\bar{b}^1, \bar{x}^1_{out}), K^1(\bar{b}^2, \bar{x}^2_{out})\right) \in Ker\,\psi.$$

Аналогичные равенства мы можем записать и для отображений χ, γ. Отсюда следует, что (*Ker* γ, *Ker* φ, *Ker* ψ, *Ker* χ) является конгруэнцией нейросети N^1.

Теорема доказана.

Теорема о связи между гомоморфизмами и конгруэнциями нейросети (часть 2).

Пусть $N = (S, X, Y, \alpha, \beta, \delta, G, K, H, \bar{x}_0, T)$ — некоторая нейросеть и $\theta = (\varepsilon, \rho, \sigma, \tau)$ — конгруэнция на ней. Тогда имеем:

1) отображение (ω, ζ, ξ, *nat* ε, *nat* ρ, *nat* σ, *nat* τ) такое, что $nat\ \varepsilon : S \to S / \varepsilon$, $nat\ \rho : X \to X / \rho$, $nat\ \sigma : Y \to Y / \sigma$, $nat\ \tau : \bar{I} \to \bar{I} / \tau$ — естественные отображения на соответствующие фактор-множества, а $\omega : I^X \to I^X$, $\xi : I^S \to I^S$, $\zeta : I^Y \to I^Y$ — тождественные отображения, является гомоморфизмом нейросети N на факторсеть N/θ.

2) семерка ($X \times X$, $S \times S$, $Y \times Y$, ε, ρ, σ, τ) является ядром этого гомоморфизма.

Доказательство. Используя определение операций в факторсети, имеем:

$$\left(nat\ \varepsilon\right)\left(H(\bar{x}_{state}(t), \bar{x}_{in}(t))\right) = \varepsilon\left(H(\bar{x}_{state}(t), \bar{x}_{in}(t))\right) =$$
$$= \hat{H}\left(\varepsilon(\bar{x}_{state}(t)), \rho(\bar{x}_{in}(t))\right) = \hat{H}\left(\left(nat\ \varepsilon\right)(\bar{x}_{state}(t)), \left(nat\ \rho\right)(\bar{x}_{in}(t))\right).$$

Аналогичные равенства мы можем записать для отображений *nat* ρ, *nat* σ, *nat* τ. Отсюда делаем вывод, что (ω, ζ, ξ, *nat* ε, *nat* ρ, *nat* σ, *nat* τ) — гомоморфизм.

Далее,

$$(\bar{x}^1_{state}(t), \bar{x}^2_{state}(t)) \in Ker\ nat\ \varepsilon \Leftrightarrow \left(nat\ \varepsilon\right)(\bar{x}^1_{state}(t)) = \left(nat\ \varepsilon\right)(\bar{x}^2_{state}(t)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon(\bar{x}^1_{state}(t)) = \varepsilon(\bar{x}^2_{state}(t)) \Leftrightarrow (\bar{x}^1_{state}(t), \bar{x}^2_{state}(t)) \in \varepsilon,$$

и, следовательно, *Ker nat* $\varepsilon = \varepsilon$.

Аналогично

$$(\bar{x}^1_{in}(t), \bar{x}^2_{in}(t)) \in Ker\ nat\ \rho \Leftrightarrow \left(nat\ \rho\right)(\bar{x}^1_{in}(t)) = \left(nat\ \rho\right)(\bar{x}^2_{in}(t)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \rho(\bar{x}^1_{in}(t)) = \rho(\bar{x}^2_{in}(t)) \Leftrightarrow (\bar{x}^1_{in}(t), \bar{x}^2_{in}(t)) \in \rho,$$

$$(\overline{x}^1_{out}(t), \overline{x}^2_{out}(t)) \in Ker\ nat\ \sigma \Leftrightarrow (nat\ \sigma)(\overline{x}^1_{out}(t)) = (nat\ \sigma)(\overline{x}^2_{out}(t)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sigma(\overline{x}^1_{out}(t)) = \sigma(\overline{x}^2_{out}(t)) \Leftrightarrow (\overline{x}^1_{out}(t), \overline{x}^2_{out}(t)) \in \sigma,$$

$$(\overline{b}^1, \overline{b}^2) \in Ker\ nat\ \tau \Leftrightarrow (nat\ \tau)(\overline{b}^1) = (nat\ \tau)(\overline{b}^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tau(\overline{b}^1) = \tau(\overline{b}^2) \Leftrightarrow (\overline{b}^1, \overline{b}^2) \in \tau.$$

Таким образом, ($Ker\ nat\ \varepsilon$, $Ker\ nat\ \rho$, $Ker\ nat\ \sigma$, $Ker\ nat\ \tau$) = θ.

Теорема доказана.

Теорема о гомоморфизмах нейросети.

Пусть $f := (\omega, \xi, \zeta, \gamma, \varphi, \psi, \chi)$ — гомоморфизм нейросети $N^1 = (S^1, X^1, Y^1, \alpha^1, \beta^1, \delta^1, G^1, K^1, H^1, \overline{x}^1_0, \overline{s}^1_0, T)$ на нейросеть $N^2 = (S^2, X^2, Y^2, G^2, K^2, H^2, \overline{x}^2_0, \overline{s}^2_0, T)$. Тогда нейросеть N^1 изоморфна факторсети $N^1 / Ker f$.

Доказательство. Обозначим через θ ядро гомоморфизма f, т. е. $\theta = (Ker\ \omega, Ker\ \xi, Ker\ \zeta, Ker\ \gamma, Ker\ \varphi, Ker\ \psi, Ker\ \chi)$. Согласно теореме о связи между гомоморфизмами и конгруэнциями нейросети (часть 1) θ является конгруэнцией сети N^1 . Определим отображение i : $(i^\omega, i^\xi, i^\zeta, i^\gamma, i^\varphi, i^\psi, i^\chi)$, $i^\omega : \alpha \mapsto \alpha, i^\xi : \beta \mapsto \beta, i^\zeta : \delta \mapsto \delta, i^\gamma : \overline{I}^1 / Ker\gamma \to \overline{I}^2, i^\varphi : S^1 / Ker\varphi \to S^2, i^\psi : X^1 / Ker\psi \to X^2$, $i^\chi : Y^1 / Ker\ \chi \to Y^2$.

Покажем, что отображение i устанавливает взаимно однозначное соответствие между нейросетями N^1/θ и N^1. Действительно,

$$i^\varphi((Ker\ \varphi)(\overline{x}_{state})) = i^\varphi((Ker\ \varphi)(\overline{x}\,'_{state})) \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}_{state}) = \varphi(\overline{x}\,'_{state}) \Rightarrow (\overline{x}_{state}, \overline{x}\,'_{state}) \in Ker\ \varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (Ker\ \varphi)(\overline{x}_{state}) = (Ker\ \varphi)(\overline{x}\,'_{state}),$$

т. е. φ взаимно однозначно. Так как φ отображает S^1 на S^1, то для любого $\overline{x}^2_{state} \in S^2$ найдется $\overline{x}^1_{state} \in S^1$ такой, что $\varphi(\overline{x}^1_{state}) = \overline{x}^2_{state}$. Тогда $i^\varphi((Ker\ \varphi)(\overline{x}^1_{state})) = \varphi(\overline{x}^1_{state}) = \overline{x}^2_{state}$, т. е. i^φ сюрьективно. Аналогичные тождества мы можем доказать и для компонент i^γ, i^φ, i^χ отображения i.

Докажем, что i — гомоморфизм. В самом деле, если $\overline{x}_{state} \in S^1$, $\overline{x}_{in} \in X^1$, $\overline{x}_{out} \in Y^1$, $\overline{b} \in \overline{I}^1$, то

$$i^\varphi(H^1(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in})) = i^\varphi((Ker\ \varphi)(H^1(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in}))) =$$
$$= \varphi(H^1(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in})) = H^1(\varphi(\overline{x}_{state}), \psi(\overline{x}_{in})) = H^1(i^\varphi((Ker\ \varphi)(\overline{x}_{state})), i^\psi((Ker\ \psi)(\overline{x}_{in}))),$$

$$i^\psi(K^1(\overline{b}, \overline{x}_{out})) = i^\psi((Ker\ \psi)(K^1(\overline{b}, \overline{x}_{out}))) =$$
$$= \psi(K^1(\overline{b}, \overline{x}_{out})) = K^1(\gamma(\overline{b}), \chi(\overline{x}_{out})) = K^1(i^\gamma((Ker\ \gamma)(\overline{b})), i^\chi((Ker\ \chi)(\overline{x}_{out}))),$$

$$i^\chi(G^1(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in})) = i^\chi((Ker\ \chi)(G^1(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in}))) =$$
$$= \chi(G^1(\overline{x}_{state}, \overline{x}_{in})) = G^1(\varphi(\overline{x}_{state}), \psi(\overline{x}_{in})) = G^1(i^\varphi((Ker\ \varphi)(\overline{x}_{state})), i^\psi((Ker\ \psi)(\overline{x}_{in}))),$$

т. е. i сохраняет операции H^1, G^1, K^1.

Теорема доказана.

Прямое произведение РНСДВ

Определение 6. Прямым произведением двух нейронных сетей $N^1 = (S^1, X^1, Y^1, \alpha^1, \beta^1, \delta^1, G^1, K^1, H^1, \overline{x}^1_0, \overline{s}^1_0, T)$ и $N^2 = (S^2, X^2, Y^2, \alpha^2, \beta^2, \delta^2, G^2, K^2, H^2, \overline{x}^2_0, \overline{s}^1_0, T)$ назовем РНСДВ

$$N^1 \times N^2 := (S, X, Y, \alpha, \beta, \delta, G, K, H, \overline{x}_0, \overline{s}_0, T),$$

где $S = S^1 \times S^2$ — множество состояний, $X = X^1 \times X^2$ — множество входных сигналов, $Y = Y^1 \times Y^2$ — множество выходных сигналов, m^1, m^2 — количество функциональных элементов первой и второй РНСДВ соответственно,

$$\alpha^i = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{p_{in}^1}^i), \beta^i = (b_1^i, b_2^i, \ldots, b_{p_{state}^1}^i), \delta^i = (c_1^i, c_2^i, \ldots, c_{p_{out}^1}^i), \ i = 1, 2,$$

$$\alpha = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{p_{in}^1}^1, m^1 + a_1^2, m^1 + a_2^2, \ldots, m^1 + a_{p_{in}^2}^2),$$

$$\beta = (b_1^1, b_2^1, \ldots, b_{p_{state}^1}^1, m^1 + b_1^2, m^1 + b_2^2, \ldots, m^1 + b_{p_{state}^2}^2),$$

$$\delta = (c_1^1, c_2^1, \ldots, c_{p_{out}^1}^1, m^1 + c_1^2, m^1 + c_2^2, \ldots, m^1 + c_{p_{out}^2}^2),$$

$$K((\bar{d}^1, \bar{d}^2), (\bar{x}_{out}^1, \bar{x}_{out}^2)) := (K^1(\bar{d}^1, \bar{x}_{out}^1), K^2(\bar{d}^2, \bar{x}_{out}^2)),$$
$$H((\bar{x}_{state}^1, \bar{x}_{state}^2), (\bar{x}_{in}^1, \bar{x}_{in}^2)) := (H^1(\bar{x}_{state}^1, \bar{x}_{in}^1), H^2(\bar{x}_{state}^2, \bar{x}_{in}^2)),$$
$$G((\bar{x}_{state}^1, \bar{x}_{state}^2), (\bar{x}_{in}^1, \bar{x}_{in}^2)) := (G^1(\bar{x}_{state}^1, \bar{x}_{in}^1), G^2(\bar{x}_{state}^2, \bar{x}_{in}^2))$$

для любых

$$(\bar{x}_{state}^1, \bar{x}_{state}^2) \in S^1 \times S^2, (\bar{x}_{in}^1, \bar{x}_{in}^2) \in X^1 \times X^2,$$
$$(\bar{x}_{out}^1, \bar{x}_{out}^2) \in Y^1 \times Y^2, (\bar{d}^1, \bar{d}^2) \in \bar{I}^1 \times \bar{I}^2.$$

Определение 7. Отображение

$$\pi_1 : N^1 \times N^2 \to N^1, \pi_1 = (\pi_1^S, \pi_1^X, \pi_1^Y, \pi_1^\alpha, \pi_1^\beta, \pi_1^\delta),$$

в котором

$$\pi_1^S : S^1 \times S^2 \to S^1, (\bar{x}_{state}^1, \bar{x}_{state}^2) \mapsto \bar{x}_{state}^1,$$
$$\pi_1^X : X^1 \times X^2 \to X^1, (\bar{x}_{in}^1, \bar{x}_{in}^2) \mapsto \bar{x}_{in}^1,$$
$$\pi_1^Y : Y^1 \times Y^2 \to Y^1, (\bar{x}_{out}^1, \bar{x}_{out}^2) \mapsto \bar{x}_{out}^1,$$
$$\pi_1^\alpha : \alpha \to \alpha^1,$$
$$\pi_1^\beta : \beta \to \beta^1,$$
$$\pi_1^\delta : \delta \to \delta^1$$

и

$$\pi_2 : N^1 \times N^2 \to N^2, \pi_1 = (\pi_2^S, \pi_2^X, \pi_2^Y, \pi_2^\alpha, \pi_2^\beta, \pi_2^\delta),$$

в котором

$$\pi_2^S : S^1 \times S^2 \to S^2, (\bar{x}_{state}^1, \bar{x}_{state}^2) \mapsto \bar{x}_{state}^2,$$
$$\pi_2^X : X^1 \times X^2 \to X^2, (\bar{x}_{in}^1, \bar{x}_{in}^2) \mapsto \bar{x}_{in}^2,$$

$$\pi_2^Y : Y^1 \times Y^2 \to Y^2, (\overline{x}_{out}^1, \overline{x}_{out}^2) \mapsto \overline{x}_{out}^2,$$
$$\pi_2^\alpha : \alpha \to \alpha^2,$$
$$\pi_2^\beta : \beta \to \beta^2,$$
$$\pi_2^\delta : \delta \to \delta^2$$

называются проекциями прямого произведения $N^1 \times N^2$ на сомножители.

Теорема о проекциях прямого произведения.

Проекции прямого произведения РНСДВ N^1 и N^2 на сомножители являются гомоморфизмами.

Доказательство. Пусть

$$N^1 = (S^1, X^1, Y^1, \alpha^1, \beta^1, \delta^1, G^1, K^1, H^1, \overline{x}_0^1, \overline{s}_0^1, T),$$

$$N^2 = (S^2, X^2, Y^2, \alpha^2, \beta^2, \delta^2, G^2, K^2, H^2, \overline{x}_0^2, \overline{s}_0^2, T)$$

$$\text{и } N^1 \times N^2 := (S, X, Y, \alpha, \beta, \delta, G, K, H, \overline{x}_0, \overline{s}_0, T),$$

$$(\overline{x}_{state}^1, \overline{x}_{state}^2) \in S^1 \times S^2, (\overline{x}_{in}^1, \overline{x}_{in}^2) \in X^1 \times X^2,$$
$$(\overline{x}_{out}^1, \overline{x}_{out}^2) \in Y^1 \times Y^2, (\overline{d}^1, \overline{d}^2) \in \overline{I}^1 \times \overline{I}^2.$$

Тогда

$$\pi_1^Y(G((\overline{x}_{state}^1, \overline{x}_{state}^2), (\overline{x}_{in}^1, \overline{x}_{in}^2))) = \pi_1^Y(G^1(\overline{x}_{state}^1, \overline{x}_{in}^1), G^2(\overline{x}_{state}^2, \overline{x}_{in}^2)) =$$
$$= G^1(\overline{x}_{state}^1, \overline{x}_{in}^1) = G^1(\pi_1^S(\overline{x}_{state}^1, \overline{x}_{state}^2), \pi_1^X(\overline{x}_{in}^1, \overline{x}_{in}^2)).$$

Аналогичные равенства можно получить и для π_1^X, π_1^S.

Рассмотрим теперь отображения $\pi_1^\alpha, \pi_1^\beta, \pi_1^\delta$:

$$\pi_1^\alpha(\alpha(\overline{x}_{in}^1, \overline{x}_{in}^2)) = \pi_1^\alpha(\alpha^1(\overline{x}_{in}^1), \alpha^2(\overline{x}_{in}^2)) = \alpha^1(\overline{x}_{in}^1) = \alpha^1(\pi_1^X(\overline{x}_{in}^1, \overline{x}_{in}^2)),$$
$$\pi_1^\beta(\beta(\overline{x}_{state}^1, \overline{x}_{state}^2)) = \pi_1^\beta(\beta^1(\overline{x}_{state}^1), \beta^2(\overline{x}_{state}^2)) = \beta^1(\overline{x}_{state}^1) = \beta^1(\pi_1^S(\overline{x}_{state}^1, \overline{x}_{state}^2)),$$
$$\pi_1^\delta(\delta(\overline{x}_{out}^1, \overline{x}_{out}^2)) = \pi_1^\delta(\delta^1(\overline{x}_{out}^1), \delta^2(\overline{x}_{out}^2)) = \delta^1(\overline{x}_{out}^1) = \delta^1(\pi_1^Y(\overline{x}_{out}^1, \overline{x}_{out}^2)).$$

Аналогичные соотношения имеют место для каждой из компонент отображения π_2.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *McCulloc W. S., Pitts W. H.* A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bull. of Math. Biophysics. 1943. V. 5. P. 115–133.
2. *Псиола В. В.* Обзор основных нейросетевых моделей // Интеллектуальные системы. 1999. Т. 4, вып. 3–4. С.139–172.
3. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М., 1997. С. 11.
4. *Carrasco R.C., Mikel J.O., Forcada L.* Efficient Encodings of finite automata in discrete-time recurrent neural networks. URL: http://www.dlsi.ua.es/~mlf/docum/carrasco99p.pdf