



УДК 539.3

Исследование прочности и устойчивости ортотропных конических оболочек и конических панелей

Е. О. Лапина, А. А. Семенов

Лапина Елена Олеговна, магистрант кафедры информационных технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4, lapina.eo@mail.ru

Семенов Алексей Александрович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4, sw.semenov@gmail.com

В строительстве тонкостенные оболочечные конструкции используются для покрытия помещений больших площадей, таких как стадионы, ангары, цирки, аэропорты. В данной работе приводится исследование прочности и устойчивости замкнутых конических оболочек, а также их панелей. Учитывается геометрическая нелинейность и поперечные сдвиги. Используется математическая модель в виде функционала полной потенциальной энергии деформации. Также приводятся выражения для деформаций, усилий и моментов. Расчетная программа реализована в среде MatLab. Алгоритм построен на методе Рунге и методе Ньютона для решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Показаны варианты аппроксимирующих функций для замкнутой оболочки и для ее панели. Найдены значения критических нагрузок, получена зависимость прогиба от нагрузки, напряжений от нагрузки, показано поле прогибов в докритический и в закритический моменты. Приводятся поля различных компонент напряжений в момент начала невыполнения условий прочности. Учитывается ортотропия материала.

Ключевые слова: оболочки, конические панели, устойчивость, прочность, ортотропия, геометрическая нелинейность.

Поступила в редакцию: 23.02.2019 / Принята: 29.03.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-79-92>

ВВЕДЕНИЕ

В строительстве тонкостенные оболочечные конструкции имеют широкое применение [1–3]. Они используются для покрытия помещений больших площадей, таких как стадионы, ангары, цирки, аэропорты, при этом толщина оболочки достаточно мала, поэтому такие конструкции, особенно при использовании современных материалов, будут легкими.

В архитектурной практике используются оболочки конические, сферические, цилиндрические, пологие, торообразные и др. Как правило, конструкции данного типа подвергаются воздействию различных нагрузок, поэтому возникает необходимость исследования их устойчивости. Исследованию оболочечных конструкций на устойчивость посвящено множество публикаций [4–7], в том числе исследованию конических оболочек и их панелей [8–12]. Процесс деформирования



при действии осевой нагрузки рассматривается в статьях [13–17], колебания — в [18–21], ламинированные конструкции — в работах [22–24]. Другие задачи, связанные с анализом процесса деформирования конических конструкций, можно найти в работах [25–28]. Так, в работе [10] проводится исследование процесса разрушения многослойных цилиндрических и конических панелей при сжатии с учетом геометрической нелинейности. Система нелинейных уравнений решается с использованием итерационного метода Ньютона–Рафсона. В работе [28] анализируется влияние геометрических параметров на устойчивость конических панелей при различных условиях нагружения.

Методика исследования прочности и устойчивости оболочечных конструкций сводится к разработке математической модели их деформирования, разработке алгоритма и программы для ЭВМ, а также проведению вычислительного эксперимента.

В данной работе для исследования прочности и устойчивости были выбраны конические оболочки и их панели, так как, несмотря на свое широкое практическое применение, исследований таких конструкций проводилось сравнительно мало.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

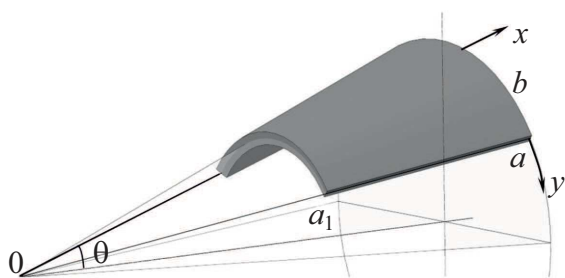


Рис. 1. Панель конической оболочки с локальной системой координат

Fig. 1. Conical shell panel with local coordinate system

Будем рассматривать оболочки и панели конической формы (рис. 1). Геометрический вид данных конструкций будет характеризоваться параметрами Ляме и главными кривизнами вдоль координат x, y , которые примут вид $A = 1, B = x \sin \theta, k_x = 0, k_y = ctg \theta / x$.

Будем использовать математическую модель типа Тимошенко (Миндлина–Рейснера), которая учитывает поперечные сдвиги, ортотропию материала и геометрическую нелинейность [29].

Согласно этой модели, неизвестными функциями будут три функции перемещений точек координатной поверхности $U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскости xOz, yOz : $\Psi_x = \Psi_x(x, y), \Psi_y = \Psi_y(x, y)$. Учет геометрической нелинейности в данном случае дает возможность исследовать не только напряженно-деформированное состояние оболочки, но и ее устойчивость.

В основе данной модели лежит функционал полной потенциальной энергии деформации, который будет иметь следующий вид:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left(N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - qW \right) AB dx dy,$$

где N_x, N_y — нормальные усилия в направлении осей x, y ; N_{xy}, N_{yx} — сдвиговые усилия в соответствующей плоскости xOy ; M_x, M_y — изгибающие моменты; M_{xy} — крутящий момент; Q_x, Q_y — поперечные силы в плоскостях xOz и yOz , которые



определяются соотношениями:

$$N_x = \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y), \quad N_y = \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x), \quad N_{xy} = N_{yx} = G_{12} h \gamma_{xy},$$

$$M_x = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \quad M_y = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{G_{12} h^3}{6} \chi_{12}, \quad Q_x = G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2).$$

Здесь E_1, E_2 — модули упругости в направлениях x, y ; $k = 5/6$; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно; μ_{12}, μ_{21} — коэффициенты Пуассона; $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ — деформации удлинения; γ_{xy} — деформации сдвига в плоскости xOy :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2,$$

$$\theta_1 = - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right).$$

Для решения задачи анализа устойчивости необходимо найти минимум функционала. Полученные в результате значения могут соответствовать либо критическим нагрузкам потери устойчивости (верхним или нижним), либо точкам бифуркации.

Применим к функционалу метод Ритца, что позволит свести вариационную задачу о поиске минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. В таком случае неизвестные функции $U(x, y), V(x, y), W(x, y), \Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$ представим в виде

$$U = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n U_{kl} X1(k) Y1(l), \quad V = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n V_{kl} X2(k) Y2(l),$$

$$W = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n W_{kl} X3(k) Y3(l),$$

$$\Psi_x = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{xkl} X4(k) Y4(l), \quad \Psi_y = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{ykl} X5(k) Y5(l),$$

где $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$ — неизвестные числовые параметры; $X1(k) - X5(k), Y1(l) - Y5(l)$ — известные аппроксимирующие функции, которые удовлетворяют краевым условиям. Краевые условия для каждой конструкции выбираются исходя из способа закрепления контура оболочки.

В качестве аппроксимирующих функций при шарнирно-неподвижном закреплении конической панели будем использовать следующие тригонометрические функции:

$$X1(k) = \sin \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right), \quad X2(k) = \sin \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right), \quad X3(k) = \sin \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right),$$

$$X4(k) = \cos \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right), \quad X5(k) = \sin \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right),$$



$$Y1(l) = \sin\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right), \quad Y2(l) = \sin\left(\frac{2l\pi y}{b}\right), \quad Y3(l) = \sin\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right),$$

$$Y4(l) = \sin\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right), \quad Y5(l) = \cos\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right).$$

Данные функции применимы только для панелей, поскольку они не подразумевают выполнения условия периодичности вдоль оси y . Для замкнутых оболочек аппроксимирующие функции можно принять в следующем виде:

$$X1(k) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right), \quad X2(k) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right), \quad X3(k) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right),$$

$$X4(k) = \cos\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right), \quad X5(k) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right),$$

$$Y1(l) = \cos\left(\frac{2(l-1)\pi y}{b}\right), \quad Y2(l) = \sin\left(\frac{2l\pi y}{b}\right), \quad Y3(l) = \cos\left(\frac{2(l-1)\pi y}{b}\right),$$

$$Y4(l) = \sin\left(\frac{2l\pi y}{b}\right), \quad Y5(l) = \cos\left(\frac{2(l-1)\pi y}{b}\right).$$

Согласно методу Ритца, аппроксимирующие функции подставляются в функционал и находятся производные по неизвестным параметрам. Полученные выражения приравниваются к нулю. В результате получается система нелинейных алгебраических уравнений.

Для нахождения неизвестных коэффициентов будем решать данную систему методом Ньютона:

$$X_{i+1} = X_i - H^{-1}(X_i) \nabla E_p(X_i), \quad X = (U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl})^T, \quad k = 1..n, \quad l = 1..n,$$

где матрица Гессе H и градиент ∇E_p имеют вид

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{11}^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{11} \partial U_{12}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{11} \partial U_{13}} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{11} \partial \Psi_{y_{nn}}} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12} \partial U_{11}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12}^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12} \partial U_{13}} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12} \partial \Psi_{y_{nn}}} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12} \partial U_{11}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{11} \partial U_{12}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12}^2} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12} \partial \Psi_{y_{nn}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}} \partial U_{11}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}} \partial U_{12}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}} \partial U_{13}} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}}^2} \end{bmatrix}, \quad \nabla E_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial U_{11}} \\ \frac{\partial E_p}{\partial U_{12}} \\ \frac{\partial E_p}{\partial U_{13}} \\ \dots \\ \frac{\partial E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}}} \end{bmatrix}.$$

В качестве начального приближения $U_{kl}^0, V_{kl}^0, W_{kl}^0, \Psi_{xkl}^0, \Psi_{ykl}^0$ ($k = 1..n, l = 1..n$) выбираем нулевые значения коэффициентов. Выполняя итерационный процесс, находят коэффициенты $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$, через которые можно получить значения неизвестных функций $U(x, y), V(x, y), W(x, y), \Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$ для текущего значения параметра нагрузки. Далее параметр нагрузки увеличивается и решение системы повторяется. В качестве начального приближения уже выбирается решение с предыдущего шага по нагрузке.

Для анализа прочности материала конструкции может быть использован критерий максимальных напряжений, который имеет следующий вид:

$$\sigma_x^- \leq \sigma_x \leq \sigma_x^+, \quad \sigma_y^- \leq \sigma_y \leq \sigma_y^+, \quad |\tau_{xy}| \leq \tau_{xy}^\pm.$$

Компоненты напряжений анализируются по всему полю конструкции, что позволяет таким образом выявить точки начального невыполнения условий прочности [30].



На данный момент все больше вычислений производится с помощью различных математических систем, таких как Maple, MatLab, WolframAlpha и Mathcad. Они позволяют реализовывать различные подходы к решению задачи, проводить более детальные исследования и создавать базу для дальнейшей разработки программного обеспечения с применением уже традиционных языков программирования.

Предложенный в данной работе алгоритм был реализован в математическом пакете MatLab. MatLab представляет собой высокоуровневый язык и одновременно интерактивную среду для программирования, численных расчетов и визуализации результатов. Он представляет собой множество методов для анализа данных, разработки алгоритмов и создания моделей, включает математические функции для инженерных и научных операций.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе рассматривались конические панели и оболочки, выполненные из нескольких вариантов ортотропных материалов [31, 32], параметры которых приводятся в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Характеристики ортотропных материалов
Characteristics of orthotropic materials

Материал / Material	Т300/976	ЛУ-П/ЭНФБ	Т300/Ероху
E_1 , ГПа / GPa	140	140	125
E_2 , ГПа / GPa	9.7	9.6	7.8
μ_{12}	0.29	0.3	0.34
G_{12} , ГПа / GPa	5.5	4.6	4.4
G_{13} , ГПа / GPa	5.5	4.6	4.5
G_{23} , ГПа / GPa	3.3	4.6	4.5
Предел при растяжении σ_x^+ , МПа Tensile strength σ_x^+ , МПа	1517	700	1760
Предел при растяжении σ_y^+ , МПа Tensile strength σ_y^+ , МПа	46	27	80
Предел при сжатии σ_x^- , МПа Compression limit σ_x^- , МПа	-1599	-600	-1570
Предел при сжатии σ_y^- , МПа Compression limit σ_y^- , МПа	-253	-184	-168
Предел при сдвиге τ_{xy}^\pm , МПа Shear limit τ_{xy}^\pm , МПа	41.4	55	98

Геометрические параметры рассматриваемых вариантов конструкций представлены в табл. 2. На все конструкции действовала равномерно распределенная поперечная нагрузка q , направленная по нормали к поверхности. Расчеты проводились при удержании $N = n^2 = 9$ членов разложения искомым функций в методе Рунге.

Для начала рассмотрим пример, когда оболочечная конструкция незамкнутая (вариант 1). На рис. 2, а, б показаны графики зависимостей «нагрузка – прогиб» и «нагрузка – напряжение в центре конструкции» для панели из углепластика Т300/976. Как видно из графика на рис. 2, а, панель теряет устойчивость при нагрузке $q_{cr} = 0.1$ МПа. Поле прогибов до потери устойчивости и после нее показано на рис. 2, в, г.



Таблица 2 / Table 2

Входные параметры рассматриваемых конструкций
Input parameters of the considered structures

Параметры Parameters	Вариант 1 Variant 1	Вариант 2 Variant 2
Линейный размер a_1 , м Linear size a_1 , m	5	5
Линейный размер a , м Linear size a , m	25	25
Толщина оболочки h , м Shell thickness h , m	0.01	0.01
Угол разворота оболочки b , рад Shell turning angle b , rad	π	2π
Угол конусности θ , рад Taper angle θ , m	0.78	

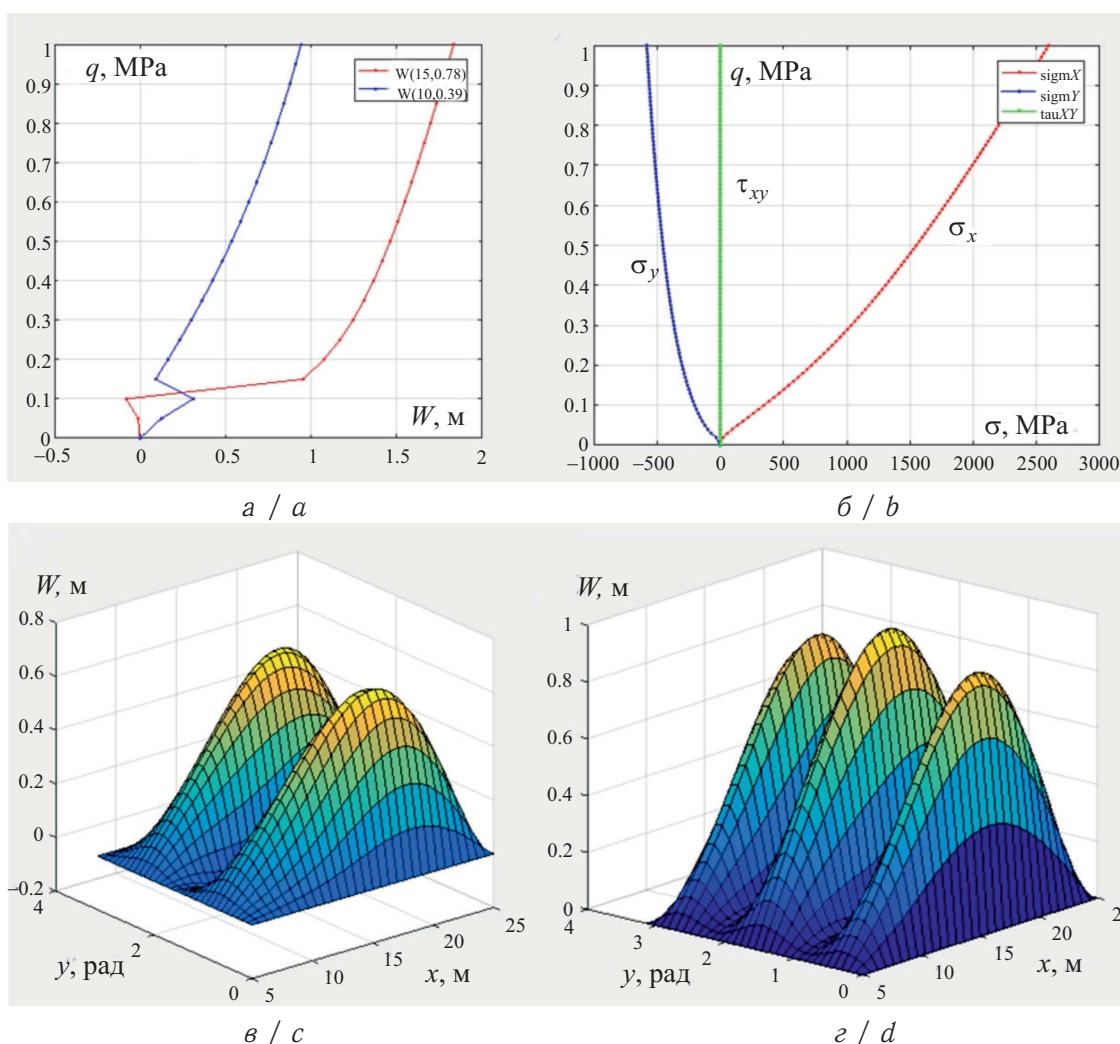


Рис. 2. Результаты расчета конструкции варианта 1 из углепластика Т300/976 (цвет online)
Fig. 2. The results of the calculation of the design of option 1 of carbon fiber T300/976 (color online)

Здесь и далее на графиках «нагрузка – прогиб» красным цветом показаны значения в центре конструкции $((a_1 + a)/2, b/2)$; синим цветом — в четвертой части $(a_1 + (a - a_1)/4, b/4)$.



Также необходимо проводить контроль прочности материала оболочки, поскольку, находясь вблизи критической нагрузки, при превышении уровня допустимых напряжений это может повлечь за собой разрушение конструкции. Поля компонент напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в момент начала невыполнения условий прочности для данной конструкции приводятся на рис. 3.

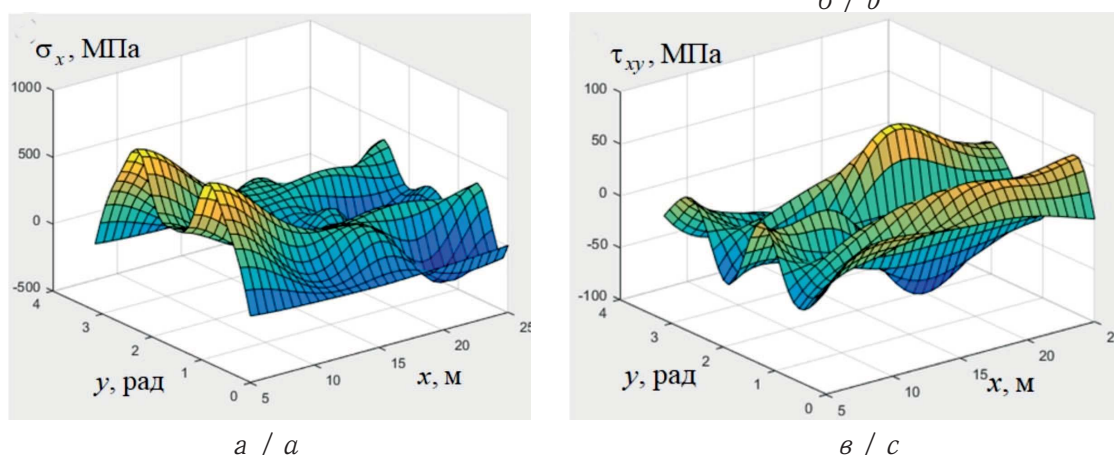


Рис. 3. Поля компонент напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в момент начала невыполнения условий прочности для конструкции варианта 1 из углепластика Т300/976 (цвет online)

Fig. 3. Fields of stress components σ_x , σ_y , τ_{xy} at the moment of the beginning of non-fulfillment of the strength conditions for the construction of option 1 from carbon fiber Т300/976 (color online)

Далее рассмотрим результаты расчета конструкции варианта 2, когда оболочка замкнутая. Графики зависимостей «нагрузка – прогиб» и «нагрузка – напряжение в центре конструкции» представлены на рис. 4.

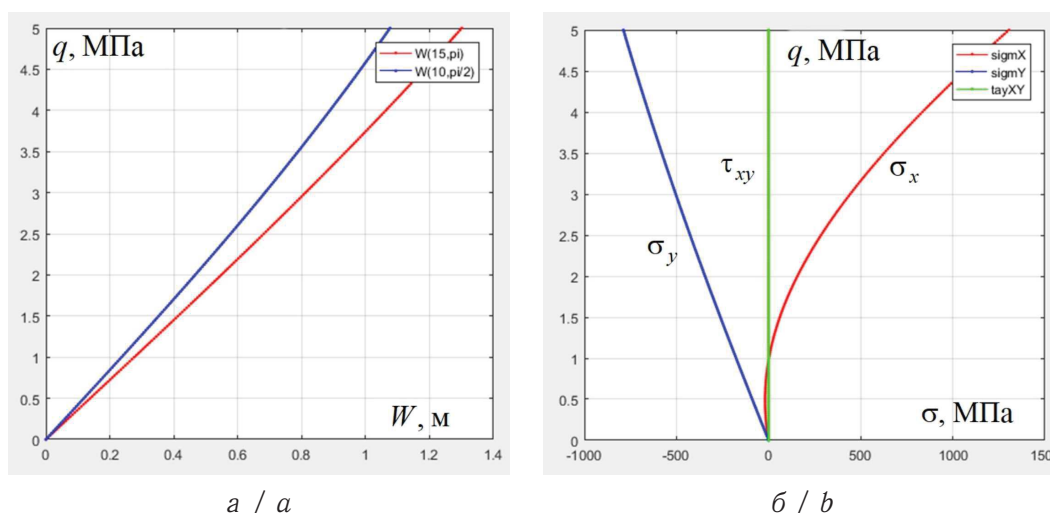


Рис. 4. Результаты расчета конструкции варианта 2 из углепластика Т300/976 (цвет online)

Fig. 4. The results of the calculation of the design of option 2 from carbon fiber Т300/976 (color online)



Потеря устойчивости для данного варианта оболочки не наблюдается, что достаточно часто является характерным для замкнутых конструкций.

На рис. 5 изображены поле прогибов и поля напряжений в момент начала невыполнения условий прочности (при нагрузке, близкой к 1.5 МПа).

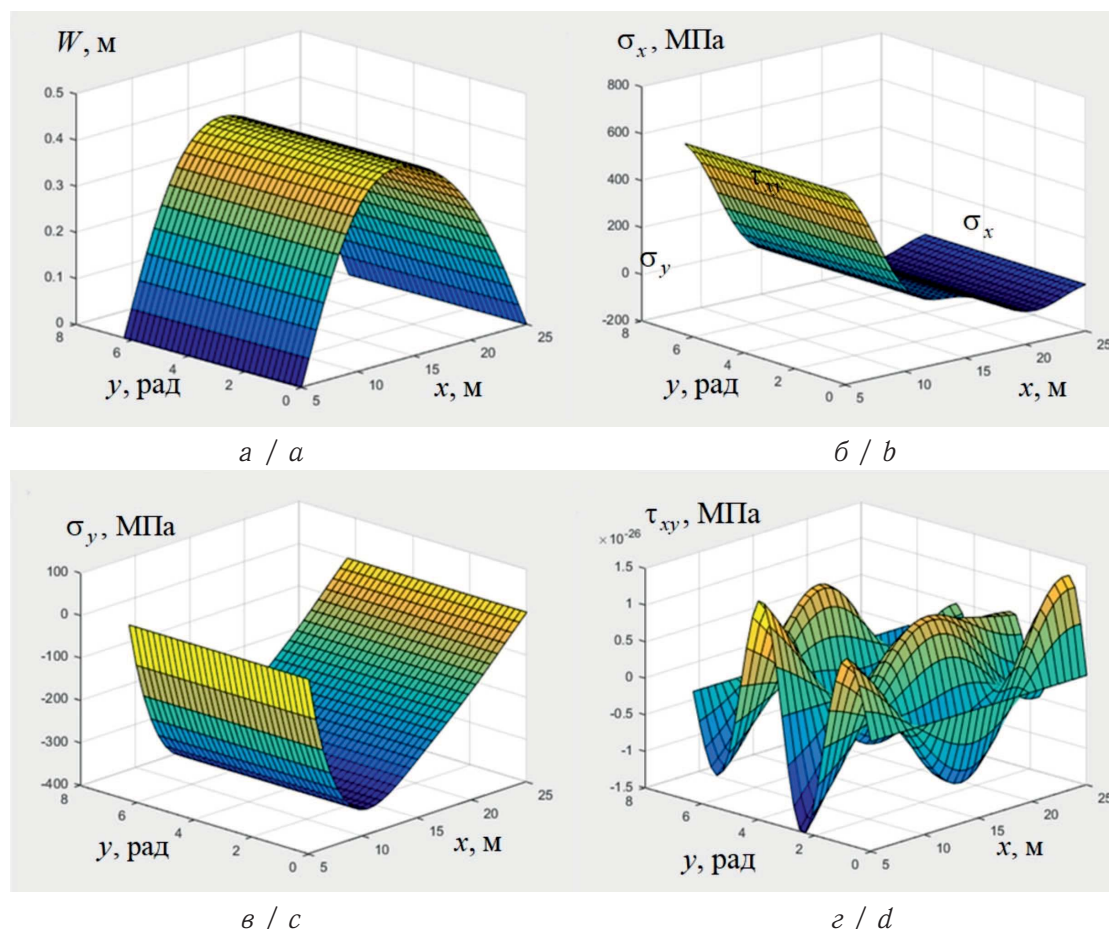


Рис. 5. Поле прогибов и поля компонент напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в момент начала невыполнения условий прочности для конструкции варианта 2 из углепластика Т300/976 (цвет online)

Fig. 5. The field of deflections and the field of stress components σ_x , σ_y , τ_{xy} at the moment of the beginning of the failure to fulfill the strength conditions for the construction of option 2 from carbon fiber T300/976 (color online)

В табл. 3 приводятся значения прогибов при некоторых значениях нагрузки для замкнутых оболочек из материалов ЛУ-П/ЭНФБ и Т300/Ероху. Для данных конструкций условие прочности перестает выполняться при нагрузках, близких к значению 1 МПа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены тонкостенные конические оболочечные конструкции, состоящие из различных ортотропных материалов и имеющие шарнирно-неподвижное закрепление. Рассматриваемые конструкции находились под воздействием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Проводилось комплексное исследование оболочек на устойчивость и прочность. Была разработана расчетная программа в среде MatLab, которая позволяет проводить исследования устойчивости оболочечных конструкций.



Таблица 3 / Table 3

Значения прогиба в центре и четверти замкнутых конструкций из материалов ЛУ-П/ЭНФБ и Т300/Ероху
 Deflection values in the center and a quarter of closed structures made of materials LU-P/ENFB and T300/Eroxy

q , МПа q , МРа	$W((a_1 + a)/2, b/2)$, м		$W(a_1 + (a - a_1)/4, b/4)$, м	
	ЛУ-П/ЭНФБ	Т300/Ероху	ЛУ-П/ЭНФБ	Т300/Ероху
0.5	0.1618	0.1693	0.1381	0.1453
1	0.3230	0.3379	0.2816	0.2962
1.5	0.4823	0.5040	0.4217	0.4436
2	0.6385	0.6675	0.5571	0.5858
2.5	0.7908	0.8420	0.6868	0.7220

Для панели оболочки, выполненной из ортотропного материала Т300/976, была найдена критическая нагрузка потери устойчивости, показана зависимость прогиба от нагрузки, докритическое и закритическое состояние конструкции, а также зависимость напряжения материала от действующей нагрузки.

Для замкнутых оболочек, выполненных из материалов Т300/976, ЛУ-П/ЭНФБ и Т300/Ероху, показаны поля прогибов и напряжений, а также некоторые числовые значения.

Таким образом, было проведено комплексное исследование на устойчивость и прочность оболочечных конструкций, состоящих из ортотропных материалов.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00474).

Библиографический список

1. Hagihara S., Miyazaki N. Bifurcation Buckling Analysis of Conical Roof Shell Subjected to Dynamic Internal Pressure by the Finite Element Method // Journal of Pressure Vessel Technology. 2003. Vol. 125, iss. 1. P. 78–84. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1533801>
2. Krivoschapko S. N. Research on General and Axisymmetric Ellipsoidal Shells Used as Domes, Pressure Vessels, and Tanks // Applied Mechanics Reviews. 2007. Vol. 60, iss. 6. P. 336–355. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2806278>
3. Sosa E. M., Godoy L. A. Challenges in the computation of lower-bound buckling loads for tanks under wind pressures // Thin-Walled Structures. 2010. Vol. 48, iss. 12. P. 935–945. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.06.004>
4. Gavryushin S. S., Nikolaeva A. S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures // Mechanics of Solids. 2016. Vol. 51, iss 3. P. 339–348. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416030110>
5. Solovei N. A., Krivenko O. P., Malygina O. A. Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities // Magazine of Civil Engineering. 2015. Vol. 53, iss. 1. P. 56–69. DOI: <https://doi.org/10.5862/MCE.53.6>
6. Баранова Д. А., Волынин А. Л., Карпов В. В. Сравнительный анализ расчета прочности и устойчивости подкрепленных оболочек на основе ПК оболочка и ПК ANSYS // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 23–27. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-23-27>
7. Karpov V. V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 146. P. 117–135. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024>



8. *Trach V. M.* Stability of conical shells made of composites with one plane of elastic symmetry // *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43, iss. 6. P. 662–669. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0065-z>
9. *Shadmehri F., Hoa S. V., Hojjati M.* Buckling of conical composite shells // *Composite Structures*. 2012. Vol. 94, iss. 2. P. 787–792. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.016>
10. *Gupta A. K., Patel B. P., Nath Y.* Progressive damage of laminated cylindrical/conical panels under meridional compression // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015. Vol. 53. P. 329–341. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.05.013>
11. *Dung D. V., Chan D. Q.* Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT // *Composite Structures*. 2017. Vol. 159. P. 827–841. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.006>
12. *Dung D. V., Hoa L. Kh., Nga N. T., Anh L. T. N.* Instability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells under mechanical loads // *Composite Structures*. 2013. Vol. 106. P. 104–113. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.05.050>
13. *Dai Q., Cao Q.* Parametric instability analysis of truncated conical shells using the Haar wavelet method // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2018. Vol. 105. P. 200–213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.12.004>
14. *Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M. A.* Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded truncated conical curved panels subjected to axial compression // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 318. P. 957–980. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.02.020>
15. *Najafov A. M., Mammadov Z., Kadioglu F., Zerin Z., Sofiyeva A. H., Tekin G.* Nonlinear Behavior of Composite Truncated Conical Shells Subjected to the Dynamic Loading // *Acta Physica Polonica A*. 2015. Vol. 127, № 4. P. 904–906. DOI: <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.127.904>
16. *Sofiyev A. H., Kuruoglu N.* Domains of dynamic instability of FGM conical shells under time dependent periodic loads // *Composite Structures*. 2016. Vol. 136. P. 139–148. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.060>
17. *Sofiyev A. H., Pancar E. B.* The effect of heterogeneity on the parametric instability of axially excited orthotropic conical shells // *Thin-Walled Structures*. 2017. Vol. 115. P. 240–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.02.023>
18. *Krysko V. A., Awrejcewicz J., Shchekaturova T. V.* Chaotic vibrations of spherical and conical axially symmetric shells // *Archive of Applied Mechanics*. 2005. Vol. 74, iss. 5–6. P. 338–358. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02637035>
19. *Patel B. P., Khan K., Nath Y.* A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels // *Composite Structures*. 2014. Vol. 110. P. 183–191. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.008>
20. *Qu Y., Chen Y., Long X., Hua H., Meng G.* A modified variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical shell combinations // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2013. Vol. 37. P. 200–215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.06.006>
21. *Shul'ga N. A., Bogdanov S. Yu.* Forced Axisymmetric Nonlinear Vibrations of Reinforced Conical Shells // *International Applied Mechanics*. 2003. Vol. 39, iss. 12. P. 1447–1451. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000020829.56530.22>
22. *Demir Ç., Mercan K., Civalek Ö.* Determination of critical buckling loads of isotropic, FGM and laminated truncated conical panel // *Composites Part B : Engineering*. 2016. Vol. 94. P. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.03.031>
23. *Khan A. H., Patel B. P.* On the nonlinear dynamics of bimodular laminated composite conical panels // *Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 79, iss. 2. P. 1495–1509. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1756-8>



24. *Zerin Z.* The effect of non-homogeneity on the stability of laminated orthotropic conical shells subjected to hydrostatic pressure // *Structural Engineering and Mechanics*. 2012. Vol. 43, № 1. P. 89–103. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2012.43.1.089>
25. *Hao Y. X., Yang S. W., Zhang W., Yao M. H., Wang A. W.* Flutter of high-dimension nonlinear system for a FGM truncated conical shell // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2018. Vol. 25, iss. 1. P. 47–61. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1255815>
26. *Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S.* Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // *International Applied Mechanics*. 2012. Vol. 48, iss. 6. P. 613–687. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8>
27. *Sankar A., Natarajan S., Merzouki T., Ganapathi M.* Nonlinear Dynamic Thermal Buckling of Sandwich Spherical and Conical Shells with CNT Reinforced Facesheets // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016. P. 1750100. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455417501000>
28. *Watts G., Singha M. K., Pradyumna S.* Nonlinear bending and snap-through instability analyses of conical shell panels using element free Galerkin method // *Thin-Walled Structures*. 2018. Vol. 122. P. 452–462. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.10.027>
29. *Semenov A. A.* Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // *Thin-Walled Structures*. 2016. Vol. 106. P. 428–436. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
30. *Семенов А. А.* Анализ прочности оболочечных конструкций из современных материалов в соответствии с различными критериями прочности // *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2018. № 1. P. 16–33. DOI: <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2018.1.016-033>
31. *Смердов А. А., Буянов И. А., Чуднов И. В.* Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // *Изв. вузов. Машиностроение*. 2012. № 8. С. 70–77. DOI: <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2012-8-70-77>
32. *Цепенников М. В., Повышев И. А., Сметанников О. Ю.* Верификация численной методики расчета разрушения конструкций из композиционных материалов // *Вестн. ПНИПУ. Прикладная математика и механика*. 2012. № 10. P. 225–241.

Образец для цитирования:

Лапина Е. О., Семенов А. А. Исследование прочности и устойчивости ортотропных конических оболочек и конических панелей // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 79–92. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-79-92>

Investigation of Strength and Buckling of Orthotropic Conical Shells and Conical Panels

E. O. Lapina, A. A. Semenov

Elena O. Lapina, <https://orcid.org/0000-0002-2835-7728>, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4 Vtoraya Krasnoarmeiskaya St., Saint Petersburg 190005, Russia, lapina.eo@mail.ru

Alexey A. Semenov, <https://orcid.org/0000-0001-9490-7364>, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4 Vtoraya Krasnoarmeiskaya St., Saint Petersburg 190005, Russia, sw.semenov@gmail.com



In the construction, thin-walled shell structures are used to cover the buildings of large areas, such as stadiums, hangars, circuses, airports. In this paper, the strength and buckling of closed conical shells as well as their panels are studied. The geometric nonlinearity and transverse shifts are taken into account. A mathematical model is used in the form of a functional of the total potential energy of deformation. Also expressions for deformations, forces and moments are given. The calculation program is implemented in the MatLab environment. The algorithm is based on the Ritz method and Newton's method for solving a system of nonlinear algebraic equations. Variants of approximating functions for a closed shell and for its panel are shown. The values of critical loads are found, the dependence of the deflection on the load, the dependence of the stresses on the load is obtained, and the deflection field is shown at the subcritical and at the supercritical moment. The fields of various stress components are given at the moment when the strength conditions begin to fail. The orthotropy of the material is taken into account.

Keywords: shells, conical panels, buckling, strength, orthotropy, geometric nonlinearity.

Received: 23.02.2019 / Accepted: 29.03.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00474).

References

1. Hagihara S., Miyazaki N. Bifurcation Buckling Analysis of Conical Roof Shell Subjected to Dynamic Internal Pressure by the Finite Element Method. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2003, vol. 125, iss. 1, pp. 78–84. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1533801>
2. Krivoshapko S. N. Research on General and Axisymmetric Ellipsoidal Shells Used as Domes, Pressure Vessels, and Tanks. *Applied Mechanics Reviews*, 2007, vol. 60, iss. 6, pp. 336–355. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2806278>
3. Sosa E. M., Godoy L. A. Challenges in the computation of lower-bound buckling loads for tanks under wind pressures. *Thin-Walled Structures*, 2010, vol. 48, iss. 12, pp. 935–945. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.06.004>
4. Gavryushin S. S., Nikolaeva A. S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, iss. 3, pp. 339–348. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416030110>
5. Solovei N. A., Krivenko O. P., Malygina O. A. Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities. *Magazine of Civil Engineering*, 2015, vol. 53, iss. 1, pp. 56–69. DOI: <https://doi.org/10.5862/MCE.53.6>
6. Baranova D. A., Volynin A. L., Karpov V. V. The Comparative Analysis of Calculation of Durability and Stability of the Supported Shells on the Basis of the PC OBOLOCHKA and PC ANSYS. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 23–27 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-23-27>
7. Karpov V. V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 146, pp. 117–135. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024>
8. Trach V. M. Stability of conical shells made of composites with one plane of elastic symmetry. *International Applied Mechanics*, 2007, vol. 43, iss. 6, pp. 662–669. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0065-z>
9. Shadmehri F., Hoa S. V., Hojjati M. Buckling of conical composite shells. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, iss. 2, pp. 787–792. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.016>
10. Gupta A. K., Patel B. P., Nath Y. Progressive damage of laminated cylindrical/conical



- panels under meridional compression. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2015, vol. 53, pp. 329–341. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.05.013>
11. Dung D. V., Chan D. Q. Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT. *Composite Structures*, 2017, vol. 159, pp. 827–841. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.006>
 12. Dung D. V., Hoa L. Kh, Nga N. T., Anh L. T. N. Instability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells under mechanical loads. *Composite Structures*, 2013, vol. 106, pp. 104–113. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.05.050>
 13. Dai Q., Cao Q. Parametric instability analysis of truncated conical shells using the Haar wavelet method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, vol. 105, pp. 200–213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.12.004>
 14. Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M. A. Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded truncated conical curved panels subjected to axial compression. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, vol. 318, pp. 957–980. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.02.020>
 15. Najafov A. M., Mammadov Z., Kadioglu F., Zerin Z., Sofiyev A. H., Tekin G. Nonlinear Behavior of Composite Truncated Conical Shells Subjected to the Dynamic Loading. *Acta Physica Polonica A*, 2015, vol. 127, no. 4, pp. 904–906. DOI: <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.127.904>
 16. Sofiyev A. H., Kuruoglu N. Domains of dynamic instability of FGM conical shells under time dependent periodic loads. *Composite Structures*, 2016, vol. 136, pp. 139–148. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.060>
 17. Sofiyev A. H., Pancar E. B. The effect of heterogeneity on the parametric instability of axially excited orthotropic conical shells. *Thin-Walled Structures*, 2017, vol. 115, pp. 240–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.02.023>
 18. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Shchekaturova T. V. Chaotic vibrations of spherical and conical axially symmetric shells. *Archive of Applied Mechanics*, 2005, vol. 74, iss. 5–6, pp. 338–358. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02637035>
 19. Patel B. P., Khan K., Nath Y. A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels. *Composite Structures*, 2014, vol. 110, pp. 183–191. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.008>
 20. Qu Y., Chen Y., Long X., Hua H., Meng G. A modified variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical shell combinations. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2013, vol. 37, pp. 200–215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.06.006>
 21. Shul'ga N. A., Bogdanov S. Yu. Forced Axisymmetric Nonlinear Vibrations of Reinforced Conical Shells. *International Applied Mechanics*, 2003, vol. 39, iss. 12, pp. 1447–1451. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000020829.56530.22>
 22. Demir Ç., Mercan K., Civalek Ö, Determination of critical buckling loads of isotropic, FGM and laminated truncated conical panel. *Composites Part B: Engineering*, 2016, vol. 94, pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.03.031>
 23. Khan A. H., Patel B. P. On the nonlinear dynamics of bimodular laminated composite conical panels. *Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 79, iss. 2, pp. 1495–1509. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1756-8>
 24. Zerin Z. The effect of non-homogeneity on the stability of laminated orthotropic conical shells subjected to hydrostatic pressure. *Structural Engineering and Mechanics*, 2012, vol. 43, no. 1, pp. 89–103. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2012.43.1.089>
 25. Hao Y. X., Yang S. W., Zhang W., Yao M. H., Wang A. W. Flutter of high-dimension nonlinear system for a FGM truncated conical shell. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2018, vol. 25, iss. 1, pp. 47–61. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1255815>
 26. Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Variational finite-difference me-



- thods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). *International Applied Mechanics*, 2012, vol. 48, iss. 6, pp. 613–687. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8>
27. Sankar A., Natarajan S., Merzouki T., Ganapathi M. Nonlinear Dynamic Thermal Buckling of Sandwich Spherical and Conical Shells with CNT Reinforced Facesheets. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2016, pp. 1750100. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455417501000>
28. Watts G., Singha M. K., Pradyumna S. Nonlinear bending and snap-through instability analyses of conical shell panels using element free Galerkin method. *Thin-Walled Structures*, 2018, vol. 122, pp. 452–462. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.10.027>
29. Semenov A. A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures. *Thin-Walled Structures*, 2016, vol. 106, pp. 428–436. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
30. Semenov A. A. Analysis of the strength of shell structures, made from modern materials, according to various strength criteria. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2018, iss. 1, pp. 16–33. DOI: <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2018.1.016-033>
31. Smerdov A. A., Buyanov I. A., Chudnov I. V. Analysis of optimal combinations of requirements to developed CFRP for large space-rocket designs. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2012, no. 8, pp. 70–77 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2012-8-70-77>
32. Tsepennikov M. V., Povyshev I. A., Smetannikov O. Yu. Verification of numerical technique for composite structures failure modeling. *Vestnik PNIPU. Prikladnaia matematika i mekhanika* [Perm National Research Polytechnic University Bulletin. Applied Mathematics and Mechanics], 2012, no. 10, pp. 225–241 (in Russian).

Cite this article as:

Lapina E. O., Semenov A. A. Investigation of Strength and Buckling of Orthotropic Conical Shells and Conical Panels. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 79–92 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-79-92>
