УДК 517.5

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ

**А.Л. Лукашов**

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: lukashoval@info.sgu.ru

Рассматриваются интерполяционные процессы Лагранжа, в которых роль многочленов, обращающихся в нуль в узлах интерполирования, играют рациональные функции с фиксированными знаменателями. Получена оценка констант Лебега таких процессов в случае, когда рациональные функции наименее уклоняются от нуля на данной системе отрезков с наибольшим возможным числом точек уклонения, причем матрица, составленная из фиксированных полюсов, расположена в компактном множестве вне этой системы отрезков. Частными случаями являются результаты В.Н. Русака и Г. Мина (для одного отрезка).

**Rational interpolation processes on several intervals**

**A.L. Lukashov**

It is considered the Lagrange interpolation processes such that rational functions with fixed denominators play the role of polynomials vanishing at interpolation nodes. An estimate for Lebesgue constants is obtained for the case of rational functions deviated least from zero on a given system of intervals with maximally possible number of deviation points, and when the matrix of fixed poles is contained in a compact set outside of the system of intervals. V.N. Rusak and G. Min found earlier particular case (for the case of one interval).

Интерполирование Лагранжа по нулям многочленов Чебышева изучалось многими учеными, оценки констант Лебега, т.е. норм соответствующих интерполяционных многочленов, рассматриваемых как операторы в пространстве непрерывных функций на отрезке, были получены в работах таких математиков, как С.Н. Бернштейн, В.К. Дзядык, А.Х. Турецкий [1, 2] (более подробно об этом см. [3–6]).

Одной из причин, обусловливающих интерес к интерполированию именно по нулям многочленов Чебышева является то, что соответствующие константы Лебега имеют оптимальный рост, т.е. так же как и для наименее возможных среди всех систем (матриц) узлов интерполирования, они имеют порядок роста $0(\log n)$. При этом оптимальные, т.е. имеющие наименьшие возможные константы Лебега, матрицы до сих пор не найдены (см. [7–10], где приводятся результаты численных расчетов по приближенному определению таких матриц и даны дальнейшие ссылки), причем даже критерии, которым они удовлетворяют (так называемые гипотезы Берн штейна и Эрдеша), были доказаны лишь в 1978 году Т. Килгором, К. де Бором и А. Пинкусом [11, 12].

Естественным аналогом для интерполирования рациональными функциями с фиксированными полюсами [13] для случая одного отрезка служат интерполяционные процессы по нулям дробей Чебышева–Маркова, введенные В.Н. Русаком [14] и изученные в работах Е.А. Ровбы, А.П. Старовойтова и (без упоминания предыдущих авторов) Г. Мином [15–18]. Впрочем, такие процессы можно интерпретировать и как полиномиальное интерполирование с весом, которому посвящено большое количество недавних работ [19–22] и др. При интерполировании аналитических функций естественно также использовать многоточечные аппроксимации Паде (или интерполянты Паде–Ньютона) [23–30]. Заметим, что при интерполировании рациональными функциями со свободными полюсами возникает ряд дополнительных трудностей уже на стадии вопросов существования, единственности и представления таких интерполянт, для разрешения которых применяются различные способы [31–38].

Заметим также, что обобщение результатов по оценкам констант Лебега по узлам Чебышева с одного отрезка на случай нескольких отрезков представляется более естественным именно для рациональных функций с фиксированным знаменателем, ибо за счет условий, накладываемых на знаменатели, можно гарантировать, что все нули соответствующих функций Чебышева–Маркова, наименее уклоняющихся от нуля, будут находиться именно на системе отрезков, что невозможно обеспечить сразу для всех номеров в полиномиальном случае. Кроме того, поскольку существует тесная связь между многочленами Золотарева и многочленами Чебышева на двух отрезках, интерполирование в экстремумах многочленов Золотарева, исследованное в [39], является частным случаем интерполирования по узлам многочленов Чебышева первого и второго рода на нескольких отрезках. Доказываемая далее в теореме оценка даже для случая одного отрезка сильнее сформулированных в [14, 18] и из нее легко следует теорема 3 из [40].

Рассмотрим интерполяционные процессы вида

$$L_n(f,\mathfrak{R},\wp,x)=\sum_{j=1}^{n} f(x_{j,n})\frac{M_n(\wp,x)}{(x-x_{j,n})M_n'(\wp,x_{j,n})}, \tag{1}$$

где $M_n(\wp, x)$ — рациональная функция вида

$$\frac{x^n+c_1x^{n-1}+\ldots+c_n}{\prod_{j=1}^{n}(1-\alpha_{j,n}x)}$$

и $\wp=\{\alpha_{j,n}\}_{j=1,n=l}^{n,\infty}$ — матрица обратных величин полюсов, а $\mathfrak{R}=\{x_{j,n}\}_{j=1,n=l}^{n,\infty}$ — матрица узлов интерполирования, состоящая из нулей рациональной функции $M_n(\wp, x)$.

Рассматривая эти процессы на нескольких отрезках, естественно требовать, чтобы матрица узлов интерполирования содержалась в этих отрезках. Этому требованию рациональные функции, наименее уклоняющиеся от нуля на нескольких отрезках, будут удовлетворять в случае, когда матрица $\mathfrak{R}$ регулярна относительно системы отрезков.

Другими словами, будут рассматриваться системы отрезков

$$E=[b_1,b_2]\cup[b_3,b_4]\cup\ldots\cup[b_{2l-1},b_{2l}],\quad b_1<\ldots<b_{2l}$$

и матрицы обратных величин полюсов $\wp=\{\alpha_{j,n}\}_{j=1,n=1}^{n,\infty}$ такие, что при каждом $n\in N, n\geq l$ для многочлена

$$p_n(x)=\prod_{j=1}^{n}(1-\alpha_{j,n}x)$$

выполняются условия теоремы из [41].

**Лемма 1.** При выполнении условий теоремы из [41] рациональная функция $M_n(x)$ может быть представлена в виде

$$M_n(x)=\cos\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{x}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\gamma_{n,\lambda}(x)}{\sqrt{H(x)}}dx,$$

где при

$$\frac{1}{\alpha_{\lambda,n}}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

$$\gamma_{n,\lambda}(x)=\frac{1}{2i}\frac{C_{\lambda,n}(x)\sqrt{H\left(\dfrac{1}{\alpha_{\lambda,n}}\right)\alpha_{\lambda,n}^{2l}}\,(\alpha_{\lambda,n}-\bar{\alpha}_{\lambda,n})}{\alpha_{\lambda,n}^{l}C_{\lambda,n}(1/\alpha_{\lambda,n})(1-\alpha_{\lambda,n}x)(1-\bar{\alpha}_{\lambda,n}x)}, \tag{2}$$

$C_{\lambda,n}(x)=\prod_{k=1}^{l}(x-c_k)$, а при

$$\frac{1}{\alpha_{\lambda,n}}\in(b_{2j},b_{2j+1})$$

$$\gamma_{n,\lambda}(x)=\frac{C_{\lambda,n}(x)\sqrt{H(\frac{1}{a_{\lambda,n}})a_{\lambda,n}^{2l}}}{a_{\lambda,n}^{l-1}C_{\lambda,n}(1/a_{\lambda,n})(1-a_{\lambda,n}x)}, \tag{3}$$

$C_{\lambda,n}(x)=\prod_{k=1,k\neq j}^{l}(x-c_k)$ и $c_k=c_{k,\lambda,n}\in(b_{2k},b_{2k+1})$ однозначно определяется условиями

$$\int_{b_{2k}}^{b_{2k+1}}\frac{\gamma_{n,\lambda}(x)}{\sqrt{H(x)}}dx=0,\ \ k=1,...,l,$$

причем для $\dfrac{1}{\alpha_{\lambda,n}}\in(b_{2j},b_{j+1})$ рассматриваются лишь $k\neq j$. При этом в случае $1/\alpha_{\lambda,n}\notin R\setminus[-1,1]$ возможен вариант $c_l=\infty$, в котором множитель вида

$$\frac{x-c_l}{1-\alpha_{\lambda,n}c_l}$$

заменяется на $1/\alpha_{\lambda,n}$; кроме того, считаем, что $(b_{2l},b_{2l+1})=(-\infty,+\infty)\setminus[-1,1]$.

В соответствии с теоремой 2 [42] достаточно доказать равенство

$$\omega_\alpha(\frac{1}{\alpha_{\lambda,n}},x)=\frac{\gamma_{n,\lambda}(x)}{\sqrt{|H(x)|}}, \tag{4}$$

где $\varpi_\alpha(\xi, x)$ – плотность гармонической меры $\omega_D(\xi,E_x),E_x=E\cap[-1,x]$ для области $D=\mathbb{C}\setminus E$. Используя принцип подчинения [43, теорема 4.3.8], получаем

$$\omega_D(\xi,E_x)=\omega_{\tilde D}(\infty,\tilde E_x),$$

где $\tilde D=f(D),\tilde E_x=f(E_x)$ и $f$ – любой гомеоморфизм области $D\cup E$ на $\tilde D\cup\tilde E_x$, мероморфный в $D$. Пусть сначала $\xi\in R\setminus[-1, 1]$. Возьмем в качестве $f$ дробно-линейное отображение, переводящее [-1,1] в себя и $\xi$ – в $\infty$, т.е.

$$f(z)=\frac{\xi z-1}{\xi-z}. \tag{5}$$

Тогда $\tilde D=\mathbb{C}\setminus\tilde E$, где $\tilde E=[\tilde b_1,\tilde b_2]\cup...\cup[\tilde b_{2l-1},\tilde b_{2l}],\tilde b_1=-1,\tilde b_{2l}=1,\tilde b_k=\dfrac{\xi b_k-1}{\xi-b_k}$. Гармоническая мера $\omega_{\tilde D}(\infty,\tilde E_x)$ совпадает с равновесной мерой $\mu_{\tilde E}(E_x)$ [43, теорема 4.3.1], поэтому ее представление известно [44, лемма 4.4.1]:

$$\omega_D(\infty,\tilde E_x)=\frac{1}{\pi}\int_{\tilde E_x}\frac{|\tilde p_{l-1}(x)|}{\sqrt{|\tilde H|(x)}}dx,$$

где $\tilde p_{l-1}(x)=(x-\tilde c_1)...(x-\tilde c_{l-1})$ и числа $\tilde c_i,\tilde b_{2i}<\tilde c_i<\tilde b_{2i+1},i=1,...,l-1$ однозначно определяются равенствами

$$\int_{\tilde b_{2i}}^{\tilde b_{2i+1}}\frac{\tilde p_{l-1}(x)}{\sqrt{\tilde H(x)}}dx=0,\ \ i=1,...,l-1.$$

Учитывая выбор ветви квадратного корня,

$$\arg\sqrt{R}(e^{i\varphi})=\arg(-1)^j e^{il\varphi/2},\qquad \varphi\in(\varphi_{2j},\varphi_{2j+1}),\ \ j=1,...,l-1, \tag{6}$$

имеем:

$$\omega_{\tilde{D}}(\infty, \tilde{E}_x) = \frac{i}{\pi} \int_{E_x} \frac{\tilde{p}_{l-1}(x)}{\tilde{H}(x)} dx,$$

откуда, применяя обратное к (5) отображение, получим (для $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$)

$$\omega_D(\xi, E_x) = \frac{i}{\pi} \int_{E_x} \frac{p_{l-1}(x)\sqrt{H(\xi)}}{(x-\xi)\sqrt{H(x)}p_{l-1}(\xi)} dx, \tag{7}$$

где $p_{l-1}(x) = (x - c_1)...(x - c_{l-1})$ и числа $c_i, b_{2i} < c_i < b_{2i+1}$ однозначно определяются равенствами

$$\int_{b_{2i}}^{b_{2i+1}} \frac{p_{l-1}(x)\sqrt{H(\xi)}}{(x-\xi)\sqrt{H(x)}p_{l-1}(\xi)} dx = 0, \ i = 1, ..., \ l-1. \tag{8}$$

Для $\xi \in [-1, 1] \setminus E$ имеем то же самое представление (7), но для $\xi \in (b_{2j}, b_{2j+1})$ вместо (8) для $i = j$ нужно взять равенство

$$\left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty}\right) \frac{p_{l-1}(x)\sqrt{H(\xi)}}{(x-\xi)\sqrt{H(x)}p_{l-1}(\xi)} dx.$$

При этом может оказаться, что $f^{-1}(\tilde{c}_j) = \infty$, в таком случае $c_j = \infty$ и в $\dfrac{p_{l-1}(x)}{p_{l-1}(\xi)}$ множитель $\dfrac{x - c_j}{\xi - c_j}$ опускается.

Пусть теперь $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. В таком случае применим дробно-линейное отображение:

$$\omega = f(z) = \frac{(z-\bar{\xi})(\xi+1)}{(z-\xi)(\bar{\xi}+1)}, \tag{9}$$

которое переводит [-1,1] в дугу единичной окружности. Обозначим через

$$\Gamma_{\tilde{E}} = \{e^{i\varphi} : \varphi \in \bigcup_{j=1}^{l} [\tilde{\varphi}_{2j-1}, \tilde{\varphi}_{2j}]\}$$

образ $E$ при этом отображении, через $\tilde{H}_\xi(\omega) = p\prod_{j=1}^{2l}(\omega - e^{i\tilde{\varphi}_j})$, $|p| = 1$ – самовзаимный многочлен, соответствующий системе дуг $\Gamma_{\tilde{E}}$. Тогда представление равновесной меры $\mu_{\Gamma_{\tilde{E}}}(\tilde{E}_x)$ может быть получено, например из [45, 23]:

$$\mu_{\Gamma_{\tilde{E}}}(\tilde{E}_x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{E}_x} \frac{\tilde{S}_{l,\xi}(\omega)}{\sqrt{\tilde{H}_\xi(\xi)}} \frac{d\omega}{\omega}, \tag{10}$$

где $\tilde{S}_{l,\xi}(\omega)$ – самовзаимный многочлен степени $l$, нормированный условием

$$i\tilde{S}_{l,\xi}(0) = \sqrt{\tilde{H}_\xi(0)} \tag{11}$$

и определяемый равенствами

$$\int_{f(\tilde{b}_{2j})}^{f(\tilde{b}_{2j+1})} \frac{\tilde{S}_{l,\xi}(\omega)}{\sqrt{\tilde{H}_\xi(\omega)}} \frac{d\omega}{\omega} = 0, \quad j = 1, ..., l-1. \tag{12}$$

Поскольку дуги окружности единичной окружности, не входящие в $\Gamma_{\tilde{E}}$, равноправны, то должно выполняться и равенство

$$\int_{f(\tilde b_{2j})}^{f(\tilde b_{2j+1})} \frac{\tilde S_{l,\xi}(\omega)}{\sqrt{\tilde H_\xi(\omega)}}\frac{d\omega}{\omega}=0, \tag{13}$$

Возвращаясь к переменной $z$, получим

$$\omega_D(\xi,E_x)=C\int_{E_x}\frac{S_{l,\xi}(z)dz}{\sqrt{H_\xi(z)(z-\xi)(z-\bar\xi)}}, \tag{14}$$

где $S_{l,\xi}(z)$ – многочлен степени $l$ с единичным старшим коэффициентом, однозначно определяемый вытекающими из (12), (13) равенствами

$$\int_{b_{2k}}^{b_{2k+1}}\frac{S_{l,\xi}(z)dz}{\sqrt{H_\xi(z)(z-\xi)(z-\bar\xi)}}=0,\quad k=1,\dots,l \tag{15}$$

и $C$ – некоторая константа, подлежащая определению.

Так как после замены $\omega=e^{i\varphi}$ в равенствах (12), (13) получаем

$$\int_{\tilde\varphi_{2j}}^{\tilde\varphi_{2j+1}}\frac{\tilde S_{l,\xi}(e^{i\varphi})}{\sqrt{\tilde H_\xi(e^{i\varphi})}}d\varphi=0,\quad j=1,\dots,l,$$

то действительный тригонометрический полином $\tilde S_{l,\xi}(e^{i\varphi})$ имеет $l$ нулей на периоде, по одному в каждом из интервалов $(\tilde\varphi_{2j},\tilde\varphi_{2j+1})$, а тогда $S_{l,\xi}(z)=\prod_{j-1}^{l}(z-c_{j,\xi})$, где $c_{j,\xi}\in(b_{2j},b_{2j+1}), j=1,\dots,l$. Представим полиномы, входящие в выражение (10):

$$\tilde S_{l,\xi}(\omega)=\sigma\prod_{j=1}^{l}(\omega-\tilde c_{j,\xi}),\qquad \tilde H_{\xi(\omega)}=\rho j\prod_{j=1}^{2l}(\omega-e^{i\tilde\varphi_j}).$$

Условия нормировки (11) тогда перепишутся так: $i\tilde S_{l,\xi}(0)=\sqrt{\tilde H_\xi(0)},$ или $i\left.\frac{\overline{\tilde S_{l,\xi}(\omega)}}{\omega^l}\right|_{\omega=\infty}=\sqrt{\left.\frac{\overline{\tilde H_\xi(\omega)}}{\omega^{2l}}\right|_{\omega=\infty}}$,

откуда

$$-i\sigma=\sqrt{p}. \tag{16}$$

Обозначим через $c_{j,\xi}$ прообраз $\tilde c_{j,\xi}$ при отображении (9), т.е.

$$c_{j,\xi}=\frac{(c_{j,\xi}-\bar\xi)(\xi+1)}{(c_{j,\xi}-\xi)(\bar\xi+1)}.$$

Тогда

$$\omega-\tilde c_{j,\xi}=\frac{(z-\bar\xi)(\xi+1)}{(z-\xi)(\bar\xi+1)}-\frac{(c_{j,\xi}-\bar\xi)(\xi+1)}{(c_{j,\xi}-\xi)(\bar\xi+1)}=\frac{(\xi+1)(\bar\xi-\xi)(z-c_{j,\xi})}{(\bar\xi+1)(z-\xi)(c_{j,\xi}-\xi)}. \tag{17}$$

Аналогично преобразовываются сомножители, входящие в $\tilde H_\xi(\omega)$, при этом следует учесть, что прообразом $e^{i\tilde\varphi j}$ является $b_j$, $j=1,\dots,2l$.

Окончательно получим

$$\tilde S_{l,\xi}(\omega)=\sigma\frac{(\xi+1)^l(\bar\xi-\xi)^l}{(\bar\xi+1)^l(z-\xi)^l}\prod_{j=1}^{l}\frac{z-c_{j,\xi}}{c_{j,\xi}-\xi}, \tag{18}$$

$$\tilde{H}_{\xi}(\omega)=p\frac{(\xi+1)^{2l}(\bar{\xi}-\xi)^{2l}}{(\bar{\xi}+1)^{2l}(z-\xi)^{2l}}\prod_{j=1}^{2l}\frac{z-b_j}{b_j-\xi}, \tag{19}$$

$$\frac{d\omega}{\omega}=\frac{\bar{\xi}-\xi}{(z-\xi)(z-\bar{\xi})}dz. \tag{20}$$

Подставляя (18)–(20) в (10), найдем:

$$\mu_E(E_x)=\frac{1}{2\pi}\int_{E_x}\frac{\sigma\prod_{j=1}^{l}\frac{z-c_{j,\xi}}{c_{j,\xi}-\xi}}{\sqrt{p\prod_{j=1}^{2l}\frac{z-b_j}{b_j-\xi}}}\frac{\bar{\xi}-\xi}{(z-\xi)(z-\bar{\xi})}dz,$$

или, обозначив $C_{\xi}(z)=\prod_{j=1}^{l}(z-c_{j,\xi})$,

$$\mu_E(E_x)=\frac{i}{2\pi}\int_{E_x}\sqrt{\frac{C_{\xi}^2(z)H(\xi)}{C_{\xi}^2(\xi)H(z)}}\frac{\bar{\xi}-\xi}{(z-\xi)(z-\bar{\xi})}dz. \tag{21}$$

Взяв $\xi = 1/\alpha_{\lambda,n}$ имеем (2), что и требовалось доказать.

**Замечание 1**. Равенство (3) (с учетом (4)) доказано также в [46].

**Лемма 2.** Если $1/\alpha_{\lambda,n} \in K$ при всех достаточно больших $n$, $\lambda = 1, \ldots, n$, то найдутся константы $C_1$, $C_2$, зависящие от $K$ и $E$, такие, что

$$0<C_1\le\left|\ \gamma_{\lambda,n}(x)\right|\le C_2.$$

**Доказательство.**

Начнем с равенства

$$\frac{\left|1-\alpha_{\lambda,n}x\right|}{\left|\alpha_{\lambda,n}\right|}=\frac{\left|1-\bar{\alpha}_{\lambda,n}x\right|}{\left|\alpha_{\lambda,n}\right|}.$$

Легко видеть, что это выражение, равное

$$\left|\frac{1}{\alpha_{\lambda,n}}-x\right|,$$

равномерно ограничено и отграничено от нуля при $x\in E, \dfrac{1}{\alpha_{\lambda,n}}\in K.$

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\omega_D(\xi,E_x)=\omega_D(\xi_0,E_x) \tag{22}$$

при $\xi_0\in K\cap R,\ \ \xi\in K.$ Подставляя (21), (7) в (22), получим

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\frac{i}{2\pi}\int_{E_x}\frac{C_{\xi}(z)\sqrt{H(\xi)}}{C_{\xi}(\xi)\sqrt{H(z)}}\frac{\bar{\xi}-\xi}{(z-\xi)(z-\bar{\xi})}dz=\frac{i}{\pi}\int_{E_x}\frac{p_{l-1,\xi_0}(x)\sqrt{H(\xi_0)}}{(x-\xi_0)\sqrt{H(x)}\,p_{l-1,\xi_0}(\xi_0)}dx, \tag{23}$$

дополнительный индекс $\xi_0$, у $p_{l-1}(x)$ показывает его зависимость от $\xi_0$.

Вместо $E_x$ в (23) можно взять сколь угодно малый интервал, содержащий точку $x \in \operatorname{int} E$, откуда, учитывая непрерывность подынтегральных функций,

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\frac{1}{2}\frac{C_\xi(x)\sqrt{H(\xi)}}{C_\xi(\xi)}\frac{\overline{\xi}-\xi}{(x-\xi)(x-\overline{\xi})}=i\frac{p_{l-1,\xi_0}(x)\sqrt{H(\xi)}}{(x-\xi_0)p_{l-1,\xi_0}\xi_0)}.$$

Учитывая непрерывность $H$ и то, что $H(\xi_0)\neq 0$, получаем

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\frac{(\overline{\xi}-\xi)C_\xi(x)}{2(x-\overline{\xi})C_\xi(\xi)}=\frac{p_{l-1,\xi_0}(x)}{p_{l-1,\xi_0}(\xi_0)}. \tag{24}$$

Из предыдущей леммы известно, что $p_{l-1,\,\xi_0}$ имеет по одному нулю в каждом интервале $(b_{2j}, b_{2j+1})$, не содержащем $\xi_0$, т.е. при $k\neq j$, где $\xi_0 \in (b_{2k}, b_{2k+1})$, а $C_\xi(x)$ имеет по одному нулю в каждом интервале $(b_{2j}, b_{2j+1})$. Так как равенство (24) имеет место при $x \in \operatorname{int} E$, то каждый нуль полинома $p_{l-1,\,\xi_0}$ является пределом соответствующего нуля полинома $C_\xi$, т.е. если

$$p_{l-1,\xi_0}(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l}(x-c_{j,\,\xi_0}),$$

то

$$\lim_{\xi\to\xi_0}c_{j,\xi}=c_{j,\xi_0},\quad j=1,\dots,l,\, j\neq k.$$

Тогда для $j = k$ получим

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\frac{(\overline{\xi}-\xi)(x-c_{k,\xi})}{2(x-\overline{\xi})(\xi-c_{k,\xi})}=1. \tag{25}$$

Равенство (25) означает, что $\lim\limits_{\xi\to\xi_0}c_{k,\xi}=\xi_0$, причем так, что

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\frac{\Im\xi}{-(\xi-c_{k,\xi})}=1.$$

Теперь $H(\xi)=\prod_{j=1}^{2j}(\xi-b_j)$ и $C_\xi(x)=\prod_{j=1}^{l}(x-c_{j,\xi})$ для $\xi\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$C_\xi(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l}(x-c_{j,\xi_0}),$$

для $\xi \in (b_{2k}, b_{2k+1})$, где $c_{j,\xi} \in (b_{2j}, b_{2j+1})$, $j = 1, \dots, l$. Поэтому для $z \in E$ функция

$$f_z(\xi):=\frac{C_\xi(z)\sqrt{H(z)}}{C_\xi(\xi)}\frac{\overline{\xi}-\xi}{(z-\xi)(z-\overline{\xi})}$$

аналитическая, как функция от $\xi$, в $K$. При $\xi\to\infty$ имеем $\lim_{\xi\to\infty}f_z(\xi)=p_{l-1,\infty}(z)$, и так как $p_{l-1,\,\infty}$ непрерывна на $E$ и не обращается в нуль на $E$, то

$$C_{1,\infty}\leq|p_{l-1,\infty}(z)|\leq C_{2,\infty}$$

на $E$. Таким образом,

$$\inf_{\xi\in\partial K}|f_z(\xi)|\leq|f_z(\xi)|\leq\sup_{\xi\in\partial K}|f_z(\xi)|,$$

причем можно считать, что $\partial K$ – ограниченное множество. Оценим $|f_z(\xi)|$ на $\partial K$ сверху. При любом $\xi \in \partial K$ и $x \in E$ выполняются оценки $|x-\xi| = |x-\bar{\xi}| \le C_2$,

$$|x-\xi| \ge C_1, \tag{26}$$

откуда

$$\sqrt{|H(\xi)|} \le \sup_{\substack{z,\xi \in E \\ \xi \in \partial K}} |z-\xi| \le C_2' \tag{27}$$

и

$$\sqrt{|H(\xi)|} \ge \inf_{\substack{z,\xi \in E \\ \xi \in \partial K}} |z-\xi| \ge C_1'. \tag{28}$$

Далее, имеем

$$|z-c_{i,\xi}| \le 2, \quad i=1,\dots,l-1 \tag{29}$$

и

$$|z-c_{i,\xi}| \ge \rho(E, C^{(i)}), \quad i=1,\dots,l, \tag{30}$$

где $C^{(i)}$ – множество, состоящее из всевозможных значений $c_{i,\xi}$ $\xi \in K$. При этом для $\xi \in (b_{2k}, b_{2k+1})$ считаем (см.(25)), что $c_{i,\xi} = \xi$. Величина $c_{i,\xi}$ как функция от $\xi$ непрерывна, поэтому множество $C^{(i)}$ – замкнутое, и, значит, $\rho(E, C^{(i)}) > 0$. Далее, для

$$\xi \in \partial K \setminus U, \quad U = \bigcup_{j=1}^{l} U_j,$$

где $U_j$ – $\delta$-окрестность $[b_{2j}, b_{2j+1}]$, имеем

$$|\xi-\bar{\xi}| \ge 2\delta, |\xi-\bar{\xi}| \le \operatorname{diam} \partial K, \tag{31}$$

$$|\xi-c_{i,\xi}| \ge \delta, |\xi-c_{i,\xi}| \le \sup_{\substack{z,\xi \in conv\, E \\ \xi \in \partial K}} |z-\xi| = C_3, \quad i=1,\dots,l-1. \tag{32}$$

Оценим теперь

$$\left|\frac{z-c_{l,\xi}}{\xi-c_{l,\xi}}\right|$$

для $\xi \in \partial K \setminus U_l$. Функция $|(z-c) \setminus (\xi-c)|$ непрерывна на $E \times \partial K \setminus U_l \times C^{(i)}$ как функция от $(z, \xi, c)$, причем

$$\lim_{c \to \infty} \left|\frac{z-c}{\xi-c}\right| = 1,$$

поэтому она ограничена на $E \times \partial K \setminus U_l \times C^{(i)}$, кроме того, она не обращается в нуль на $E \times \partial K \setminus U_l \times C^{(i)}$, поэтому она отграничена от нуля, т.е.

$$C_4 \le \left|\frac{z-c_{l,\xi}}{\xi-c_{l,\xi}}\right| \le C_5. \tag{33}$$

Функция

$$\left|\frac{(\overline{\xi}-\xi)(x-c_{j,\xi})}{(x-\overline{\xi})(\xi-c_{j,\xi})}\right|$$

непрерывна на $\partial K\cup\overline{U}_j\times E$ как функция от $(\xi,\ x)$, в силу (25) и не обращается там в нуль, $j=1,\ \ldots,\ l-1$, поэтому для некоторых постоянных $C_6$, $C_7>0$, зависящих лишь от $K$, $E$, имеем

$$C_6\le\left|\frac{(\overline{\xi}-\xi)(x-c_{j,\xi})}{(x-\overline{\xi})(\xi-c_{j,\xi})}\right|\le C_7. \tag{34}$$

То же самое рассуждение справедливо и при $j=1$ с учетом того, что из (25) следует, что можно выбрать $\delta$ настолько малым, что из $\Im\xi<\delta,\xi\in U_l\cap\partial K$ следовало бы неравенство (25). Объединяя (26)–(34), получаем утверждение леммы.

Введем дополнительные обозначения, которые будут использованы далее в этой работе: через $M_n(x)$ будем обозначать рациональную функцию Чебышева–Маркова, наименее уклоняющуюся от нуля на $E$ с максимальным числом точек уклонения и со знаменателем $\prod_{j=1}^{n}=(1-\alpha_{j,n}x);\gamma_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_{j\,n}(x)$, где $\gamma_{j,n}\ (x)$ из леммы 1, $S_n(x)=\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{x}\frac{\gamma_n(x)}{\sqrt{H(x)}}dx,\ H(x)=\prod_{j=1}^{2j}(x-b_j),\ b_1=-1,\ b_{2l}=1.$

**Теорема 1**. Пусть $\{\alpha_{\lambda,n}\}$ – регулярная относительно $E$ матрица обратных величин полюсов, $\{1/\alpha_{\lambda,n}\}\subset K$, где $K$ – некоторое компактное в сферической метрике подмножество $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$.

Тогда

$$\|L_n\|_{C(E)}\le C\ln n, \tag{35}$$

где $C=C(E,\ K)$ зависит лишь от $E$ и $K$.

**Доказательство.**

Занумеруем нули рациональной функции $M_n(x)$ следующим образом:

$$-1<x_{n,n}<\ldots<x_{m_1+1,n}<b_1<b_2<x_{m_1,n}<\ldots<b_{2l-1}<x_{m_{l-1},n}<\ldots<x_{1,n}<1.$$

Далее, выберем номера $p_i$, $i=1,\ \ldots,\ l$ из неравенств

$$x_{p_{i+1},n}\le\frac{b_{2i-1}+b_{2i}}{2}<x_{p_i,n}.$$

Доказательство проводится в зависимости от расположения точки $x$.

Пусть сначала

$$\frac{b_{2l-1}+1}{2}\le x\le 1,$$

т.е $x\in(x_{i,n},x_{i-1,n}]$ и $1\le i\le p_l+1$. Оценим фундаментальный полином

$$l_{k,n}(x)=\frac{M_n(x)}{(x-x_{k,n})M_n'(x_{k,n})}=\frac{M_n(x)\sqrt{-H(x_{k,n})}}{(x-x_{k,n})\gamma_n(x_{k,n})}$$

для $k=1,2,\ldots,i-2;3\le i\le p_l+1$. Так как

$$\left|\frac{\gamma_n(x_{k,n})}{\sqrt{-H(x_{k,n})}}-\frac{\gamma_n(x_{i-1,n})}{\sqrt{-H(x_{i-1,n})}}\right|=\pi(i-k-1),$$

то по теореме Лагранжа имеем

$$\left|l_{k,n}(x)\right| \le \frac{\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\left|x-x_{k,n}\right|\gamma_n(x_{k,n})} \le \frac{\gamma_n(\xi)\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\pi(i-k-1)\sqrt{-H(\xi)}\gamma_n(x_{k,n})},$$

где $x_{i-1,n} < \xi < x_{k,n}$. Отсюда с учетом леммы 2 получим

$$\left|l_{k,n}(x)\right| \le \frac{\sum_{\lambda=1}^{n}\gamma_{n,\lambda}(\xi)\sqrt{1-x_{k,n}}\,2^{(2l-1)/2}}{\pi(i-k-1)\sqrt{1-\xi}\left(\dfrac{1-b_{2l-1}}{2}\right)^{(2l-1)/2}\sum_{\lambda=1}^{n}\gamma_{n,\lambda}(x_{k,n})} \le \frac{C}{i-k-1}. \tag{36}$$

Далее, при $k = i - 1$; $i = 2, 3, \ldots < p_i + 1$,

$$\left|l_{i-1,n}(x)\right| = \frac{\left|M_n(x)-M_n(x_{i-1,n})\right|\sqrt{-H(x_{1-1,n})}}{(x_{i-1,n}-x)\gamma_n(x_{i-1,n})} = \frac{\gamma_n(\xi)\sqrt{-H(x_{i-1,n})}}{\pi\sqrt{-H(\xi)}\gamma_n(x_{i-1,n})},$$

где $x < \xi < x_{i-1,n}$, откуда с учетом леммы 2

$$\left|l_{i-1,n}(x)\right| \le \frac{nC_2\sqrt{1-x_{i-1,n}}\,2^{\frac{2l-1}{2}}}{\pi nC_1\sqrt{1-\xi}\left(\dfrac{b_{2l-1}+1}{2}\right)^{\frac{2l-1}{2}}} \le C. \tag{37}$$

При $k = i$ ; $i = 2, 3, \ldots, p_i + 1$ имеем

$$\left|l_{i,n}(x)\right| = \frac{\gamma_n(\xi_i)\sqrt{-H(x_{i,n})}}{\pi\sqrt{-H(\xi_i)}\;\gamma_n(x_{i,n})} \le CZ_{i,n}, \tag{38}$$

где $x_{i,n} < \xi_i < x$ и

$$Z_{i,n} = \frac{\sqrt{-H(x_{i,n})}}{\sqrt{-H(\xi_i)}}.$$

Аналогично поступим и для $i = 1, 2, \ldots, p_l$; $k = i + 1, \ldots, m_{l-1}$.

$$\left|l_{k,n}(x)\right| \le \frac{\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\left(x-x_{k,n}\right)\gamma_n(x_{k,n})} = \frac{\left|S_n(x_{k-1,n})-S_n(x_{k,n})\right|\sqrt{-H(x_{k,n})}}{(x-x_{k,n})\gamma_n(x_{k,n})} = \frac{(x_{k-1,n}-x_{k,n})}{\pi(x-x_{k,n})}\cdot\frac{\gamma_n(\xi)}{\lambda_n(x_{k,n})}\cdot\frac{\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\sqrt{-H(\xi_k)}} \le \frac{C_2}{\pi C_1}Z_k, \tag{39}$$

где

$$Z_k = \frac{\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\sqrt{-H(\xi_k)}}, \quad x_{k,n} < \xi_k < x_{k-1,n}.$$

Оценкой величин $Z_k$, $k = i, i+1, \ldots, m_{l-1}$ займемся позже, а сейчас перейдем к случаю $i = 1, 2, \ldots, p_l$; $k = m_{l-1} + 2, \ldots, p_{l-1}$. Здесь имеем так же, как и при получении (39),

$$\left|l_{k,n}(x)\right| \le \frac{(x_{k-1,n}-x_{k,n})}{\pi(x-x_{k,n})}\cdot\frac{\gamma_n(\xi_k)}{\gamma_n(x_{k,n})}\cdot\frac{\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\sqrt{-H(\xi_k)}} \le \frac{C_2}{\pi C_1}\cdot\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k,n}}\cdot\frac{\sqrt{b_{2l-2}-x_{k,n}}\,2^{\frac{2l-1}{2}}}{\sqrt{b_{2l-2}-\xi_k}\,(b_{2l-1}-b_{2l-2})(\frac{b_{2l-2}-b_{2l-2}}{2})^{\frac{2l-3}{2}}} \le$$

$$\leq C\cdot\sqrt{1+\frac{\xi_k - x_{k,n}}{b_{2l-2}-\xi_k}\,\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k,n}}}, \tag{40}$$

где $x_{k,n} < \xi_k < x_{k-1,n}$.

Так как
$$\frac{\xi_k - x_{k,n}}{b_{2l-2}-\xi_k} \leq \frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{b_{2l-2}-\xi_k} = \frac{\pi\sqrt{-H(\xi_k)}}{(b_{2l-2}-\xi_k)\gamma_n(\xi_k)} \leq \frac{\pi 2^{(2l-1)/2}}{C_1\sqrt{b_{2l-2}-\xi_k}\,\gamma_n(\xi_k)}, \tag{41}$$

то для оценки (40) нужно найти оценку для $\dfrac{1}{\sqrt{b_{2l-2}-\xi_k}}$.

Имеем
$$\frac{1}{\sqrt{b_{2l-2}-\xi_k}} \leq \frac{1}{\sqrt{b_{2l-2}-x_{m_{l-1}+1,n}}} \leq \frac{2^{(2l-1)/2}}{\sqrt{-H(x_{m_{l-1}+1,n})}}. \tag{42}$$

Поскольку $H'(b_{2l-2}) < 0$, то можно найти $\theta_{2l-2} > 0$ зависящее лишь от $E$, такое, что для всех $x, b_{2l-2}-\theta_{2l-2} \leq x \leq b_{2l-2}$, справедливо неравенство

$$-H'(x) \geq C,$$

причем $C > 0$ зависит лишь от $E$, а тогда для таких $n$, что $x_{m_{l-1}+1,n} \in [b_{2l-2}-\theta_{2l-2}, b_{2l-2})$ (в противном случае применяем тривиальную оценку

$$\frac{1}{\sqrt{b_{2l-2}-x_{m_{l-1}+1,n}}} \leq \frac{1}{\theta_{2l-2}})$$

имеем

$$\sqrt{-H(x_{m_{l-1}+1,n})} = \int_{x_{m_{l-1}+1,n}}^{b_{2l-2}} \frac{-H'(x)dx}{2\sqrt{-H(x)}} \geq C\int_{x_{m_{l-1}+1,n}}^{b_{2l-2}} \frac{dx}{\sqrt{-H(x)}}.$$

Обозначим через $F(x)$ гиперэллиптический интеграл

$$F(x) = \int_x^{b_{2l-2}} \frac{dx}{\sqrt{-H(x)}}.$$

Для $x_{m_{l-1}+1,n}$ в достаточно малой, не зависящей от $n$ окрестности точки $b_{2l-2}$ функция $F(x)$ осуществляет взаимно-однозначное отображение отрезка $[x_{m_{l-1}+1,n}, b_{2l-2}]$ на $[0, \eta_{2l-2}]$. Поскольку

$$S_n(F^{-1}(\eta_{2l-2})) - S_n(F^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}, \tag{43}$$

то, применяя к (43) теорему Лагранжа, найдем, что существует $\tilde{\eta}_{2l-2}, 0 < \tilde{\eta}_{2l-2} < \eta_{2l-2}$, такое, что

$$\eta_{2l-2} = \frac{\pi\sqrt{-H(F^{-1}(\tilde{\eta}_{2l-2})}}{2\gamma_n(F^{-1}(\tilde{\eta}_{2l-2}))(F^{-1})'(\tilde{\eta}_{2l-2})} = \frac{\pi}{2\gamma_n(F^{-1}(\tilde{\eta}_{2l-2})},$$

или что равносильно

$$F(x_{m_{l-1}+1,n}) = \frac{\pi}{2\gamma_n(\varsigma_{2l-2})},$$

где $\varsigma_{2l-2} = F^{-1}(\tilde{\eta}_{2l-1}), x_{m_{l-1}+1,n} < \varsigma_{2l-2} < b_{2l-2}$.

Таким образом,
$$\sqrt{-H(x_{m_{l-1}+1,n})} \geq \frac{C}{\gamma_n(\varsigma_{2l-2})}. \tag{44}$$

Подставляя (44) в (42) и в (41), получим из (40) с учетом леммы 2:

$$\left|l_{k,n}(x)\right| \le C\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k,n}} \tag{45}$$

для $i = 1, 2, \ldots, p_l$; $k = m_{l-1} + 2, \ldots, p_{l-1}$.

Для $k = m_{l-1} + 1$; $i = 1, 2, \ldots, p_l$ имеем

$$\left|l_{k,n}(x)\right| \le \frac{\sqrt{-H(x_{m_{l-1}+1,n})}}{\left|x-x_{m_{l-1}+1,n}\right|\gamma_n(x_{m_{l-1}+1,n})} \le \frac{2^l}{C_1(b_{2l-1}-b_{2l-2})}. \tag{46}$$

Оценим теперь $Z_k$, $k = i, i+1, \ldots, m_{l-1}$, $i = 2, 3, \ldots, p_l+1$:

$$Z_k = \frac{\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\sqrt{-H(\xi_k)}} \le \sqrt{\frac{1-x_{k,n}}{1-\xi_k}} = \sqrt{1+\frac{\xi_k-x_{k\,n}}{1-\xi_k}}. \tag{47}$$

Далее,

$$\frac{\xi_k-x_{k,n}}{1-\xi_k} \le \frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{1-\xi_k} \le \frac{\pi\sqrt{-H(\xi_k)}}{(1-\xi_k)\gamma_n(\xi_k)} \le \frac{\pi 2^{(2l-1).2}}{\sqrt{1-\xi_k}\gamma_n(\xi_k)}. \tag{48}$$

Теперь $\sqrt{1-\xi_k}$ оценим так же, как и при выводе (42):

$$\sqrt{1-\xi_k} \ge \sqrt{1-x_{1.n}} \ge \frac{\sqrt{-H(x_{1,n})}}{(1-b_{2l-1})^{(2l-1)/2}} \ge \int_{x_{1,n}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{-H(x)}}. \tag{49}$$

Повторяя рассуждения, использованные при получении (44), найдем, что

$$\sqrt{-H(x_{1,n})} \ge \frac{C}{\gamma_n(\varsigma_{2l})},$$

где $x_{1,n} < \zeta_{2l} < 1$. Подставляя эту оценку в (49) и (48), получим

$$\frac{\xi_k-x_{k,n}}{1-\xi_k} \le C\frac{\gamma_n(\varsigma_{2l})}{\gamma_n(\xi_k)},$$

а тогда из (47) с учетом леммы 2 имеем

$$Z_k \le C. \tag{50}$$

Аналогично разбираются случаи $k = p_{l-1}, \ldots, n$. Оценим теперь $l_{1,n}(x)$:

$$\left|l_{1,n}(x)\right| \le 1+\sum_{k=2}^{n}\left|l_{k\,n}(x)\right|. \tag{51}$$

Объединяя (36)–(39), (45), (46), (50) и (51), имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|l_{k,n}(x)\right| \le C\ln n + C\sum_{k=i+2}^{n}\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k,n}}. \tag{52}$$

Заметим теперь, что при $k = i+2, \ldots, n$

$$\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k.n}} = \int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}}\frac{d\theta}{x-x_{,k\,n}} \le \int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}}\frac{d\theta}{x-\theta},$$

$$\sum_{k=i+2}^{n} \frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k,n}} \le \int_{x_{n,n}}^{x_{i+1,n}} \frac{d\theta}{x-\theta} = \ln\frac{x-x_{n,n}}{x-x_{i+1,n}} \le \ln\frac{2}{x_{i,n}-x_{i+1,n}} = \ln\left(\frac{2\gamma_n(\xi_i)}{\pi\sqrt{-H(\xi_i)}}\right). \quad (53)$$

Если теперь $\xi_i > 1-\theta_{2l}$, где $\theta_{2l}$ определяется из условия $H'(x) \ge C_{2l} > 0$ для $1-\theta_{2l} \le x \le 1$, то применяем оценку

$$\sqrt{-H(\xi_i)} \ge \frac{C}{\gamma_n(\tilde{\varsigma}_{2l})}, \quad (54)$$

где $x_{i+1.n} < \tilde{\varsigma}_{2l} < 1$, если же $\xi_i > 1-\theta_{2l}$, то

$$\sqrt{-H(\xi_i)} \ge \sqrt{1-C_{2i}}\left(\frac{1-b_{2l-1}}{2}\right)^{(2l-1)/2}. \quad (55)$$

Окончательно, подставляя (54), (55) в (52),(53), получим требуемое. Остальные случаи расположения точки $x$ на множестве $E$ разбираются аналогичным образом. Теорема доказана.

Покажем теперь, что оценка (35) точна по порядку. Для этого оценим сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\left|l_{k,n}(1)\right|.$$

Получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left|l_{k,n}(1)\right| = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{-H(x_{k,n})}}{(1-x_{k,n})\gamma_n(x_{k,n})} \ge \sum_{k=1}^{\tilde{p}_l}\frac{\left|S_n(1)-S_n(x_{k,n})\right|\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\pi(k-1/2)(1-x_{k,n})\gamma_n(x_{k,n})} = \sum_{k=1}^{\tilde{p}_l}\frac{\gamma_n(\tilde{\xi}_k)\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\pi(k-1/2)(1-x_{k,n})\gamma_n(x_{k,n})\sqrt{-H(\tilde{\xi}_k)}}, \quad (56)$$

где $\tilde{\xi}_k \in (x_{k,n},1)$, а индексы $\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_l$ выбираются теперь из того требования, чтобы точки $x_{m_i+1,n},\dots,x_{\tilde{p}_i,n}$ принадлежали интервалам убывания, а точки $x_{m_{i-1},n},\dots,x_{\tilde{p}_i+1,n}$ интервалам возрастания функции $-H(x)$, $i = 1, \dots, l$ ($m_l = 1$, $m_0 = n$).

Учитывая выбор индекса $\tilde{p}_l$, имеем

$$\frac{\sqrt{-H(x_{k,n})}}{\sqrt{-H(\tilde{\xi}_k)}} \ge 1, \quad k=1,\dots,\tilde{p}_l,$$

а тогда из (56) получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\left|l_{k,n}(1)\right| \ge \ln\tilde{p}_l. \quad (57)$$

Аналогично устанавливаются оценки

$$\sum_{k=1}^{n}\left|l_{k,n}(b_{2j})\right| \ge C\ln\left|\tilde{p}_j-m_j\right|, \qquad j=1,\dots,l-1, \quad (58)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|l_{k,n}(b_{2j+1})\right| \ge C\ln\left|\tilde{p}_j-m_{j-1}+1\right|, \qquad j=0,1,\dots,l-1,. \quad (59)$$

Так как

$$\sum_{j=0}^{l-1}\left(\left|\tilde{p}_j-m_{j-1}+2\right|+\left|\tilde{p}_{j+1}-m_{j+1}\right|\right)=n,$$

то хотя бы одно из чисел $\left|\tilde{p}_j - m_{j-1} + 1\right|, \left|\tilde{p}_{j+1} - m_{j+1}\right|, j = -0,...,l-1$ будет больше $n/(2l)$, а тогда для соответствующего неравенства из (57) –(59) найдем

$$\max_{1\le j\le 2l} \sum_{k=1}^{n} \left|l_{k,n}(b_j)\right| \ge C \ln n.$$

Таким образом, точность оценки (35) установлена.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00060), программы «Университеты России» (проект УР. 04.01.040) и программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).*

**Библиографический список**

1. *Бернштейн С.Н.* Об ограничении значений многочлена $P_n(x)$ степени $n$ на всем отрезке по его значениям в $n$+1 точках отрезка // Собр. соч.: В 4 т. М., 1952. Т. 2. С.107–126.

2. *Дзядык В.К., Иванов В.В.* Об асимптотике и оценках равномерных норм интерполяционных многочленов Лагранжа по узлам Чебышева // Матем. сб. 1977. Т.104. С.337–351.

3. *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск, 1968. Ч. 1.

4. *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск, 1977. Ч.2.

5. *Привалов А.А.* Теория интерполирования функций. Саратов, 1990. Кн.1, 2.

6. *Szabados J., Vertesi P.* Interpolation of functions. Singapore, 1990.

7. *Boyd J.P.* A numerical comparison of seven grids for polynomial interpolation on the interval // Comp. Math. Appl. 1999. V.38. P.35–50.

8. *Chen Q., Babushka I.* Approximate optimal points for polynomial interpolation of real functions in an interval and in a triangle // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1995. V.128. P.405–417.

9. *Hesthaven J.S.* From electrostatics to almost optimal nodal sets for polynomial interpolation in a simplex // SIAM J. Numer. Anal. 1998. V.35. P.655–676.

10. *Mastroianni G., Occorsio D.* Optimal systems of nodes for Lagrange interpolation on bounded intervals: A survey // J. Comp. Appl. Math. 2001. V.134. P.325–341.

11. *Kilgore T.A.* A characterization of the Lagrange interpolating projection with minimal Tchebysheff norm // J. Approx. Theory. 1978. V.24. P.273–288.

12. *Boor C. de, Pinkus A.* Proof of the conjectures of Bernstein and Erdos concerning the optimal nodes for polynomial interpolation // J. Approx. Theory. 1978. V.24. P.289–303.

13. *Уолш Дж.Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., 1961.

14. *Русак В.Н.* О сходимости одного обобщенного интерполяционного полинома // Докл. АН БССР. 1962. Т. 6. С.209–211.

15. *Ровба Е.А.* О рациональной интерполяции функции $|x|$ // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-матем. науки. 1989. №5. С.39–46.

16. *Rovba E.A.* Orthogonal systems of rational functions on the segment and quadrature of Gauss-type // Math. Balk. 1999. V.13. P.187–198.

17. *Старовойтов А.П.* О рациональной интерполяции с фиксированными полюсами / Изв. АН БССР. Минск, 1983. Деп. ВИНИТИ 22.05.83. № 2735–83.

18. *Min G.* Lagrange interpolation and quadrature formula in rational systems // J. Approx. Theory. 1998. V.95. P.123–145.

19. *Damelin S.B.* The weighted Lebesgue constant of Lagrange interpolation for exponential weights on [-1,1] // Acta Math. Hung. 1998. V.81. P.223–240.

20. *Kubayi D.G.* Bounds for weighted Lebesgue functions for exponential weights // J. Comp. Appl. Math. 2001. V.133. P.429–443.

21. *Szabados J.* On some problems of weighted polynomial approximation and interpolation // New developments in approximation theory. N.Y., 1999. P. 315–328.

22. *Vertesi P.* On the Lebesgue function and Lebesgue constant: a tribute to Paul Erdos // Paul Erdos and its mathematics. Budapest, 2002. P.705–728.

23. *Bagby T.H.* On interpolation by rational functions // Duke Math. J. 1969. V.36. P.95–104.

24. *Bagby T.H.* Rational interpolation with restricted poles // J. Approx. Theory. 1973. V.7. P.1–7.

25. *Calle Y. B. de la, Lagomasino G. L.* Convergence of multipoint Pade-type approximants // J. Approx. Theory. 2001. V.109. P.257–278.

26. *Gardiner S.J., Pommerenke C.* Balayage properties related to rational interpolation // Constr. Approx. 2002. V.18. P.417–426.

27. *Гончар А.А., Лопес Г.Л.* О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций // Матем. сб. 1978. Т.105. С.512–524.

28. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М., 1986.

29. *Lagomasino (Lopez) G.* Survey on multipoint Pade approximation to Markov type meromorhic functions and asymptotic properties of the orthogonal polynomials generated by them // Lect. Notes Math. 1985. V.1171. P.309–316.

30. *Galluci M.A., Jones W.B.* Rational approximations corresponding to Newton series (Newton–Pade approximants) // J. Approx. Theory. 1976. V.17. P.366–392.

31. *Antoulas A.C., Anderson B.D.O.* A summary of recent results on the scalar rational interpolation problem // Proc. 25th IEEE Conf. Decis. Control. 1986. P.2187–2188.

32. *Baltensperger R.* Some results on linear rational trigonometric interpolation // Comput. Math. Appl. 2002. V.43. P.737–746.

33. *Berrut J.-P.* Rational functions for guaranteed and experimentally well-conditioned global interpolation // Comput. Math. Appl. 1988. V.15. P.1–16.

34. *Berrut J.-P., Mittelmann H.D.* Rational interpolation through the optimal attachement of poles to the interpolating polynomial // Numerical Algorithms. 2000. V.23. P.315–328.

35. *Fournier J.-D., Pindor M.* Rational interpolation from stochastic data: a new Froissarts phenomenon // Reliable Computing. 2000. V.6. P.391–409.

36. *Gutknecht M.H.* In what sense is the rational interpolation problem well posed? // Consr. Approx. 1990. V.6. P.437–450.

37. *Nananukul S., Gong W.-B.* Rational interpolation for stochastic DES's: convegence issues // IEEE Trans. Autom. Control. 1999. V.44. P.1070–1073.

38. *Ravi M.S.* Geometric methods in rational interpolation theory // Lin. Alg. Appl. 1997. V.258. P.159–168.

39. *Henry M.S., Swetits J.J.* Lebesgue and strong unicity constants for Zolotareff polynomials // Rocky Mount. J. Math. 1982. V.12. P.547–556.

40. *Лебедев В.И.* Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов // Матем. сб. 2004. Т. 195, №10. С. 21–66.

41. *Lukashov A.L.* On Chebyshev–Markov rational fractions over several intervals // J. Approx. Theory. 1998. V.95. P.333–352.

42. *Лукашов А.Л.* Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках // Изв. РАН. Сер. Матем. 2004. Т.68, №3. С.115–138.

43. *Ransford T.* Potential theory in the complex plane. Cambridge, 1995.

44. *Stahl H., Totik V.* General orthogonal polynomials. N.Y., 1992.

45. *Peherstorfer F., Steinbauer R.* Strong asymptotics of orthonormal polynomials with the aid of Green's function // SIAM J. Math. Anal. 2000. V.32. P.385–402.

46. *Totik V.* Polynomial inverse images and polynomial inequalities // Acta Math. 2001. V.187. P.139–160.


УДК 517.984

# О РЕГУЛЯРНОСТИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ


**А.М. Минкин, А.П. Хромов**

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: hromovap@info.sgu.ru



В статье дается подробное изложение положительного решения гипотезы Камке о регулярности самосопряженных краевых условий и устанавливается аналог теоремы Жордана–Дирихле о равномерной сходимости разложений в тригонометрические ряды Фурье для случая разложений по собственным функциям одного класса самосопряженных интегральных операторов.


**On regularity of self-adjoint boundary conditions**

**A.M. Minkin, A.P. Khromov**


In this paper we expound the favourable decision of Kamke's (Камке) hypothesis that self-adjoint boundary conditions are regular and we also establish an analogue of Jordan–Dirichlet theorem on uniform convergence of trigonometric Fourier series for the case of the expansions in eigen functions of self-adjoint integral operators from the certain class.


## Введение

В 1948 году Э. Камке [1, с.360] высказал гипотезу о регулярности самосопряженных краевых условий для обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка с двухточечными краевыми условиями. Положительное решение ее для оператора четного порядка