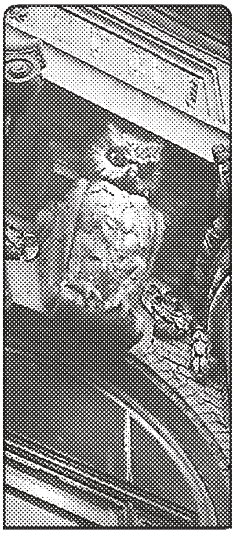

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 512

О квазимногочленах Капелли. II

С. Ю. Антонов, А. В. Антонова

Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51, antonovst-vm@rambler.ru

Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51, antonovakazan@rambler.ru

В данной работе продолжено исследование некоторого вида многочленов типа Капелли (квазимногочленов Капелли), принадлежащих свободной ассоциативной алгебре $F\{X\bigcup Y\}$, рассматриваемой над произвольным полем F и порожденной двумя непересекающимися счетными множествами X, Y. Доказано, что если $char\,F = 0$, то среди квазимногочленов Капелли степени $4k-1$ существуют такие, которые не являются ни следствиями стандартного многочлена S_{2k}^{-}, ни тождествами матричной алгебры $M_k(F)$. Показано, что если $char\,F = 0$, то только два из шести квазимногочленов Капелли степени $4k-1$ будут тождествами нечетной компоненты Z_2-градуированной матричной алгебры $M_{k+k}(F)$. Также доказано, что все квазимногочлены Капелли степени $4k+1$ являются тождествами некоторых подпространств нечетной компоненты Z_2-градуированной матричной алгебры $M_{m+k}(F)$ при $m > k$. Приведены условия, при которых квазимногочлены Капелли степени $4k+1$ будут тождествами подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$.

Ключевые слова: T-идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

Поступила в редакцию: 04.02.2019 / Принята: 03.03.2019 / Опубликована: 02.03.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16

Продолжение. Начало см.: Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 371–382.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F, порожденная счетным множеством Z, которое представим в виде $X\bigcup Y$, где $X=\{x_n\}_{n\in N}$, $Y=\{y_n\}_{n\in N}$ — непересекающиеся счетные множества, f_{2n-1}, g_{2n-1}, b_{2n-1}, h_{2n-1}, a_{2n-1}, c_{2n-1}, f_{2n}, g_{2n}, b_{2n}, h_{2n}, a_{2n}, c_{2n} — многочлены типа Капелли (квазимногочлены Капелли) алгебры $F\{Z\}$, исследование которых начато в [1, 2]. В данной работе мы продолжаем изучение этих многочленов и показываем, что они являются тождествами некоторых подпространств матричной алгебры $M_m(F)$.

Полученные в статье результаты о квазимногочленах Капелли представляют интерес как сами по себе, поскольку эти многочлены оказываются минимальными тождествами некоторых подпространств алгебры $M_{m+k}(F)$ (с этой точки зрения см., например, работы [3–7]), так и в связи с задачей описания идеала $T_{Z_2}(M_{m+k}(F))$ Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной матричной алгебры $M_{m+k}(F)$ при любых m,k и F. Заметим, что, несмотря на отдельные имеющиеся результаты (см., например, [8–12]), общего решения этой задачи до сих пор нет.

1. О НЕКОТОРЫХ МНОГОЧЛЕНАХ АЛГЕБРЫ $F\{Z\}$

Пусть S_n — симметрическая группа степени n, $A_n^+=\{\sigma\in S_n\,|\,\operatorname{sgn}\sigma=1\}$, $A_n^-=\{\sigma\in S_n\,|\,\operatorname{sgn}\sigma=-1\}$, $S_n^-(\bar{x})=S_n^-(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$ — стандартный многочлен степени n; p,q — какие-нибудь многочлены алгебры $F\{Z\}$, $\{p\}^T$ — T-идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный многочленом p. Напомним, что двусторонний идеал I алгебры $F\{Z\}$ называется T-идеалом и обозначается символом $I\lhd_T F\{Z\}$, если для любого эндоморфизма φ алгебры $F\{Z\}$ справедливо включение $\varphi(I)\subseteq I$. Далее будем говорить, что многочлен q является следствием многочлена p (следует из p), если $q\in\{p\}^T$. Кроме того, пусть $M_m(F)$ — алгебра квадратных матриц размера $m\times m$, $T[M_m(F)]$ — идеал ее полиномиальных тождеств. Теорема Амицура – Левицкого утверждает [13], что $S_{2m}^-\in T[M_m(F)]$ и что если $\Phi\in T[M_m(F)]$, то $deg\,\Phi\geqslant 2m$. Опираясь на этот факт, докажем следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть $char\,F=0$, H — произвольное непустое подмножество группы S_{2m}, $P_{4m-1}(\bar{x},\bar{y})=\sum\limits_{\pi\in H}\sum\limits_{\tau\in S_{2m-1}}\operatorname{sgn}\tau x_{\pi(1)}y_{\tau(1)}x_{\pi(2)}\cdots y_{\tau(2m-1)}x_{\pi(2m)}$. Тогда $P_{4m-1}(\bar{x},\bar{y})\notin T[M_m(F)]$.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда $P_{4m-1}(\bar{x},\bar{y})\in T[M_m(F)]$, и, значит, для подстановки аргументов $(x_1,\ldots,x_{2m})=(1,\ldots,1)$, $(y_1,\ldots,y_{2m-1})=(a_1,\ldots,a_{2m-1})$, где $1,a_1,\ldots,a_{2m-1}\in M_m(F)$, справедливо равенство

$$0=P_{4m-1}(1,\ldots,1,a_1,\ldots,a_{2m-1})=\sum_{\pi\in H}\sum_{\tau\in S_{2m-1}}\operatorname{sgn}\tau 1_{\pi(1)}a_{\tau(1)}1_{\pi(2)}\cdots a_{\tau(2m-1)}1_{\pi(2m)}=$$
$$=|H|S_{2m-1}^-(a_1,\ldots,a_{2m-1}).$$

Отсюда и из произвольности выбора элементов $a_1,\ldots,a_{2m-1}$ алгебры $M_m(F)$ получаем, что стандартный многочлен $S_{2m-1}^-(\bar{x})\in T[M_m(F)]$, что противоречит теореме Амицура – Левицкого. Следовательно, наше предположение неверно и потому $P_{4m-1}(\bar{x},\bar{y})\notin T[M_m(F)]$. □

Следствие 1. *Если $char\,F=0$, то $C_{4m-1,\{1\}}(\bar{x},\bar{y})$, $a_{4m-1}(\bar{x},\bar{y})$, $c_{4m-1}(\bar{x},\bar{y})\notin T[M_m(F)]$.*

Доказательство. Последовательно полагая в предложении 1 H равным S_{2m}, A^{+}_{2m}, A^{-}_{2m}, получим требуемый результат. □

Следствие 2. *Если* $char\, F = 0$, *то многочлен* $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin \{S^{-}_{2m}(\bar{x})\}^T$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{S^{-}_{2m}(\bar{x})\}^T$, и, значит, с учетом теоремы Амицура – Левицкого имеем включения $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{S^{-}_{2m}(\bar{x})\}^T \subseteq T[M_m(F)]$. Следовательно, $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_m(F)]$, что противоречит предложению 1. Таким образом, наше предположение неверно. □

Следствие 3. *Если* $char\, F = 0$, *то* $C_{4m-1,\{1\}}(\bar{x}, \bar{y}), a_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), c_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin \{S^{-}_{2m}(\bar{x})\}^T$.

Доказательство. Последовательно полагая в следствии 2 H равным S_{2m}, A^{+}_{2m}, A^{-}_{2m}, получим требуемый результат. □

Рассуждая так же, как и выше, приходим к следующим результатам.

Предложение 2. *Если* $char\, F = 0$, *то многочлены* $f_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), g_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_m(F)]$.

Следствие 4. *Если* $char\, F = 0$, *то многочлены* $f_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin \{S^{-}_{2m}(\bar{x})\}^T$.

Пусть $m, k \in \mathbf{N}$, $M_{m+k}(F)$ — алгебра матриц, градуированная подпространствами $M_0^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{m\times m}(F) & 0_{m\times k} \\ 0_{k\times m} & D_{k\times k}(F) \end{pmatrix} \right\}$, $M_1^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & B_{m\times k}(F) \\ A_{k\times m}(F) & 0_{k\times k} \end{pmatrix} \right\}$, $T[M_1^{(m,k)}(F)]$ — идеал тождеств векторного подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$.

Предложение 3. *Пусть* $char\, F = 0$ *и многочлен* $d_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{f_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $a_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $c_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y})\}$. *Тогда* $d_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_1^{(m,m)}(F)]$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда для любых матриц $a^i = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & B^i_{m\times m} \\ A^i_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{pmatrix}$, $b^j = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & C^j_{m\times m} \\ D^j_{m\times m} & 0_{m\times m} \end{pmatrix} \in M_1^{(m,m)}(F)$, где $i = \overline{1, 2m}$, $j = \overline{1, 2m-1}$, будем иметь

$$d_{4m-1}(a^1, \ldots, a^{2m}, b^1, \ldots, b^{2m-1}) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & d_{4m-1}(B^1, \ldots, B^{2m}, D^1, \ldots, D^{2m-1}) \\ d_{4m-1}(A^1, \ldots, A^{2m}, C^1, \ldots, C^{2m-1}) & 0_{m\times m} \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что $d_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_m(F)]$, а это противоречит или следствию 1, или предложению 2. Таким образом, наше предположение неверно и, значит, $d_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_1^{(m,m)}(F)]$. □

Заметим, что согласно предложению 3 работы [14] многочлены $b_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_m(F)]$, и потому, как нетрудно видеть, справедливы включения $b_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,m)}(F)]$. Таким образом, в случае, когда $char\, F = 0$, только два из шести квазимногочленов Капелли степени $4m - 1$ являются тождествами подпространства $M_1^{(m,m)}(F)$.

2. О ТОЖДЕСТВАХ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВА $M_1^{(m,k)}(F)$

Пусть n, m, k — произвольные натуральные числа, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $M_{k\times m}(F)$, $M_{m\times k}(F)$ — векторные пространства над F, элементами которых являются прямоугольные матрицы размера $k \times m$ и $m \times k$ соответственно, $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{\pi\in S_{2k+1}} \sum\limits_{\tau\in S_{2k}} \alpha_\tau^\pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\pi(2k+1)}$ — какой-нибудь полилинейный многочлен алгебры $F\{Z\}$. Для любого $i \in I_{2k+1}$ положим

$$S_{2k+1}(i) = \{\sigma \in S_{2k+1} \,|\, \sigma(i) = i\}.$$

Нетрудно видеть, что отображения $\psi_i : S_{2k+1}(i) \to S_{2k}$, $\xi_i : S_{2k} \to S_{2k+1}(i)$ такие, что для любых $\sigma \in S_{2k+1}(i)$, $\pi \in S_{2k}$

$$\psi_i(\sigma)(j) = \begin{cases} \sigma(j), \text{ если } j \leqslant i-1 \text{ и } \sigma(j) \leqslant i-1, \\ \sigma(j)-1, \text{ если } j \leqslant i-1 \text{ и } \sigma(j) \geqslant i+1, \\ \sigma(j+1), \text{ если } j \geqslant i \text{ и } \sigma(j+1) \leqslant i-1, \\ \sigma(j+1)-1, \text{ если } j \geqslant i \text{ и } \sigma(j+1) \geqslant i+1, \end{cases}$$

$$\xi_i(\pi)(j) = \begin{cases} \pi(j), \text{ если } j \leqslant i-1 \text{ и } \pi(j) \leqslant i-1, \\ \pi(j)+1, \text{ если } j \leqslant i-1 \text{ и } \pi(j) > i-1, \\ i, \text{ если } j = i, \\ \pi(j-1), \text{ если } j \geqslant i+1 \text{ и } \pi(j-1) \leqslant i-1, \\ \pi(j-1)+1, \text{ если } j \geqslant i+1 \text{ и } \pi(j-1) > i-1 \end{cases}$$

являются изоморфизмами групп и что $\xi_i = \psi_i^{-1}$.

Лемма 1. *Для многочлена $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$ справедливы равенства*

1) $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{2k+1} x_i \tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}})$,

2) $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{2k+1} \tilde{\Psi}_{4k}^i(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) x_i$, *где*

$$\tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}) = \sum_{\sigma_i\in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha_\tau^{\sigma_i\mu_i} y_{\tau(1)} x_{\sigma_i(1)} \cdots y_{\tau(i-1)} x_{\sigma_i(i-1)} y_{\tau(i)} x_{\sigma_i(i+1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\sigma_i(2k+1)},$$

$$\tilde{\Psi}_{4k}^i(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) = \sum_{\sigma_i\in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha_\tau^{\sigma_i\rho_i} x_{\sigma_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\sigma_i(i-1)} y_{\tau(i-1)} x_{\sigma_i(i+1)} y_{\tau(i)} \cdots x_{\sigma_i(2k+1)} y_{\tau(2k)},$$

$$\mu_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & 2k+1 \\ i & 1 & 2 & \ldots & i-2 & i-1 & i+1 & \ldots & 2k+1 \end{pmatrix}, \ \rho_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & \ldots & 2k & 2k+1 \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 & i+1 & \ldots & 2k+1 & i \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для любого $i \in I_{2k+1}$ положим $S'_{2k+1}(i) = \{\pi \in S_{2k+1} \,|\, \pi(1) = i\}$, $\tilde{S}_{2k+1}(i) = \{\omega \in S_{2k+1} \,|\, \omega(2k+1) = i\}$. Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in S'_{2k+1}(i)$, $\omega \in \tilde{S}_{2k+1}(i)$ можно представить в виде $\pi = \sigma\mu_i$, $\omega = \gamma\rho_i$, где $\sigma, \gamma \in S_{2k+1}(i)$. Тогда мы можем записать, что

$$\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi\in S_{2k+1}} \sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha_\tau^\pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\pi(2k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{\pi_i \in S'_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^{\pi_i}\, x_{\pi_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\pi_i(2k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^{\sigma_i\mu_i}\, x_{\sigma_i\mu_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\sigma_i\mu_i(2k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^{\sigma_i\mu_i}\, x_i y_{\tau(1)} x_{\sigma_i(1)} \cdots y_{\tau(i-1)} x_{\sigma_i(i-1)} y_{\tau(i)} x_{\sigma_i(i+1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\sigma_i(2k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} x_i \tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}).$$

Аналогично получаем второе равенство леммы 1. □

Замечание 1. Последовательно полагая $\Phi_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$ равным $b_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $h_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $a_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $c_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $f_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, $g_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$ и учитывая предложение 3 из [1] и предложение 3 из [2], будем иметь

$$b_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} x_i a_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}) = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} b_{4k}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) x_i,$$

$$h_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} x_i c_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}) = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} h_{4k}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) x_i,$$

$$a_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} b_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^{k} x_{2i} h_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} a_{4k}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} + \sum_{i=1}^{k} c_{4k}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i},$$

$$c_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} h_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^{k} x_{2i} b_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} c_{4k}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} + \sum_{i=1}^{k} a_{4k}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i},$$

$$f_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} f_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{k} x_{2i} g_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} f_{4k}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{k} g_{4k}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i},$$

$$g_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} g_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{k} x_{2i} f_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} g_{4k}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{k} f_{4k}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i}.$$

Лемма 2. *Для любого* $i \in I_{2k+1}$ *справедливы включения* $\tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}) \in \in \{\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})\}^T$, $\tilde{\Psi}^i_{4k}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) \in \{\Psi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})\}^T$, *где*

$$\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) = \sum_{\tau \in S_{2k}} \sum_{\pi \in S_{2k}} \alpha_\tau^{\psi_i^{-1}(\pi)\mu_i} x_{\tau(1)} y_{\pi(1)} x_{\tau(2)} \ldots x_{\tau(2k)} y_{\pi(2k)},$$
$$\Psi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_{2k}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^{\psi_i^{-1}(\pi)\rho_i} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)}.$$

Доказательство. Для любого $i \in I_{2k+1}$ определим эндоморфизмы φ_i, χ_i алгебры $F\{Z\}$:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} z, \text{ если } z \notin \{x_1, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_{2k}\}, \\ y_s, \text{ если } z = x_s, 1 \leqslant s \leqslant 2k, \\ x_s, \text{ если } z = y_s \text{ и } 1 \leqslant s \leqslant i-1, \\ x_{s+1}, \text{ если } z = y_s \text{ и } i \leqslant s \leqslant 2k, \end{cases}$$
$$\chi_i(z) = \begin{cases} z, \text{ если } z \notin \{x_1, \ldots, x_{2k}\}, \\ x_s, \text{ если } z = x_s, 1 \leqslant s \leqslant i-1, \\ x_{s+1}, \text{ если } z = x_s \text{ и } i \leqslant s \leqslant 2k. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\varphi_i(\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})) = \tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}})$, $\chi_i(\Psi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})) = \tilde{\Psi}^i_{4k}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y})$, и, значит, $\tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}) \in \{\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})\}^T$, $\tilde{\Psi}^i_{4k}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) \in \{\Psi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})\}^T$. □

Замечание 2. Из определения энфоморфизмов φ_i, χ_i следует, что для любых матриц $A^1, \ldots, A^{2k} \in M_{k\times m}(F)$, $B^1, \ldots, B^{2k} \in M_{m\times k}(F)$ и всякого $s \in I_{2k+1}$ справедливы равенства $\tilde{\Phi}^s_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = \Phi^s_{4k}(\bar{A}; \bar{B})$, $\tilde{\Phi}^s_{4k}(\bar{B}; \bar{A}) = \Phi^s_{4k}(\bar{B}; \bar{A})$, $\tilde{\Psi}^s_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = \Psi^s_{4k}(\bar{A}; \bar{B})$, $\tilde{\Psi}^s_{4k}(\bar{B}; \bar{A}) = \Psi^s_{4k}(\bar{B}; \bar{A})$, где $\bar{A} = (A^1, \ldots, A^{2k})$, $\bar{B} = (B^1, \ldots, B^{2k})$.

Положим

$$K_1 = \{f_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), g_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), b_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), h_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), a_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), c_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})\},$$
$$K_0 = \{\pm f_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm g_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm b_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm h_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm a_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm c_{4k}(\bar{x}', \bar{y})\}.$$

Лемма 3. *Пусть* $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in K_1$. *Тогда для любого* $i \in I_{2k+1}$ $\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})$, $\Psi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in K_0$.

Доказательство. Согласно лемме 1

$$\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{2k+1} x_i \tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}) = \sum_{i=1}^{2k+1} \tilde{\Psi}^i_{4k}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) x_i.$$

Отсюда, а также из замечания 1 и леммы 2 получаем требуемый результат. □

Лемма 4. *Пусть* $I \lhd_T F\{Z\}$ *и для любого* $i \in I_{2k+1}$ $\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in I$ $(\Psi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in I)$, *тогда* $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \sum_{i=1}^{2k+1} \{\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})\}^T \subseteq I$ $(\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \sum_{i=1}^{2k+1} \{\Psi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})\}^T \subseteq I)$.

Доказательство. Проведем для многочленов $\Phi^i_{4k}(\bar{x}',\bar{y})$, поскольку для $\Psi^i_{4k}(\bar{x}',\bar{y})$ оно аналогично. В силу леммы 1 справедливо равенство

$$\Phi_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{2k+1} x_i \tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{y},\bar{x}_{\hat{i}}).$$

Согласно лемме 2 для любого $i \in I_{2k+1}$ $\tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{y},\bar{x}_{\hat{i}}) \in \{\Phi^i_{4k}(\bar{x}',\bar{y})\}^T$. Отсюда и из того, что I является T-идеалом алгебры $F\{Z\}$, следует, что

$$\Phi_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) \in \sum_{i=1}^{2k+1} \{\Phi^i_{4k}(\bar{x}',\bar{y})\}^T \subseteq I. \qquad \square$$

Лемма 5. *Для любых матриц*

$$u^i = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & P^i_{k\times k} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & S^i_{(m-k)\times k} \\ A^i_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}, \quad v^j = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & D^j_{k\times k} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & U^j_{(m-k)\times k} \\ B^j_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$$

алгебры $M_{m+k}(F)$, где $m > k$, $i = \overline{1,2k+1}$, $j = \overline{1,2k}$, справедливо равенство

$$\Phi_{4k+1}(u^1,\ldots,u^{2k+1};v^1,\ldots,v^{2k}) = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & W^2_{k\times k} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & W^1_{(m-k)\times k} \\ W^3_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \end{pmatrix},$$

где $W^1_{(m-k)\times k} = \sum_{i=1}^{2k+1} S^i\Phi^i_{4k}(\bar{B};\bar{P}_{\hat{i}})$, $W^2_{k\times k} = \sum_{i=1}^{2k+1} P^i\Phi^i_{4k}(\bar{B};\bar{P}_{\hat{i}})$, $W^3_{k\times k} = \sum_{i=1}^{2k+1} A^i\Phi^i_{4k}(\bar{D};\bar{A}_{\hat{i}})$, *здесь* $\bar{B} = (B^1,\ldots,B^{2k})$, $\bar{P}_{\hat{i}} = (P^1,\ldots,P^{i-1},P^{i+1},\ldots,P^{2k+1})$, $\bar{D} = (D^1,\ldots,D^{2k})$, $\bar{A}_{\hat{i}} = (A^1,\ldots,A^{i-1},A^{i+1},\ldots,A^{2k+1})$.

Доказательство. Подставляя заданные матрицы в многочлен $\Phi_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})$, получим

$$\Phi_{4k+1}(u^1,\ldots,u^{2k+1};v^1,\ldots,v^{2k}) = \sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau \prod_{i=1}^{2k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(i)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(i)} \\ A^{\pi(i)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & D^{\tau(i)} \\ 0 & 0 & U^{\tau(i)} \\ B^{\tau(i)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ A^{\pi(2k+1)} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau \prod_{i=1}^{2k} \begin{pmatrix} P^{\pi(i)}B^{\tau(i)} & 0 & 0 \\ S^{\pi(i)}B^{\tau(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{\pi(i)}D^{\tau(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ A^{\pi(2k+1)} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{2k} P^{\pi(i)}B^{\tau(i)} & 0 & 0 \\ S^{\pi(1)}B^{\tau(1)}P^{\pi(2)}B^{\tau(2)}\ldots P^{\pi(2k)}B^{\tau(2k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \prod_{i=1}^{2k} A^{\pi(i)}D^{\tau(i)} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ A^{\pi(2k+1)} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & W^2_{k\times k} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & W^1_{(m-k)\times k} \\ W^3_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \end{pmatrix},$$

где

$$W^1_{(m-k)\times k}=\sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}}\alpha^\pi_\tau S^{\pi(1)}_{(m-k)\times k}B^{\tau(1)}P^{\pi(2)}B^{\tau(2)}\cdots P^{\pi(2k)}B^{\tau(2k)}P^{\pi(2k+1)},$$

$$W^2_{k\times k}=\sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}}\alpha^\pi_\tau P^{\pi(1)}B^{\tau(1)}P^{\pi(2)}\cdots B^{\tau(2k)}P^{\pi(2k+1)},$$

$$W^3_{k\times k}=\sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}}\alpha^\pi_\tau A^{\pi(1)}D^{\tau(1)}A^{\pi(2)}\cdots D^{\tau(2k)}A^{\pi(2k+1)}.$$

Преобразуем правые части в выражениях для матриц $W^1_{(m-k)\times k}$, $W^2_{k\times k}$, $W^3_{k\times k}$. Для этого положим $S'_{2k+1}(i)=\{\pi\in S_{2k+1}\,|\,\pi(1)=i\}$, $S_{2k+1}(i)=\{\sigma\in S_{2k+1}\,|\,\sigma(i)=i\}$, $\mu_i=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & 2k+1\\ i & 1 & \dots & i-2 & i-1 & i+1 & \dots & 2k+1\end{pmatrix}$, где $i=\overline{1,2k+1}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi\in S'_{2k+1}(i)$ можно представить в виде $\pi=\sigma\mu_i$, где $\sigma\in S_{2k+1}(i)$. Тогда мы можем записать, что

$$W^1_{(m-k)\times k}=\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{\pi_i\in S'_{2k+1}(i)}\sum_{\tau\in S_{2k}}\alpha^{\pi_i}_\tau S^{\pi_i(1)}_{(m-k)\times k}B^{\tau(1)}P^{\pi_i(2)}\cdots B^{\tau(2k)}P^{\pi_i(2k+1)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{\sigma_i\in S_{2k+1}(i)}\sum_{\tau\in S_{2k}}\alpha^{\sigma_i\mu_i}_\tau S^iB^{\tau(1)}P^{\sigma_i(1)}B^{\tau(2)}\cdots B^{\tau(2k)}P^{\sigma_i(2k+1)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{2k+1}S^i\sum_{\sigma_i\in S_{2k+1}(i)}\sum_{\tau\in S_{2k}}\alpha^{\sigma_i\mu_i}_\tau B^{\tau(1)}P^{\sigma_i(1)}B^{\tau(2)}\cdots B^{\tau(2k)}P^{\sigma_i(2k+1)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{2k+1}S^i\tilde{\Phi}^i_{4k}(B^1,\dots,B^{2k};P^1,\dots,P^{i-1},P^{i+1},\dots,P^{2k+1}).$$

Учитывая теперь замечание 2, приходим к равенству $W^1_{(m-k)\times k}=\sum\limits_{i=1}^{2k+1}S^i\,\Phi^i_{4k}(\bar{B};\bar{P}_{\hat{i}})$. Аналогично для матриц $W^2_{k\times k}$ и $W^3_{k\times k}$ получаем, что $W^2_{k\times k}=\sum\limits_{i=1}^{2k+1}P^i\Phi^i_{4k}(\bar{B};\bar{P}_{\hat{i}})$, $W^3_{k\times k}=\sum\limits_{i=1}^{2k+1}A^i\Phi^i_{4k}(\bar{D};\bar{A}_{\hat{i}})$. □

Следствие 5. *Предположим, что для любого* $i=\overline{1,2k+1}$ *многочлен* $\Phi^i_{4k}(\bar{x}',\bar{y})\in\in T[M_k(F)]$. *Тогда* $\Phi_{4k+1}(u^1,\dots,u^{2k+1};v^1,\dots,v^{2k})=0$.

Теорема 1. *Для любого многочлена* $\Phi_{4k+1}(\bar{x},\bar{y})\in K_1$ *и произвольных матриц*

$$u^i=\begin{pmatrix}0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & P^i_{k\times k}\\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & S^i_{(m-k)\times k}\\ A^i_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k}\end{pmatrix},\quad v^j=\begin{pmatrix}0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & D^j_{k\times k}\\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & U^j_{(m-k)\times k}\\ B^j_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k}\end{pmatrix}$$

алгебры $M_{m+k}(F)$, *где* $m>k$, $i=\overline{1,2k+1}$, $j=\overline{1,2k}$, *справедливо равенство* $\Phi_{4k+1}(u^1,\dots,u^{2k+1};v^1,\dots,v^{2k})=0$.

Доказательство. Согласно лемме 3 для любого $i = \overline{1, 2k+1}$ многочлен $\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in K_0$, а в силу предложения 7 работы [2] при $char\, F \neq 2$ $K_0 \subseteq \{S^-_{2k}(\bar{x}')\}^T$. Учитывая теперь теорему Амицура – Левицкого, получаем, что $\{S^-_{2k}(\bar{x}')\}^T \subseteq T[M_k(F)]$, но тогда $\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in T[M_k(F)]$ для любого $i = \overline{1, 2k+1}$.

Из того, что включение $\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in T[M_k(F)]$ верно при любом поле F характеристики не два, и того, что многочлен $\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y})$ полилинеен и имеет коэффициенты ± 1, вытекает, что включение $\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in T[M_k(F)]$ остается верным и при $char\, F = 2$. Таким образом, при любом поле F и всяком $i \in I_{2k+1}$ многочлен $\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in T[M_k(F)]$. Отсюда и из следствия 5 получаем $\Phi_{4k+1}(u^1, \ldots, u^{2k+1}; v^1, \ldots, v^{2k}) = 0$. □

Замечание 3. При доказательстве теоремы 1 нами установлено, что если многочлен $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in K_1$, то для любого $i = \overline{1, 2k+1}$ $\Phi^i_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in K_0 \subseteq T[M_k(F)]$.

Лемма 6. *Для любых матриц*

$$u^i = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & P^i_{k\times k} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & S^i_{(m-k)\times k} \\ 0_{k\times k} & N^i_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}, v^j = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & D^j_{k\times k} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & U^j_{(m-k)\times k} \\ 0_{k\times k} & L^j_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$$

алгебры $M_{m+k}(F)$, где $m > k$, $i = \overline{1, 2k+1}$, $j = \overline{1, 2k}$, справедливо равенство

$$\Phi_{4k+1}(u^1, \ldots, u^{2k+1}; v^1, \ldots, v^{2k}) = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & \widetilde{W}^2_{k\times k} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & \widetilde{W}^1_{(m-k)\times k} \\ 0_{k\times k} & \widetilde{W}^3_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{W}^1_{(m-k)\times k} = \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \Phi^i_{4k}(\bar{L}; \bar{S}_{\hat{i}}), \quad \widetilde{W}^2_{k\times k} = \sum_{i=1}^{2k+1} P^i \Phi^i_{4k}(\bar{L}; \bar{S}_{\hat{i}}),$$

$$\widetilde{W}^3_{k\times(m-k)} = \sum_{i=1}^{2k+1} N^i \Phi^i_{4k}(\bar{U}; \bar{N}_{\hat{i}}) = \sum_{i=1}^{2k+1} \Psi^i_{4k}(\bar{N}_{\hat{i}}; \bar{U}) N^i,$$

здесь $\bar{L} = (L^1, \ldots, L^{2k})$, $\bar{S}_{\hat{i}} = (S^1, \ldots, S^{i-1}, S^{i+1}, \ldots, S^{2k+1})$, $\bar{U} = (U^1, \ldots, U^{2k})$, $\bar{N}_{\hat{i}} = (N^1, \ldots, N^{i-1}, N^{i+1}, \ldots, N^{2k+1})$.

Доказательство. Подставляя заданные матрицы в многочлен $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, получим

$$\Phi_{4k+1}(u^1, \ldots, u^{2k+1}; v^1, \ldots, v^{2k}) =$$

$$= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau \prod_{i=1}^{2k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(i)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(i)} \\ 0 & N^{\pi(i)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & D^{\tau(i)} \\ 0 & 0 & U^{\tau(i)} \\ 0 & L^{\tau(i)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ 0 & N^{\pi(2k+1)} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau \prod_{i=1}^{2k} \begin{pmatrix} 0 & P^{\pi(i)} L^{\tau(i)} & 0 \\ 0 & S^{\pi(i)} L^{\tau(i)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{\pi(i)} U^{\tau(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ 0 & N^{\pi(2k+1)} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau \begin{pmatrix} 0 & P^{\pi(1)} L^{\tau(1)} \prod_{i=2}^{2k} S^{\pi(i)} L^{\tau(i)} & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^{2k} S^{\pi(i)} L^{\tau(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \prod_{i=1}^{2k} N^{\pi(i)} L^{\tau(i)} \end{pmatrix} \times$$

$$\times\begin{pmatrix}0 & 0 & P^{\pi(2k+1)}\\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)}\\ 0 & N^{\pi(2k+1)} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & \widetilde{W}^2_{k\times k}\\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & \widetilde{W}^1_{(m-k)\times k}\\ 0_{k\times k} & \widetilde{W}^3_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k}\end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{W}^1_{(m-k)\times k} = \sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau\, S^{\pi(1)}\, L^{\tau(1)}\,\cdots L^{\tau(2k)}\, S^{\pi(2k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \sum_{\sigma_i\in S_{2k+1}(i)}\sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha^{\sigma_i\mu_i}_\tau L^{\tau(1)} S^{\sigma_i(1)} L^{\tau(2)}\cdots L^{\tau(2k)} S^{\sigma_i(2k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{L};\bar{S}_{\hat{i}}) = |\text{ учитываем замечание } 2| = \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \Phi^i_{4k}(\bar{L};\bar{S}_{\hat{i}});$$

$$\widetilde{W}^2_{k\times k} = \sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau\, P^{\pi(1)}\, L^{\tau(1)}\, S^{\pi(2)}\cdots L^{\tau(2k)}\, S^{\pi(2k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} P^i \tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{L};\bar{S}_{\hat{i}}) = \sum_{i=1}^{2k+1} P^i \Phi^i_{4k}(\bar{L};\bar{S}_{\hat{i}});$$

$$\widetilde{W}^3_{k\times(m-k)} = \sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau\, N^{\pi(1)}\, U^{\tau(1)}\,\cdots U^{\tau(2k)}\, N^{\pi(2k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} N^i \tilde{\Phi}^i_{4k}(\bar{U};\bar{N}_{\hat{i}}) = \sum_{i=1}^{2k+1} N^i \Phi^i_{4k}(\bar{U};\bar{N}_{\hat{i}}),$$

или при другом преобразовании

$$\widetilde{W}^3_{k\times(m-k)} = \sum_{\pi\in S_{2k+1}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha^\pi_\tau\, N^{\pi(1)}\, U^{\tau(1)}\,\cdots U^{\tau(2k)}\, N^{\pi(2k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{\sigma_i\in S_{2k+1}(i)}\sum_{\tau\in S_{2k}} \alpha^{\sigma_i\rho_i}_\tau N^{\sigma_i(1)} U^{\tau(1)} N^{\sigma_i(2)}\ldots N^{\sigma_i(2k+1)} U^{\tau(2k)} N^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{2k+1} \tilde{\Psi}^i_{4k}(\bar{N}_{\hat{i}};\bar{U}) N^i = \sum_{i=1}^{2k+1} \Psi^i_{4k}(\bar{N}_{\hat{i}};\bar{U}) N^i. \qquad \square$$

Следствие 6. *Предположим, что для любого $i = \overline{1,2k}$ и произвольных матриц $A^1,\ldots,A^{2k}\in M_{k\times(m-k)}(F)$, $B^1,\ldots,B^{2k}\in M_{(m-k)\times k}(F)$ справедливы равенства*

$$\Phi^i_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0,\quad \Phi^i_{4k}(\bar{B};\bar{A}) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi^i_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0,\quad \Psi^i_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0.$$

Тогда

$$\Phi_{4k+1}(u^1,\ldots,u^{2k+1};v^1,\ldots,v^{2k}) = 0.$$

Предложение 4. *Пусть $0 < m-k \leqslant k$ и многочлен*

$$t_{4k}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_{2k}}\sum_{\tau\in S_{2k}} \gamma^\pi_\tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)}\cdots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)} \in T[M_k(F)].$$

Тогда для любых матриц $A^i\in M_{k\times(m-k)}(F)$, $B^j\in M_{(m-k)\times k}(F)$, где $i,j = \overline{1,2k}$, справедливы равенства

$$t_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0,\quad t_{4k}(\bar{B};\bar{A}) = 0.$$

Доказательство. Определим отображения $\psi_1 : M_{k\times(m-k)}(F) \to M_k(F)$, $\psi_2 : M_{(m-k)\times k}(F) \to M_k(F)$, положив для любых $A \in M_{k\times(m-k)}(F)$, $B \in M_{(m-k)\times k}(F)$ $\psi_1(A) = (A\,0)$, $\psi_2(B) = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что отображения ψ_1, ψ_2 являются гомоморфизмами векторных пространств и что $M_{k\times(m-k)}(F) \cong \operatorname{Im}\psi_1$, $M_{(m-k)\times k}(F) \cong \operatorname{Im}\psi_2$. Отсюда и из того, что $t_{4k}(\bar{x},\bar{y}) \in T[M_k(F)]$, получаем

$$t_{4k}(A^1,\ldots,A^{2k};B^1,\ldots,B^{2k}) = t_{4k}(\psi_1(A^1),\ldots,\psi_1(A^{2k});\psi_2(B^1),\ldots,\psi_2(B^{2k})) = 0,$$
$$t_{4k}(B^1,\ldots,B^{2k};A^1,\ldots,A^{2k}) = t_{4k}(\psi_2(B^1),\ldots,\psi_2(B^{2k});\psi_1(A^1),\ldots,\psi_1(A^{2k})) = 0. \ \square$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < m-k \leqslant k$, $\Phi_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) \in K_1$. *Тогда для любых матриц*

$$u^i = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & P^i_{k\times k} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & S^i_{(m-k)\times k} \\ 0_{k\times k} & N^i_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}, \quad v^j = \begin{pmatrix} 0_{k\times k} & 0_{k\times(m-k)} & D^j_{k\times k} \\ 0_{(m-k)\times k} & 0_{(m-k)\times(m-k)} & U^j_{(m-k)\times k} \\ 0_{k\times k} & L^j_{k\times(m-k)} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$$

алгебры $M_{m+k}(F)$, *где* $i = \overline{1,2k+1}$, $j = \overline{1,2k}$, *справедливо равенство* $\Phi_{4k+1}(u^1,\ldots,u^{2k+1};v^1,\ldots,v^{2k}) = 0$.

Доказательство. Вытекает из замечания 3, предложения 4 и следствия 6. $\square$

Лемма 7. *Предположим, что для любых матриц* $A^1,\ldots,A^{2k} \in M_{k\times m}(F)$, $B^1,\ldots,B^{2k} \in M_{m\times k}(F)$ *справедливы равенства* $a_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0$, $b_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0$. *Тогда будут верны и равенства* $c_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0$, $h_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0$, $f_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0$, $g_{4k}(\bar{A};\bar{B}) = 0$.

Доказательство. Вытекает из предложения 2 [1], предложений 1–2 [2] и равенства $b_{4k} - a_{4k} = g_{4k}$. $\square$

Предложение 5. *Пусть многочлен* $\Phi_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) \in K_1$ *и для любых матриц* $P^1,\ldots$, $P^{2k} \in M_{k\times m}(F)$, $Q^1,\ldots,Q^{2k} \in M_{m\times k}(F)$ $a_{4k}(\bar{P};\bar{Q}) = 0$, $b_{4k}(\bar{P};\bar{Q}) = 0$. *Тогда многочлен* $\Phi_{4k+1}(\bar{x},\bar{y}) \in T[M_1^{(m,k)}(F)]$.

Доказательство. Пусть $u^i = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & B^i_{m\times k} \\ A^i_{k\times m} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$, $v^j = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & C^j_{m\times k} \\ D^j_{k\times m} & 0_{k\times k} \end{pmatrix} \in M_1^{(m,k)}(F)$, где $i = \overline{1,2k+1}$, $j = \overline{1,2k}$. Тогда $\Phi_{4k+1}(\bar{u};\bar{v}) = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & V^1_{m\times k} \\ V^2_{k\times m} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$, где с учетом леммы 1 и замечания 2 $V^1_{m\times k} = \sum\limits_{i=1}^{2k+1} B^i \Phi^i_{4k}(\bar{D};\bar{B}_{\hat{i}})$, $V^2_{k\times m} = \sum\limits_{i=1}^{2k+1} \Psi^i_{4k}(\bar{A}_{\hat{i}};\bar{C})A^i$.

Отсюда и из леммы 3 следует, что для выполнения равенства $\Phi_{4k+1}(\bar{u};\bar{v}) = 0$ достаточно, чтобы для любых матриц $P^1,\ldots,P^{2k} \in M_{k\times m}(F)$, $Q^1,\ldots,Q^{2k} \in M_{m\times k}(F)$ и всякого многочлена $\Phi_{4k}(\bar{x}',\bar{y}) \in K_0$ было верно равенство $\Phi_{4k}(\bar{P};\bar{Q}) = 0$. Но оно справедливо в силу условия предложения 5 и леммы 7. $\square$

Окончание следует.

Библиографический список

1. *Антонов С. Ю.* Некоторые виды тождеств подпространств $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Т. 154, кн.1. С. 189–201.
2. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* О квазимногочленах Капелли // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 371–382. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382

3. *Birmajer D.* Polynomial detection of matrix subalgebras // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 133, № 4. P. 1007–1012.
4. *Chang Q.* Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710.
5. *Kostant B.* A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory // J. Math. Mech. 1958. Vol. 7. P. 237–264.
6. *Rowen L. H.* Standard polynomials in matrix algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 190. P. 253–284.
7. *Wenxin M., Racine M.* Minimal identities of symmetric matrices // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 320, № 1. P. 171–192.
8. *Vincenzo O. M.* On the graded identities of $M_{1,1}(E)$ // Israel J. Math. 1992. Vol. 80, № 3. P. 323–335.
9. *Mattina D.* On the graded identities and cocharacters of the algebra of 3x3 matrices // J. Linear Algebra App. 2004. Vol. 384. P. 55–75. DOI: https://doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5
10. *Аверьянов И. В.* Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm4298
11. *Vincenzo O. M.* Z_2-graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices // Serdica Math. J. 2004. Vol. 30. P. 111–134.
12. *Vincenzo O. M.* Z_2-graded cocharacters for superalgebras of triangular matrices // J. of Pure and Applied Algebra. 2004. Vol. 194, iss. 1–2. P. 193–211. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.04.004
13. *Amitsur S. A., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463.
14. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* К теореме Ченга. II // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 127–137. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137

Образец для цитирования:
Антонов С. Ю., Антонова А. В. О квазимногочленах Капелли. II // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 4–16. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16

Quasi-Polynomials of Capelli. II

S. Yu. Antonov, A. V. Antonova

Stepan Yu. Antonov, https://orcid.org/0000-0003-1705-3929, Kazan State Power Engineering University, 51 Krasnosel'skaya St., Kazan 420066, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

Alina V. Antonova, https://orcid.org/0000-0001-7047-7275, Kazan State Power Engineering University, 51 Krasnosel'skaya St., Kazan 420066, Russia, antonovakazan@rambler.ru

This paper observes the continuation of the study of a certain kind of polynomials of type Capelli (Capelli quasi-polynomials) belonging to the free associative algebra $F\{X \bigcup Y\}$ considered over an arbitrary field F and generated by two disjoint countable sets X and Y. It is proved that if $char\, F = 0$ then among the Capelli quasi-polynomials of degree $4k-1$ there are those that are neither consequences of the standard polynomial S^-_{2k} nor identities of the matrix algebra $M_k(F)$. It is shown that if $char\, F = 0$ then only two of the six Capelli quasi-polynomials of degree $4k-1$ are identities of the odd component of the Z_2-graded matrix algebra $M_{k+k}(F)$. It is also proved that all Capelli quasi-polynomials of degree $4k+1$ are identities of certain subspaces of the odd component of the Z_2-graded matrix algebra $M_{m+k}(F)$ for $m > k$. The conditions under which Capelli quasi-polynomials of degree $4k+1$ being identities of the subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ are given.

Keywords: T-ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

Received: 04.02.2019 / Accepted: 03.03.2019 / Published: 02.03.2020

Continuation. The previous part was published in: Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 371–382. The following part is to be published.

References

1. Antonov S. Yu. Some types of identities of subspaces $M_0^{(m,k)}(F), M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, book 1, pp. 189–201 (in Russian).
2. Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 371–382 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382
3. Birmajer D. Polynomial detection of matrix subalgebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2004, vol. 133, no. 4, pp. 1007–1012.
4. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
5. Kostant B. A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur–Levitzki, and cohomology theory. *J. Math. Mech.*, 1958, vol. 7, pp. 237–264.
6. Rowen L. H. Standard polynomials in matrix algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 190, pp. 253–284.
7. Wenxin M., Racine M. Minimal identities of symmetric matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 320, no. 1, pp. 171–192.
8. Vincenzo O. M. On the graded identities of $M_{1,1}(E)$. *Israel J. Math.*, 1992, vol. 80, no. 3, pp. 323–335.
9. Mattina D. On the graded identities and cocharacters of the algebra of 3x3 matrices. *J. Linear Algebra App.*, 2004, vol. 384, pp. 55–75. DOI: https//doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5
10. Aver'yanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra $M_{1,2}(F)$. *Math. Notes*, 2009, vol. 85, pp. 467–483. DOI: 10.1134/S0001434609030195
11. Vincenzo O. M. Z_2-graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices. *Serdica Math. J.*, 2004, vol. 30, pp. 111–134.
12. Vincenzo O. M. Z_2-graded cocharacters for superalgebras of triangular matrices. *J. of Pure and Applied Algebra*, 2004, vol. 194, iss. 1–2, pp. 193–211. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.04.004
13. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.
14. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang Theorem. II. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 127–137 (in Russian). DOI: https//doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137

Cite this article as:
Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-Polynomials of Capelli. II. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 4–16 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16