



МЕХАНИКА

УДК 532.5

Термокапиллярное движение тонкой пленки бинарного спиртосодержащего раствора

Н. А. Иванова, К. А. Бородина

Иванова Наталья Анатольевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры технической и экспериментальной физики, Тюменский государственный университет, Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Семакова, д. 10, n.ivanova@utmn.ru

Бородина Ксения Алексеевна, аспирант кафедры фундаментальной математики и механики, Тюменский государственный университет, Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Семакова, д. 10, k.a.borodina@mail.ru

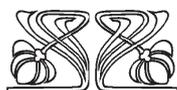
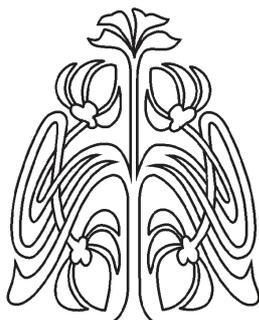
Межфазная конвекция — широко распространенное явление, встречающееся в различных отраслях техники, включая химические технологии. Наибольший интерес в случае тонких пленок жидкости представляет конвекция Марангони. Фазовые переходы существенно влияют на конвективное течение, изменяя коэффициент поверхностного натяжения. В данной работе аналитически исследуется поведение тонкой пленки спиртосодержащего раствора при ее нагреве. Изменение температуры свободной поверхности вместе с уходом летучей компоненты приводит, как правило, к двум противоположным эффектам по направленности градиента поверхностного натяжения. Показано, что в рассматриваемой нестационарной задаче деформации пленки можно выделить четыре масштаба времени, связанных с развитием полей скорости, температуры и концентрации, а также с изменением высоты слоя. В зависимости от первоначальной толщины деформация пленки может как опережать развитие поля концентрации, так и отставать от него. В линейном приближении получены формулы для полей основных величин и деформации пленки.

Ключевые слова: термокапиллярное течение, конвекция Марангони, жидкая пленка.

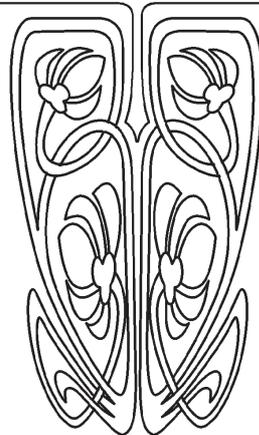
Поступила в редакцию: 26.02.2019 / Принята: 05.05.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-64-78>



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ВВЕДЕНИЕ

Широкий обзор работ по межфазной конвекции приведен в [1, 2]. Движение тонких пленок рассматривается, как правило, в рамках длинноволнового приближения [3, 4]. Балансовые соотношения на границе раздела сред с учетом фазовых переходов приведены в [5, 6]. Изучению конвекции Марангони с учетом испарения посвящены работы [7, 8]. Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических слоях подробно рассмотрено в [9]. В монографии также описаны свойства инвариантных решений уравнений термодиффузии. В настоящей работе исследуется поведение тонкой пленки спиртосодержащего раствора при ее нагреве с учетом ухода летучей компоненты в разных масштабах времени. Эксперименты с подобными системами при воздействии лазерного излучения описаны в [10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основные уравнения

Пусть тонкий слой однородного раствора расположен на плоской горизонтальной поверхности $z = 0$. Газ над пленкой содержит пары летучей компоненты, находящиеся в термодинамическом равновесии с жидкостью. В некоторый момент времени подложка мгновенно нагревается, что приводит к деформации пленки. Будем считать изменения температуры и концентрации раствора незначительными настолько, что к таким отклонениям чувствителен только коэффициент поверхностного натяжения. Параметры же, характеризующие саму жидкость, а также объем раствора, полагаем постоянными. На свободной поверхности $z = h(x, y, t)$ пренебрежем конвективным теплообменом с окружающей средой, сохранив затраты тепла на испарение. Имеем следующую систему уравнений и граничных условий [1, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C &= D \nabla^2 C, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \chi \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$z = 0$:

$$\mathbf{v} = 0, \quad T = T_s, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

$z = h$:

$$\begin{aligned} -(p - p_a) + 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + 2k_R \gamma &= 0, \\ 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \nabla \gamma \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ -k \mathbf{n} \cdot \nabla T &= J L_v, \\ \rho D \mathbf{n} \cdot \nabla C &= -J(1 - C). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v} , p , ρ , T — скорость, давление, плотность и температура жидкости соответственно; C — массовая концентрация летучей компоненты в растворе; D , k и χ — коэффициенты диффузии, теплопроводности и температуропроводности; μ , $\nu = \mu/\rho$ — динамическая и кинематическая вязкости; γ — коэффициент



поверхностного натяжения, L_v — скрытая теплота парообразования, p_a — внешнее атмосферное давление, k_R — кривизна свободной поверхности, \mathbf{D} — тензор скоростей деформаций; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — нормальный и тангенциальный единичные векторы к свободной поверхности; \mathbf{g} — ускорение свободного падения, J — интенсивность массообмена.

В силу принятых допущений о незначительном изменении объема жидкости вследствие ухода летучей компоненты кинематическое условие на свободной поверхности примем в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (-z + h) = 0. \quad (3)$$

Начальные условия соответствуют однородной жидкости в состоянии покоя $t = 0$:

$$h = h_0,$$

$$0 < z < h: \mathbf{v} = 0, \quad T = T_0, \quad C = C_0.$$

Температуру подложки для определенности зададим в виде осесимметричного пятна с центром в начале координат:

$$T_s = T_s(r) = T_0 + \theta e^{-r^2/a^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

Замыкающие соотношения

Коэффициент поверхностного натяжения запишем в линеаризованном виде

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_T (T_I - T_0) + \gamma_C (C_I - C_0), \\ \gamma_T &= \frac{\partial \gamma}{\partial T} (T = T_0, C = C_0), \quad \gamma_C = \frac{\partial \gamma}{\partial C} (T = T_0, C = C_0). \end{aligned}$$

Аналогично представим интенсивность массообмена. Согласно [1] имеем

$$J = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_I} \right)^{1/2} [p_{vs}(T_I, C_I) - p_{vI}].$$

Давление насыщенных паров летучего вещества p_{vs} определим как

$$p_{vs}(T, C) = x(C) p_{v0} \exp \left[\frac{L_v}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right],$$

мольная доля растворенной компоненты

$$x(C) = \frac{CM_w}{CM_w + (1 - C)M_v}.$$

Парциальное давление паров над свободной поверхностью p_{vI} будем считать равным первоначальному значению, соответствующему давлению насыщения

$$p_{vI} = p_{vs}(T_0, C_0).$$

Диффузию паров в данной задаче не рассматриваем. Разложив функцию J по степеням в окрестности (T_0, C_0) , получим в первом приближении

$$J = j_T (T_I - T_0) + j_C (C_I - C_0),$$



$$j_T = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_0} \right)^{1/2} \frac{C_0 M_w}{C_0 M_w + (1 - C_0) M_v} \frac{p_{v0} L_v}{RT_0^2},$$

$$j_C = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_0} \right)^{1/2} \frac{M_w M_v}{[C_0 M_w + (1 - C_0) M_v]^2} p_{v0}.$$

В приведенных формулах T_I и C_I — температура и концентрация на свободной поверхности; α_{com} — коэффициент коммодации; M_v, M_w — молярные массы летучей и основной компоненты раствора; R — универсальная газовая постоянная, p_{v0} — давление насыщенного пара чистой компоненты.

Представленные ниже иллюстрации поведения жидкой пленки будут соответствовать водному раствору изопропанола (IPA), параметры которого примем как в [10]. Начальная температура $T_0 = 293$ К, начальная массовая концентрация IPA $C_0 = 0.35$, молярная масса летучей компоненты $M_{IPA} = M_v = 60$ г/моль, воды — $M_w = 18$ г/моль, плотность раствора $\rho = 860$ кг/м³, коэффициент вязкости $\mu = 3$ мПа · с, теплопроводности — $k = 0.6$ Вт/(м · К), диффузии — $D = 10^{-9}$ м²/с, теплота парообразования $L_v = 756$ кДж/кг, давление насыщенных паров $p_{v0} = 4.1$ кПа, коэффициент коммодации $\alpha_{com} = 1$, характерный размер зоны нагрева $a = 10^{-3}$ м, повышение температуры $\theta = 1$ К. Для коэффициента поверхностного натяжения имеем $\gamma_T = -10^{-4}$ Н/(м · К), $\gamma_C = -0.017$ Н/м. Так как в работе рассматриваются только малые деформации тонкого слоя, то лапласовским скачком давления в данном исследовании будем пренебрегать.

Характерные времена

Проведем анализ уравнений движения, вводя малый параметр в виде отношения поперечной и продольной характерных длин. Для этой цели запишем уравнения в проекциях, выделив вертикальную координату z

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + w \mathbf{e}_z, \quad \nabla = \nabla_\perp + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad \nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y.$$

Пусть l — продольная, d — поперечная характерные длины, причем $l \gg d$, так что $\varepsilon = d/l$ представляет собой малый параметр системы. Характерные продольная и поперечная скорости u_0 и w_0 связаны между собой соотношением $w_0 = \varepsilon u_0$, которое вытекает из уравнения непрерывности. Характерное давление определим выражением $p_0 = (\mu u_0 l)/d^2$. Характерное время процесса обозначим как τ , θ — перепад температуры, соответствующий постановке задачи.

В уравнениях (1) с граничными условиями (2), (3) перейдем к безразмерным переменным

$$\nabla_\perp^* = l \nabla_\perp, \quad x_* = \frac{x}{l}, \quad y_* = \frac{y}{l}, \quad z_* = \frac{z}{d}, \quad t_* = \frac{t}{\tau},$$

$$\mathbf{v}_\perp^* = \frac{\mathbf{v}_\perp}{u_0}, \quad w_* = \frac{w}{w_0}, \quad p_* = \frac{p}{p_0}, \quad T_* = \frac{T - T_0}{\theta}, \quad h_* = \frac{h}{d}.$$

В целях поэтапного анализа выделим явно характерное время процесса движения τ по аналогии с [11]:

$$\frac{d^2}{v\tau} \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^*}{\partial t_*} + Re \varepsilon^2 \left((\mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^*) \mathbf{v}_\perp^* + w_* \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*} \right) - \varepsilon^2 \nabla_\perp^{*2} \mathbf{v}_\perp^* = -\nabla_\perp^* p_* + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*^2},$$



$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d^2}{\nu \tau} \frac{\partial w_*}{\partial t_*} + Re \varepsilon^4 \left((\mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^*) w_* + w_* \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \right) - \varepsilon^4 \nabla_\perp^{*2} w_* - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_*}{\partial z_*^2} = \\ = -\frac{\partial p_*}{\partial z_*} - \frac{Ga}{Re}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{Pr}{Le} \frac{d^2}{\nu \tau} \frac{\partial C}{\partial t_*} + \frac{RePr}{Le} \varepsilon^2 \left(\mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* C + w_* \frac{\partial C}{\partial z_*} \right) - \varepsilon^2 \nabla_\perp^{*2} C = \frac{\partial^2 C}{\partial z_*^2}, \\ Pr \frac{d^2}{\nu \tau} \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + RePr \varepsilon^2 \left(\mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* T_* + w_* \frac{\partial T_*}{\partial z_*} \right) - \varepsilon^2 \nabla_\perp^{*2} T_* = \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2}, \\ \nabla_\perp^* \cdot \mathbf{v}_\perp^* + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} z_* = 0: \quad \mathbf{v}_\perp^* = 0, \quad w_* = 0, \quad T_* = T_s^*, \quad \partial C / \partial z_* = 0, \\ z_* = h_*: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - (p_* - p_a^*) + \\ & + 2 \frac{\varepsilon^4 \nabla_\perp^* \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \varepsilon^4 \nabla_\perp^* w_* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \varepsilon^2 \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \varepsilon^2 \partial w_* / \partial z_*}{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2} = 0, \\ & RePr \frac{-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \mathbf{e}_z \varepsilon \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \varepsilon^2 \nabla_\perp^* w_* + \varepsilon \partial w_* / \partial z_* \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} + \\ & + RePr \frac{-\varepsilon^2 (\nabla_\perp^* \mathbf{v}_\perp^*)^T \cdot \nabla_\perp^* h_* - \mathbf{e}_z \varepsilon^3 \nabla_\perp^* w_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* + \varepsilon \partial w_* / \partial z_* \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} - \quad (7) \\ & - 2 RePr \frac{\varepsilon^3 \nabla_\perp^* \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \varepsilon^3 \nabla_\perp^* w_* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \varepsilon \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \varepsilon \partial w_* / \partial z_*}{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2} \times \\ & \quad \times \frac{-\varepsilon \nabla_\perp^* h_* + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} = \\ & = Ma \left(\varepsilon \nabla_\perp^* T_* + \frac{\partial T_*}{\partial z_*} \mathbf{e}_z - \left(-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* T_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \frac{\partial T_*}{\partial z_*} \right) \frac{-\varepsilon \nabla_\perp^* h_* + \mathbf{e}_z}{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2} \right) + \\ & + Ma \frac{1}{\theta} \frac{\gamma_C}{\gamma_T} \left(\varepsilon \nabla_\perp^* C + \frac{\partial C}{\partial z_*} \mathbf{e}_z - \left(-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* C \cdot \nabla_\perp^* h_* + \frac{\partial C}{\partial z_*} \right) \frac{-\varepsilon \nabla_\perp^* h_* + \mathbf{e}_z}{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2} \right), \\ & \quad - \frac{-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* T_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \partial T_* / \partial z_*}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} = \frac{J L_v d}{k \theta}, \\ & \quad \frac{-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* C \cdot \nabla_\perp^* h_* + \partial C / \partial z_*}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} = - \frac{J (1 - C) d}{\rho D}, \\ & \quad \frac{l}{u_0 \tau} \frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* - w_* = 0. \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения для безразмерных комплексов:

$$Re = \frac{u_0 l}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Ga = \frac{g d^3}{\nu^2}, \quad Le = \frac{D}{\chi}, \quad Ma = \frac{\gamma_T \theta l}{\mu \chi},$$

и величин: $T_s^* = (T_s - T_0) / \theta$, $p_a^* = p_a / p_0$.



Как следует из (5), (7), при деформации пленки раствора можно выделить четыре масштаба времени, связанных с развитием полей скорости, температуры и концентрации, а также с изменением толщины слоя. Введем следующие характерные времена:

$$\tau_1 = \frac{d^2}{\nu}, \quad \tau_2 = Pr \frac{d^2}{\nu}, \quad \tau_3 = \frac{Pr d^2}{Le \nu}, \quad \tau_4 = \frac{l}{u_0}, \quad (8)$$

при этом

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \sim 1, \quad \frac{\tau_1}{\tau_3} = \frac{Le}{Pr}, \quad \frac{\tau_1}{\tau_4} = \varepsilon^2 Re.$$

Рассмотрим два предельных случая соотношений характерных времен: деформация пленки опережает развитие поля концентрации растворенной компоненты

$$\frac{\tau_4}{\tau_3} \sim \varepsilon \iff \varepsilon \sim \sqrt[3]{\frac{Le}{Pr Re}} = \varepsilon_1,$$

развитие поля концентрации опережает процесс деформации пленки

$$\frac{\tau_3}{\tau_4} \sim \varepsilon \iff \varepsilon \sim \frac{Le}{Pr Re} = \varepsilon_2.$$

Соотношения характерных времен будет соответственно

$$\tau_1 \sim \tau_2 < \tau_4 < \tau_3, \quad \tau_1 \sim \tau_2 < \tau_3 < \tau_4.$$

При $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_1$ жидкую пленку условно назовем «термической», а при $\varepsilon \lesssim \varepsilon_2$ — «диффузионной»; временной интервал, предшествующий видимой деформации, — «малыми временами». Для термической пленки малые времена $t \sim \tau_1$, для диффузионной — $t \sim \tau_3$.

Характерные скорости

Скорость u_0 для термической и диффузионной пленок обозначим соответственно u_T и u_D . Примем также $d = h_0$, $l = a$. Характерные скорости u_T и u_D определим при больших временах $t \sim \tau_4$, когда деформации становятся существенными. В этом случае можно считать температуру однородной по высоте, и, как следствие,

$$T_I = T_s(r) = T_0 + \theta e^{-r^2/a^2}.$$

В случае термической пленки концентрация еще не изменилась значительно $C_I = C = C_0$. Коэффициент поверхностного натяжения

$$\gamma - \gamma_0 = \gamma_T (T_I - T_0) + \gamma_C (C_I - C_0) = \gamma_T \theta e^{-r^2/a^2}.$$

Характерная скорость термокапиллярного течения $u_0 \sim \frac{d \Delta \gamma}{\mu l}$, так что можно принять

$$u_T = \frac{|\gamma_T| \theta d}{\mu a}.$$

Процесс деформации диффузионной пленки будем считать равновесным, что достигается уменьшением ее первоначальной толщины. В этом случае имеет место условие насыщения

$$J = j_T (T_I - T_0) + j_C (C_I - C_0) = 0,$$



$$\gamma - \gamma_0 = \gamma_T (T_I - T_0) + \gamma_C (C_I - C_0) = \left(\gamma_T - \frac{j_T}{j_C} \gamma_C \right) \theta e^{-r^2/a^2}.$$

В силу преобладания концентрационного эффекта характерная скорость

$$u_D = |\gamma_C| \frac{j_T}{j_C} \frac{\theta d}{\mu a}.$$

Величины u_T и u_D определены для каждой из пленок, но только одна из них будет соответствовать характерной скорости.

Теперь можно конкретизировать введенные выше понятия. Пленка раствора проявляет термический эффект, если ее первоначальная толщина

$$d \gtrsim \sqrt[4]{\frac{D\mu a^3}{|\gamma_T|\theta}},$$

и концентрационный (диффузионная пленка) — при

$$d \lesssim \sqrt{\frac{D\mu a}{|\gamma_C|(j_T/j_C)\theta}}.$$

В нашем случае $d \gtrsim 10^{-4}$ м и $d \lesssim 10^{-6}$ м соответственно. Далее рассматриваются жидкие пленки с начальной толщиной $d = d_T$ и $d = d_D$, где $d_T = 10^{-4}$ м, $d_D = 10^{-6}$ м.

2. РАЗВИТИЕ ПОЛЯ СКОРОСТИ. МАЛЫЕ ВРЕМЕНА

Рассмотрим процесс формирования поля скорости при нагреве слоя жидкости. Положим в уравнениях (5), (7) характерное время $\tau = \tau_1$ из (8). Пренебрегая членами порядка ε и выше, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^*}{\partial t_*} &= -\nabla_\perp^* p_* + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*^2}, & \frac{\partial p_*}{\partial z_*} + \frac{Ga}{Re} &= 0, & \frac{\partial C}{\partial t_*} &= 0, \\ \frac{\partial T_*}{\partial t_*} &= \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2}, & \nabla_\perp^* \cdot \mathbf{v}_\perp^* + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} z_* = 0 : \mathbf{v}_\perp^* &= 0, & w_* &= 0, & T_* &= T_s^*, \\ z_* = h_* : p_* &= p_a^*, \\ RePr \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* &= \varepsilon Ma (\nabla_\perp^* T_* + \gamma_C / (\gamma_T \theta) \nabla_\perp^* C), \\ \partial T_* / \partial z_* &= 0, & \partial h_* / \partial t_* &= 0. \end{aligned}$$

Начальные условия $t_* = 0$:

$$h_* = 1, \quad (10)$$

$$0 < z_* < h_* : \mathbf{v}_\perp^* = 0, \quad w_* = 0, \quad T_* = 0, \quad C = C_0.$$

Затраты тепла на испарение на данном временном интервале не учитываем.



Решение задачи ($u_0 = u_T$)

Из кинематического условия на свободной поверхности следует постоянство толщины пленки

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} = 0 \Rightarrow h_* = 1,$$

концентрация также неизменна

$$\frac{\partial C}{\partial t_*} = 0 \Rightarrow C = C_0 = \text{const},$$

продольный градиент давления отсутствует

$$p_* = (Ga/Re)(1 - z_*) + p_a^*.$$

Далее, решая задачу (9), (10) методом Фурье, находим поле температуры

$$T_*(x_*, y_*, z_*, t_*) = T_s^* - 2T_s^* \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*} \sin(\eta_n z_*), \quad \eta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

на свободной поверхности ($z_* = h_* = 1$)

$$T_I^*(x_*, y_*, t_*) = T_s^* - 2T_s^* \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*}(z_* = h_*) = -\nabla_\perp^* T_I^*.$$

Продольная составляющая скорости

$$\begin{aligned} v_\perp^*(x_*, y_*, z_*, t_*) = & \left\{ -4 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq n)}}^{+\infty} (-1)^{n+k} \frac{\eta_k (e^{-\eta_k^2 t_*} - e^{-\eta_n^2 t_*})}{\eta_n^2 (\eta_k^2 - \eta_n^2)} \sin(\eta_n z_*) + \right. \\ & \left. + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_*}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*} \sin(\eta_n z_*) + \left(2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*} - 1 \right) z_* \right\} \nabla_\perp^* T_s^*, \end{aligned} \quad (11)$$

вертикальная компонента

$$\begin{aligned} w_*(x_*, y_*, z_*, t_*) = & \left\{ 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq n)}}^{+\infty} (-1)^{n+k} \frac{\eta_k (e^{-\eta_k^2 t_*} - e^{-\eta_n^2 t_*})}{\eta_n^3 (\eta_k^2 - \eta_n^2)} (1 - \cos(\eta_n z_*)) - \right. \\ & \left. - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_*}{\eta_n^2} e^{-\eta_n^2 t_*} (1 - \cos(\eta_n z_*)) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*} - \frac{1}{2} \right) z_*^2 \right\} \nabla_\perp^{*2} T_s^*. \end{aligned} \quad (12)$$

При нагреве подложки по закону (4) в формулах (11), (12)

$$\begin{aligned} T_s^* &= e^{-r_*^2}, \quad r_* = \sqrt{x_*^2 + y_*^2}, \\ \nabla_\perp^* T_s^* &= \frac{\partial T_s^*}{\partial r_*} \mathbf{e}_r = -2r_* e^{-r_*^2} \mathbf{e}_r, \quad \nabla_\perp^{*2} T_s^* = \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} \left(r_* \frac{\partial T_s^*}{\partial r_*} \right) = 4(r_*^2 - 1) e^{-r_*^2}, \end{aligned}$$

поле скорости обладает осевой симметрией

$$\mathbf{v}_\perp^* = \frac{\mathbf{v}_\perp}{u_0} = v_r^* \mathbf{e}_r, \quad v_r^* = v_r^*(r_*, z_*, t_*).$$

На рис. 1 представлен процесс прогрева слоя жидкости и формирование поля скорости.

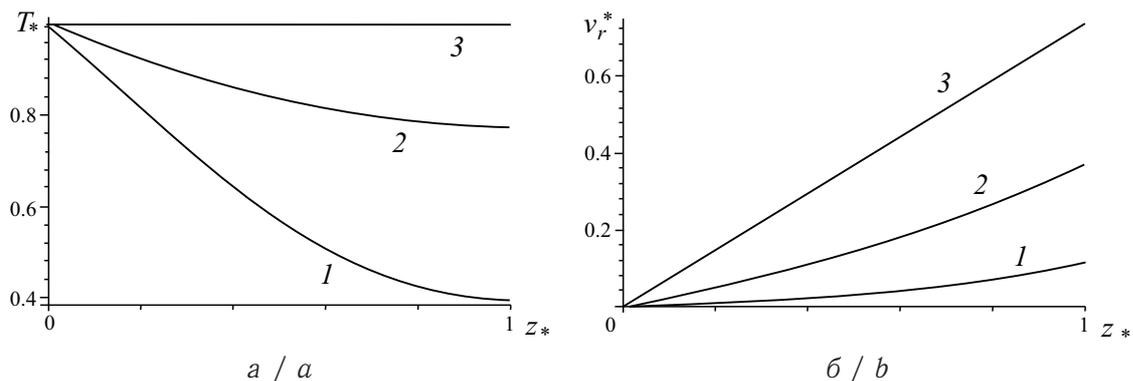


Рис. 1. Температура T_* ($r_* = 0$) и радиальная компонента скорости v_r^* ($r_* = 1$) по высоте. Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_* = 0.3, 0.7, 3$

Fig. 1. The temperature T_* ($r_* = 0$) and the radial velocity component v_r^* ($r_* = 1$) in height. Curves 1–3 correspond to time instants $t_* = 0.3, 0.7, 3$

Приведены зависимости температуры T_* и радиальной компоненты скорости v_r^* от вертикальной координаты z_* . Температура указана на вертикальной оси $r_* = 0$, а профили скорости — на некотором удалении от нее ($r_* = 1$). Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_* = 0.3, 0.7, 3$. При построении графиков ряды были заменены конечными суммами с достаточным числом слагаемых, так что при дальнейшем их увеличении визуального изменения не наблюдалось.

За период характерного времени устанавливается однородное распределение температуры по вертикали и линейный профиль скорости, как при течении Куэтта. Поведение термической и диффузионной пленок при временах $t \sim \tau_1$ одинаково. Далее для термической пленки начинается процесс деформации, а для диффузионной малые времена продолжаются до $t \sim \tau_3$, происходят изменение концентрации и перестраивание поля скорости.

Определим дальнейшее развитие поля скорости для диффузионной пленки, связанное с испарением летучей компоненты. Полагая в уравнениях (5), (7) характерное время $\tau = \tau_3$ из (8), будем иметь

$$\begin{aligned}
 -\nabla_{\perp}^* p_* + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{\perp}^*}{\partial z_*^2} = 0, \quad \frac{\partial p_*}{\partial z_*} + \frac{Ga}{Re} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t_*} = \frac{\partial^2 C}{\partial z_*^2}, \\
 \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2} = 0, \quad \nabla_{\perp}^* \cdot \mathbf{v}_{\perp}^* + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Граничные условия (линеаризованные)

$$\begin{aligned}
 z_* = 0 : \quad \mathbf{v}_{\perp}^* = 0, \quad w_* = 0, \quad \partial C / \partial z_* = 0, \quad T_* = T_s^*, \\
 z_* = h_* : \quad p_* = p_a^*, \\
 RePr \partial \mathbf{v}_{\perp}^* / \partial z_* = \varepsilon Ma (\nabla_{\perp}^* T_* + \gamma_C / (\gamma_T \theta) \nabla_{\perp}^* C), \\
 \rho D / (j_C (1 - C_0) d) \partial C / \partial z_* = -[(j_T \theta / j_C) T_* + (C - C_0)], \\
 -k \theta / (j_C L_v d) \partial T_* / \partial z_* = (j_T \theta / j_C) T_* + (C - C_0), \quad \partial h_* / \partial t_* = 0.
 \end{aligned}$$

Начальные условия $t_* = 0$:

$$\begin{aligned}
 h_* = 1, \\
 0 < z_* < h_* : \quad C = C_0.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$



Решение задачи ($u_0 = u_D, d = d_D$)

Толщина пленки неизменна

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} = 0 \Rightarrow h_* = 1.$$

Интегрирование уравнения для температуры в (13) дает

$$\frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2} = 0 \Rightarrow T_* = (T_I^* - T_s^*) z_* + T_s^* \Rightarrow \frac{\partial T_*}{\partial z_*} = T_I^* - T_s^*.$$

Здесь $T_I^* = T_*(z_* = h_*)$ пока неизвестная функция. Подставив это выражение в граничное условие

$$-\frac{k\theta}{j_C L_v d} (T_I^* - T_s^*) = \frac{j_T \theta}{j_C} T_I^* + (C_I - C_0),$$

находим связь переменных T_I^* и $C_I = C(z_* = h_*)$ на внешней поверхности пленки

$$T_I^* = \frac{k\theta T_s^* - j_C L_v (C_I - C_0) d}{(k + j_T L_v d) \theta}. \quad (15)$$

Используя (15) в граничном условии для C из (14), можно исключить температуру T_I^*

$$\begin{aligned} \frac{\rho D}{j_C (1 - C_0) d} \frac{\partial C}{\partial z_*} (z_* = 1) &= - \left[\frac{j_T \theta}{j_C} T_I^* + (C_I - C_0) \right] = \\ &= - \frac{k}{k + j_T L_v d} \left[\frac{j_T \theta}{j_C} T_s^* + (C_I - C_0) \right], \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial (C - C_0)}{\partial z_*} (z_* = 1) + H [(C_I - C_0) - U] = 0,$$

где

$$H = \frac{j_C (1 - C_0) d}{\rho D} \frac{k}{k + j_T L_v d}, \quad U = - \frac{j_T \theta}{j_C} T_s^*. \quad (16)$$

Таким образом, задача для концентрации из (13), (14) отделяется

$$\begin{aligned} \frac{\partial (C - C_0)}{\partial t_*} &= \frac{\partial^2 (C - C_0)}{\partial z_*^2}, \quad 0 < z_* < 1, \quad t_* > 0, \\ t_* = 0: \quad (C - C_0) &= 0, \\ z_* = 0: \quad \partial (C - C_0) / \partial z_* &= 0, \\ z_* = 1: \quad \partial (C - C_0) / \partial z_* + H [(C - C_0) - U] &= 0. \end{aligned}$$

Поле концентрации имеет вид

$$C(x_*, y_*, z_*, t_*) = C_0 + U \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{H \sqrt{H^2 + \mu_n^2}}{\mu_n [H^2 + H + \mu_n^2]} e^{-\mu_n^2 t_*} \cos(\mu_n z_*) \right].$$



Здесь U и H определены формулой (16), μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg} \mu = \mu/H$. На свободной поверхности ($z_* = 1$)

$$C_I = C_0 - \frac{j_T \theta}{j_C} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{H \sqrt{H^2 + \mu_n^2}}{\mu_n [H^2 + H + \mu_n^2]} e^{-\mu_n^2 t_*} \cos \mu_n \right] T_s^*. \quad (17)$$

Остальные неизвестные находятся с помощью (15) и (17)

$$h_* = \operatorname{const} \Rightarrow \nabla_{\perp}^* p_* = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{\perp}^*}{\partial z_*^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}^*}{\partial z_*} (z_* = h_*) = -\frac{u_T}{u_D} \left(\nabla_{\perp}^* T_I^* + \frac{\gamma_C}{\gamma_T \theta} \nabla_{\perp}^* C_I \right).$$

Профиль продольной составляющей скорости линейный по высоте

$$\mathbf{v}_{\perp}^* (x_*, y_*, z_*, t_*) = -\frac{u_T}{u_D} \left(\nabla_{\perp}^* T_I^* + \frac{\gamma_C}{\gamma_T \theta} \nabla_{\perp}^* C_I \right) z_*,$$

вертикальная компонента скорости

$$w_* (x_*, y_*, z_*, t_*) = \frac{u_T}{u_D} \left(\nabla_{\perp}^* T_I^* + \frac{\gamma_C}{\gamma_T \theta} \nabla_{\perp}^* C_I \right) \frac{z_*^2}{2},$$

поле температуры

$$T_* (x_*, y_*, z_*, t_*) = (T_I^* - T_s^*) z_* + T_s^*.$$

Как видно из (17), термодинамическое равновесие наступает за время

$$t_* = \frac{\tau_s}{\tau_3} \sim \frac{1}{\mu_1^2} \Rightarrow \tau_s \sim \frac{d^2}{\mu_1^2 D}.$$

Процесс деформации диффузионной пленки равновесный при условии $\tau_s < \tau_4$. Данное требование выполняется.

На рис. 2 показаны динамика изменения концентрации и температуры на поверхности пленки, а также перестраивание ранее сформированного поля скорости.

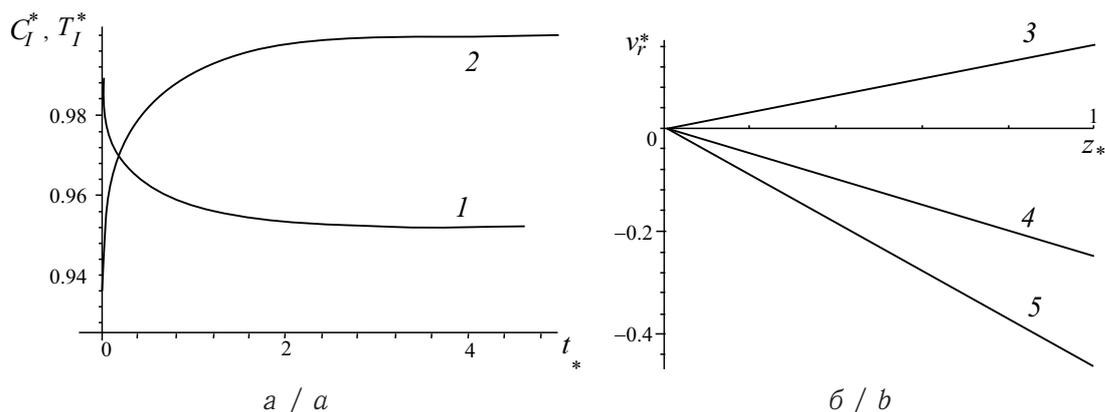


Рис. 2. Концентрация $C_I^* = C_I/C_0$ и температура T_I^* при $r_* = 0$ в зависимости от времени — кривые 1 и 2; радиальная компонента скорости v_r^* ($r_* = 1$) по высоте — кривые 3–5 соответствуют моментам времени $t_* = 0.001, 0.3, 3$

Fig. 2. Concentration $C_I^* = C_I/C_0$ and temperature T_I^* at $r_* = 0$ depending on time are the curves 1 and 2; the radial velocity component v_r^* ($r_* = 1$) in height is the curves 3–5 which correspond to time instants $t_* = 0.001, 0.3, 3$



Приведены зависимости $C_I^* = C_I/C_0$ и T_I^* от времени t_* в центре $r_* = 0$ — кривые 1 и 2 соответственно. Показано распределение радиальной компоненты скорости v_r^* по вертикали при $r_* = 1$; кривые 3–5 соответствуют моментам времени $t_* = 0.001, 0.3, 3$. Как и ранее, сходимости рядов контролировалась визуально. Концентрация убывает со временем и стремится к новому равновесному значению. При этом температура поверхности пленки несколько понижена вследствие затрат тепла на испарение летучей компоненты. Горизонтальная составляющая скорости v_\perp^* меняет свое направление на противоположное.

3. ДЕФОРМАЦИЯ ПЛЕНКИ РАСТВОРА

Рассмотрим динамику жидкой пленки. При $\tau = \tau_4$ из (5), (7) следует

$$-\nabla_\perp^* p_* + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*^2} = 0, \quad \frac{\partial p_*}{\partial z_*} + \frac{Ga}{Re} = 0, \quad \nabla_\perp^* \cdot \mathbf{v}_\perp^* + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} z_* = 0 : \mathbf{v}_\perp^* = 0, \quad w_* = 0, \quad z_* = h_* : p_* = p_a^*, \\ RePr \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* = \varepsilon Ma (\nabla_\perp^* T_* + \gamma_C / (\gamma_T \theta) \nabla_\perp^* C), \\ \partial h_* / \partial t_* + \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* - w_* = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Вводя в (18), (19) среднюю по толщине продольную скорость \mathbf{u}_* , приходим к известным соотношениям

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \nabla_\perp^* \cdot (h_* \mathbf{u}_*) = 0, \quad \mathbf{u}_* = -\frac{Ga}{3Re} h_*^2 \nabla_\perp^* h_* + \frac{\varepsilon Ma}{2RePr} h_* \left(\nabla_\perp^* T_* + \frac{\gamma_C}{\gamma_T \theta} \nabla_\perp^* C_I \right).$$

Для рассмотренных примеров линеаризованное уравнение эволюции принимает единую форму

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} = A (r_*^2 - 1) e^{-r_*^2} + B \left(\frac{\partial^2 h_*}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial h_*}{\partial r_*} \right),$$

но с различными значениями коэффициентов. Для пленки с начальной толщиной $d = d_T$: $A = 2$, $B = \rho g d_T^3 / (3\mu a u_T)$, $t_* = u_T t / a$; для пленки с $d = d_D$: $A = 2(u_T - u_D) / u_D$, $B = \rho g d_D^3 / (3\mu a u_D)$, $t_* = u_D t / a$. Приходим к следующей постановке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_*}{\partial t_*} = A f(r_*) + B \Delta_{r_*} h_*, \quad f(r_*) = (r_*^2 - 1) e^{-r_*^2}, \quad \Delta_{r_*} h_* = \frac{\partial^2 h_*}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial h_*}{\partial r_*}, \\ h_* = h_*(r_*, t_*); \quad r_* > 0, \quad t_* > 0; \\ h_*(r_*, 0) = 1, \quad h_*(+\infty, t_*) = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Решая задачу (20) с помощью преобразования Ханкеля нулевого порядка, устанавливаем динамику изменения толщины пленки

$$h_*(r_*, t_*) = 1 - \frac{A}{4B} \left(\exp\{-r_*^2\} - \frac{1}{1 + 4Bt_*} \exp\left\{-\frac{r_*^2}{1 + 4Bt_*}\right\} \right).$$

На рис. 3 представлена деформация пленки. Изображены зависимости толщины слоя жидкости $h_* = h/d$ от радиальной координаты r_* .

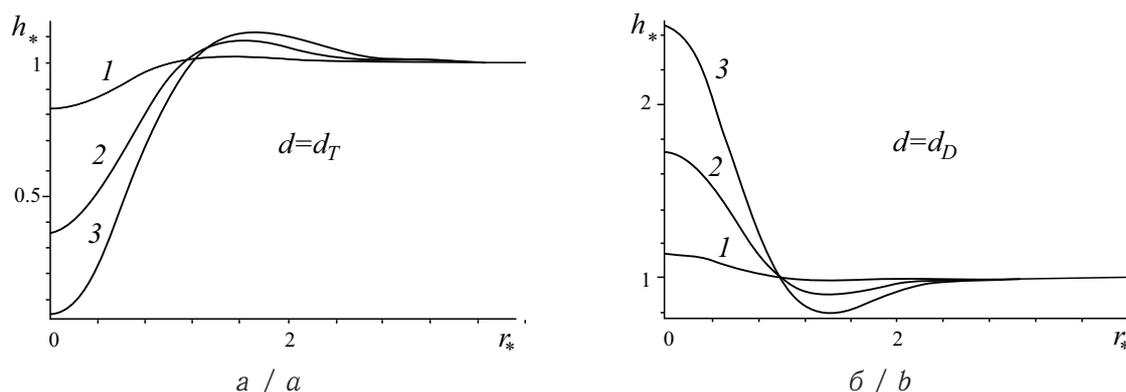


Рис. 3. Зависимость толщины пленки h_* от продольной координаты r_* . Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_* = 0.1, 0.5, 1$; $d = d_T$ (а), $d = d_D$ (б)

Fig. 3. Dependence of the film thickness h_* on the longitudinal coordinate r_* . Curves 1–3 correspond to points in time $t_* = 0.1, 0.5, 1$; $d = d_T$ (a), $d = d_D$ (b)

Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_* = 0.1, 0.5, 1$. Для термической $d = d_T$ и диффузионной $d = d_D$ пленок наблюдается разнонаправленное движение свободной поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучено поведение тонкой пленки жидкости, содержащей летучую компоненту, при ее нагреве. Выделено четыре масштаба времени, связанных с развитием полей скорости, температуры и концентрации, а также с изменением высоты слоя. Определен характерный период, в течение которого устанавливается термодинамическое равновесие раствора с насыщенным паром. В зависимости от первоначальной высоты жидкого слоя прогиб поверхности пленки может как опережать развитие поля концентрации, так и отставать от него. В последнем случае наблюдается перестроение течения в пленке с изменением направления радиальной составляющей скорости до момента видимой деформации.

Библиографический список

1. *Simanovskii I. B., Nepomnyashchy A. A.* Convective Instabilities in Systems with Interface. L.: Gordon and Breach, 1993. 279 p.
2. *Colinet P., Legros J. C., Velarde M. G.* Nonlinear Dynamics of Surface – Tension Driven Instabilities. Berlin: Wiley-VCH, 2001. 522 p.
3. *Oron A.* Nonlinear dynamics of irradiated thin volatile liquid films // *Physics of Fluids*. 2000. Vol. 12, iss. 1. P. 29–41. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.870282>
4. *Matar O. K., Craster R. V., Warner M. R. E.* Surfactant transport on highly viscous surface films // *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. Vol. 466. P. 85–111. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112002001106>
5. *Холпанов Л. П., Шкадов В. Я.* Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела. М.: Наука, 1990. 271 с.
6. *Merkt D., Bestehorn M.* Bénard–Marangoni convection in a strongly evaporating fluid // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2003. Vol. 185, iss. 3–4. P. 196–208. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(03\)00234-3](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(03)00234-3)
7. *Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Шефер И. А.* Устойчивость двухслойных течений жидкости с испарением на границе раздела // *Изв. РАН. МЖГ*. 2017. № 2. С. 23–35. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0568528117020062>



8. *Souche M., Clarke N.* Interfacial instability in bilayer films due to solvent evaporation // *The European Physical Journal E*. 2009. Vol. 28, iss. 1. P. 47–55. DOI: <https://doi.org/10.1140/epje/i2008-10399-x>
9. *Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А.* Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск : Наука, 2000. 278 с.
10. *Tatosova K. A., Malyuk A. Yu., Ivanova N. A.* Droplet formation caused by laser-induced surface-tension-driven flows in binary liquid mixtures // *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects*. 2017. Vol. 521. P. 22–29. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2016.07.004>
11. *Индейкина А. Е., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М.* Нестационарная термокапиллярная конвекция в слое неравномерно нагретой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*. 1991. № 3. С. 17–25.

Образец для цитирования:

Иванова Н. А., Бородин К. А. Термокапиллярное движение тонкой пленки бинарного спиртосодержащего раствора // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 64–78. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-64-78>

Thin Film Thermocapillary Motion of Binary Alcohol-Containing Solution

N. A. Ivanova, K. A. Borodina

Natalia A. Ivanova, <https://orcid.org/0000-0002-4121-8765>, Tyumen State University, 10 Semakova St., Tyumen 625003, Russia, n.ivanova@utmn.ru

Kseniia A. Borodina, <https://orcid.org/0000-0002-3847-0636>, Tyumen State University, 10 Semakova St., Tyumen 625003, Russia, k.a.borodina@mail.ru

Interphase convection is a widespread phenomenon that occurs in various branches of technology, including chemical technologies. The greatest interest in the case of thin liquid films is the Marangoni convection. Phase transitions significantly affect the convective flow, changing the coefficient of surface tension. In this paper, the behavior of a thin film of an alcohol-containing solution when it is heated is analytically studied. The change in the temperature of the free surface together with the escape of the volatile component leads, as a rule, to two opposite effects with respect to the directionality of the surface tension gradient. It is shown that four time scales associated with the development of velocity, temperature and concentration fields, as well as the change in layer height, can be distinguished in the considered non-stationary problem of a film deformation. Depending on the initial thickness deformation of the film can both advance the development of the concentration field, and lag behind it. In the linear approximation formulas for the fields of the basic quantities, and also for the asymptotics of the film deformation process are obtained.

Keywords: thermocapillary flow, Marangoni convection, deformation of a liquid film.

Received: 26.02.2019 / Accepted: 05.05.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



References

1. Simanovskii I. B., Nepomnyashchy A. A. *Convective Instabilities in Systems with Interface*. London, Gordon and Breach, 1993. 279 p.
2. Colinet P., Legros J. C., Velarde M. G. *Nonlinear Dynamics of Surface-Tension Driven Instabilities*. Berlin, Wiley-VCH, 2001. 522 p.
3. Oron A. Nonlinear dynamics of irradiated thin volatile liquid films. *Physics of Fluids*, 2000, vol. 12, iss. 1, pp. 29–41. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.870282>
4. Matar O. K., Craster R. V., Warner M. R. E. Surfactant transport on highly viscous surface films. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, vol. 466, pp. 85–111. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112002001106>
5. Holpanov L. P., Shkadov V. Y. *Gidrodinamika i teploobmen s poverhnost'yu razdela* [Hydrodynamics and heat transfer with the interface]. Moscow, Nauka, 1990. 271 p. (in Russian).
6. Merkt D., Bestehorn M. Bénard-Marangoni convection in a strongly evaporating fluid. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2003, vol. 185, iss. 3–4, pp. 196–208. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(03\)00234-3](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(03)00234-3)
7. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Rezanova E. V., Shefer I. A. Stability of two-layer fluid flows with evaporation at the interface. *Fluid Dynamics*, 2017, vol. 52, iss. 2, pp. 189–200. DOI: <https://doi.org/10.1134/S001546281702003X>
8. Souche M., Clarke N. Interfacial instability in bilayer films due to solvent evaporation. *The European Physical Journal E*, 2009, vol. 28, iss. 1, pp. 47–55. DOI: <https://doi.org/10.1140/epje/i2008-10399-x>
9. Andreev V. K., Zahvataev V. E., Ryabickij E. *Termokapillyarnaya neustojchivost'* [Thermocapillary instability]. Novosibirsk, Nauka, 2000. 278 p. (in Russian).
10. Tatosova K. A., Malyuk A. Yu., Ivanova N. A. Droplet formation caused by laser-induced surface-tension-driven flows in binary liquid mixtures. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2017, vol. 521, pp. 22–29. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2016.07.004>
11. Indeikina A. E., Ryazantsev Yu. S., Shevtsova V. M. Unsteady thermocapillary convection in a nonuniformly heated fluid layer. *Fluid Dynamics*, 1991, vol. 26, iss. 3, pp. 331–337. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01059000>

Cite this article as:

Ivanova N. A., Borodina K. A. Thin Film Thermocapillary Motion of Binary Alcohol-Containing Solution. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 64–78 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-64-78>
