УДК 517.538.7

ДИСКИ ЗИГЕЛЯ И БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ СЕМЕЙСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

П.А. Гуменюк

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: gumenuk@sgu.ru

Пусть $\mathfrak{U} \ni 0$ – гиперболическая область, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, Δ – угол Штольца в точке $\lambda_0 := e^{2\pi i\alpha}$ для единичного круга D, и W – область, содержащая точку λ_0. Пусть $f: W\times\mathfrak{U} \to \mathbb{C}$; $(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$ – аналитическое семейство функций f_l, аналитических в области U и имеющих при достаточно малых z разложение $f_\lambda(z) = \lambda z + a_2(\lambda)z^2 +$, $\lambda \in W$, и пусть $\mathcal{A}^*(0, f_\lambda, \mathfrak{U})$ – максимальная из областей $A \subset U$ таких, что $0 \in A$ и $f_l(A) \subset A$, или множество {0}, если таких областей не существует. Показано, что если последовательность $\{\lambda_n \in W \cap \Delta\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к λ_0 и $S := \mathcal{A}^*(0, f_{\lambda_0}, \mathfrak{U}) \neq \{0\}$, то последовательность областей $\mathcal{A}^*(0, f_{\lambda_n}, \mathfrak{U})$ сходится к S как к ядру. Рассмотрен пример, показывающий, что аналогичное утверждение для сходимости по метрике Хаусдорфа неверно. В случае $\bar{S} \subset \mathfrak{U}$ получена асимптотическая оценка размера окрестности V = V (K) точки λ_0 такой, что заданный компакт $K \subset S$ лежит в A* (0, f_l, U) для всех $\lambda \in V \cap \Delta$.

Siegel disks and basins of attraction for families of analytic functions

P.A. Gumenuk

Let $\mathfrak{U} \ni 0$ be a hyperbolic domain, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, let Δ be a Stolz angle at $\lambda_0 := e^{2\pi i\alpha}$ with respect to the unit disk D, and W a domain containing the point λ_0. Consider an analytic family $f: W\times\mathfrak{U} \to \mathbb{C}$; $(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$ consisting of analytic functions in the domain U with the following expansion $f_\lambda(z) = \lambda z + a_2(\lambda)z^2 +$, $\lambda \in$ W, for small z. Let $\mathcal{A}^*(0, f_\lambda, \mathfrak{U})$ be the maximal domain $A \subset U$, such that $0 \in A$ and $f_l(A) \subset A$, or the set {0} if there exist no such domains. We prove, that if a sequence $\{\lambda_n \in W \cap \Delta\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to λ_0 and $S := \mathcal{A}^*(0, f_{\lambda_0}, \mathfrak{U}) \neq \{0\}$, then the sequence of the domains $\mathcal{A}^*(0, f_{\lambda_n}, \mathfrak{U})$ converges to S as to the kernel. An example shows, that the analogous statement for convergence with respect to the Hausdorff metric does not hold. In the case $\bar{S} \subset \mathfrak{U}$ we obtain an asymptotic estimate for the size of the neighbourhood V = V (K) of the point λ_0, such that a given compact $K \subset S$ lies in A* (0, f_l, U) for all $\lambda \in V \cap \Delta$.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{D} \in \{\bar{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}\}$ и $f: D \to D$ – мероморфная функция, отличная от постоянной и не являющаяся автоморфизмом области D. Обозначим через Z множество всех целых чисел, и пусть $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Итерации $f^n : D \to D$, $n \in N$, функции f определяются рекуррентно:

$$f^1 := f, \quad f^{n+1} := f \circ f^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Одной из главных задач комплексной динамики является изучение асимптотического поведения последовательности итераций $\{f^n\}_{n \in N}$. В связи с этим отправной точкой исследований по комплексной динамике является деление области D на множество нормальности и его дополнение.

Определение 1. Множеством Фату F (f) функции f называется множество всех точек z Î D, в которых последовательность $\{f^n\}_{n Î N}$ образует нормальное семейство. Дополнение множества Фату J(f): = D\F(f) называется множеством Жюлиа функции f.

Одними из наиболее важных и глубоко изученных объектов в комплексной динамике являются неподвижные точки.

Определение 2. Точка z_0 Î D называется неподвижной точкой функции f, если f $(z_0) = z_0$. Число

$$\lambda := \begin{cases} f'(z_0), & \text{если } z_0 \neq \infty, \\ g'(0), & \text{если } z_0 = \infty, \end{cases}$$

где $g(w) := 1/f(1/w)$, называется мультипликатором неподвижной точки z_0. Если |l| < 1 (l = 0, |l| = 1, |l| > 1), то неподвижная точка z_0 называется притягивающей (суперпритягивающей, нейтральной, отталкивающей, соответственно).

Если $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$, a Î Q, то нейтральная неподвижная точка z_0 называется рационально нейтральной или параболической. В противном случае (то есть при a Î R\Q) нейтральная неподвижная точка называется иррационально нейтральной.

Притягивающие неподвижные точки, не являющиеся суперпритягивающими, называются геометрически притягивающими неподвижными точками.

Для изучения поведения последовательности итераций вблизи неподвижной точки большую роль играет существование *локальной замены переменного*, приводящей функцию f к нормальной (канонической) форме.

Определение 3. Говорят, что функция f *линеаризуема* в неподвижной точке z_0, если при l: = f ¢(z_0) функциональное уравнение Шредера

$$\varphi \circ f = \lambda\varphi \tag{2}$$

имеет нетривиальное (т.е. отличное от тождественного нуля) решение j, аналитическое в некоторой окрестности точки z_0. При этом точку z_0 будем называть *линеаризуемой* (для функции f). Если же f не является *линеаризуемой* в неподвижной точке z_0, то будем говорить, что точка z_0 нелинеаризуемая.

Замечание 1. Известно (см., например, [1, с. 97–166]), что отталкивающие и геометрически притягивающие неподвижные точки всегда *линеаризуемы*, а параболические и суперпритягивающие – всегда нелинеаризуемы. При этом притягивающие неподвижные точки лежат в множестве Фату F(f), а отталкивающие и параболические – в множестве Жюлиа J(f).

Если иррационально нейтральная неподвижная точка z_0 лежит в множестве Фату F(f), то она *линеаризуема*. В этом случае она называется точкой Зигеля. Если же z_0 Î J(f), то она является нелинеаризуемой и называется точкой Кремера.

Определение 4. Пусть z_0 Î F(f) – неподвижная точка функции f. Непосредственным бассейном A*(z_0, f) неподвижной точки z_0 называется компонента связности множества Фату F(f) , содержащая точку z_0. Бассейном A(z_0, f) неподвижной точки z_0 называется множество всех точек z Î F(f) таких, что $f^n(z)$ Î A*(z_0, f) для некоторого n Î N. Непосредственный бассейн точки Зигеля z_0 называется диском Зигеля, а сама точка z_0 – его центром.

Замечание 2. Известно (см., например, [2]), что диск Зигеля S конформно изоморфен единичному кругу D: = {z : |z| <1}, причем если z_0 – его центр, то аналитическая функция j, j(z_0) = = 0, j¢(z_0) > 0, конформно отображающая S на D, удовлетворяет уравнению Шредера (2) при l: = f ¢(z_0). В частности, функция f однолистна в S.

Более подробное изложение основных определений и результатов комплексной динамики может быть найдено в монографиях [1, 3, 4] и обзорных статьях [5, 6]. Для наших же дальнейших рассуждений необходимо рассмотреть несколько более общий случай. Пусть U ⊂ D – некоторая область, и $f : U \to D$ – мероморфная функция. Заметим, что при этом не делается никаких предположений о том, определена ли функция f в точках $z \in D \setminus U$. В силу этого, области определения итераций f^n, $n \in N$, могут отличаться от области определения функции f и в общем случае будут зависеть от n. Говоря строго, это означает, что рекуррентное соотношение (1) заменяется следующим:

$$f^1 : \mathfrak{U} \to \overline{\mathbb{C}}, \quad f^1 := f,$$
$$f^{n+1} : (f^n)^{-1}(\mathfrak{U}) \to \mathbb{C}, \quad f^{n+1} := \overline{f} \circ f^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Таким образом, общепринятое определение 1 множеств Фату и Жюлиа в данном случае нуждается в замене. Введем обозначение

$$E(f, \mathfrak{U}) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^n)^{-1}(\mathfrak{U}).$$

Определение 5. Множеством Фату $F(f, U)$ функции f (относительно области U) будем называть множество всех точек $z \in U$, для которых существует открытая связная окрестность U_z, удовлетворяющая следующим двум условиям:

(i) для каждого $n \in N$ функция f^n определена в U_z, то есть $U_z \subset E(f, U)$;

(ii) последовательность $\{f^n\}_{n \in N}$ образует нормальное семейство в области U_z.

Дополнение множества Фату $J(f, U) := U \setminus F(f, U)$ будем называть множеством Жюлиа функции f (относительно области U).

С заменой $F(f)$, $J(f)$, D на $F(f, U)$, $J(f, U)$, U соответственно, определения 2 и 3 сохраняют корректность, а замечания 1 и 2 – справедливость. Так как одна и та же функция $f : D \to D$ может рассматриваться и как отображение из D в D, и как отображение из $U \neq D$ в D, то во втором случае вместо $A^*(z_0, f)$ и $A(z_0, f)$ будем писать $A^*(z_0, f, U)$ и $A(z_0, f, U)$, соответственно, указывая явно область U, так же как в обозначении множеств Фату и Жюлиа.

Случай, когда $U := C$, $\mathfrak{D} := \overline{\mathbb{C}}$ и f – трансцендентная мероморфная функция, рассмотрен в [7].

В данной работе будет рассматриваться случай, когда U – гиперболическая область и $f : U \to C$ – аналитическая функция.

Определение 6. Область U называется гиперболической, если ее дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{U}$ содержит по крайней мере три попарно различные точки.

Замечание 3. Из Определения 5 вытекает, что множество Фату $F(f, U)$ открыто, а множество Жюлиа $J(f, U)$ замкнуто относительно U. Условие (i) в этом определении в частности означает, что $f^n(U_z) \subset U$ для всех $n \in N$. Поэтому в силу признака Монтеля (см., например, [8, с. 68–70]) условие (i) влечет выполнение условия (ii), если область U является гиперболической. Следовательно, в этом случае множество Фату $F(f, U)$ совпадает с внутренностью $\mathrm{int}(E(f, U))$ множества $E(f, U)$.

1.2. Основные результаты

Пусть U – гиперболическая область. Не умаляя общности, будем предполагать, что $0 \in U \subset C$. Пусть α – иррациональное действительное число, D – угол Штольца в точке $\lambda_0 := e^{2\pi i\alpha}$ для единичного круга D и W – область, содержащая точку λ_0. Рассмотрим аналитическое семейство $f_\lambda(z) = \lambda z + a_2(\lambda)z^2 + \dots$; $(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$ функций[1] f_λ, аналитических в области U и имеющих при достаточно малых z разложение $f_\lambda(z) = \lambda z + a_2(\lambda)z^2 + \dots$, $\lambda \in W$. Таким образом, для каждого $\lambda \in W$ точка $z = 0$ является неподвижной точкой функции f_λ с мультипликатором, равным λ. Предположим, что $z = 0$ является точкой Зигеля функции f_{λ_0}. Тогда $0 \in F(f, U)$ при всех $\lambda \in W_0 := W \cap \Delta$ и при $\lambda = \lambda_0$. Возникает вопрос, можно ли утверждать, что последовательность областей $A^*(0, f_{\lambda_n}, \mathfrak{U})$ сходится, в том или ином смысле, к области $S := A^*(0, f_{\lambda_0}, \mathfrak{U})$, если последовательность λ_n лежит в

[1] Использование термина «аналитическое семейство функций» означает, что отображение $(\lambda, z) \mapsto f_\lambda(z)$ является аналитическим в $W \times U$ по совокупности переменных.

W_0 и сходится к l_0. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $l_n \in W_0$ для всех $n \in N$ и $l_n \to l_0$ при $n \to +\infty$. Тогда последовательность областей $\mathcal{A}^*(0, f_{\lambda_n}, \mathfrak{U})$ сходится к области S как к ядру.

Основой доказательства теоремы 1 служит следующее утверждение, для формулировки которого необходимо ввести некоторые обозначения.

Для $r \in [0,1)$ положим $S_r := \psi(rD)$. Здесь и далее ψ — конформное отображение единичного круга D на диск Зигеля $S \ni 0$ функции f_{l_0}, удовлетворяющее условиям нормировки $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) > 0$. Через L_r обозначим границу множества S_r. Далее, пусть U — некоторая область, содержащая точку $z = 0$. Положим $r(U) := \max\{r \in [0,1] : S_r \subset U\}$ Через $D(w_0, r)$ будем обозначать открытый круг $\{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \rho\}$, через dist (x,x) — евклидово расстояние в плоскости C, а через $\overline{X}, X \subset \mathbb{C}$, — замыкание множества X.

Предложение 1. Имеет место равенство

$$\lim_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda \in W_0}} r(\mathcal{A}^*(0, f_\lambda, \mathfrak{U})) = 1. \tag{4}$$

Замечание 4. Если функция f_{l_0} отлична от дробно-линейной, то условие гиперболичности области U в предложении 1 можно опустить. Действительно, из включения $S \subset U$ следует, что $\mathcal{A}^*(0, f_\lambda, S) \subset \mathcal{A}^*(0, f_\lambda, \mathfrak{U})$. Так как, согласно замечанию 2, функция f_{l_0} однолистна в S, то область S необходимо является гиперболической. Таким образом, применение предложения 1 для семейства $f : W \times S \to \mathbb{C}; (\lambda, z) \mapsto (f_\lambda)|_S(z)$ дает требуемый вывод.

В работе [9] приведено доказательство Предложения 1 для случая, когда $U := C$ и число a является диофантовым, то есть существуют $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$ такие, что $|a - p/q| > e/q^\kappa$ для любых взаимно простых $p \in Z$, $q \in N$. В данной работе используется иной метод доказательства, позволяющий избежать каких-либо условий на иррациональное число a. Более того, для гиперболических областей U получена количественная версия предложения 1, дающая в случае $\overline{S} \subset \mathfrak{U}$ оценку сверху порядка малости функции $\varepsilon(r)$ такой, что $r(\mathcal{A}^*(0, f_\lambda, \mathfrak{U})) \geqslant r$ при всех $\lambda \in W_0 \cap D(\lambda_0, \varepsilon(r))$ и $r \in [0,1]$. Результат оказывается сильно зависящим от свойств числа a.

Предположим, что задана последовательность $\{\alpha_n\}_{n \in N_0}$, $a_0 \in Z$, $a_n \in N$, $n \in N$. Определим последовательности $\{p_n\}_{n \in N_0}$, $\{q_n\}_{n \in N_0}$ следующими соотношениями: $p_0 := a_0$, $q_0 := 1$, $p_1 := a_0a_1 + 1$, $q_1 := a_1$, $p_{n+1} = p_n\alpha_{n+1} + p_{n-1}$, $q_{n+1} = q_n\alpha_{n+1} + q_{n-1}$. Известно (см., например, [10, с. 210–216]), что дроби p_n/q_n несократимы и стремятся при $n \to +\infty$ к некоторому иррациональному числу b, и наоборот, для всякого $b \in R\backslash Q$ найдется, причём единственная, последовательность $\{\alpha_n\}_{n \in N_0}$, $a_0 \in Z$, $a_n \in N$, $n \in N$, такая, что $\lim_{n \to +\infty} p_n/q_n = b$. Дроби p_n/q_n называются при этом подходящими дробями числа b. Таким образом, каждому иррациональному числу b ставится в соответствие последовательность $\{q_n(b)\}_{n \in N_0}$ знаменателей его подходящих дробей. В дальнейшем, если не оговорено иного, под q_n будем понимать $q_n(a)$.

Так как $q_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, то для всякого $x > 0$ существуют $n \in N$ такие, что $2q_nq_{n+1}/(q_n + q_{n-1}) \geqslant x$. Наименьшее из них обозначим через $n_0(x)$, и пусть $\ell(x) = q_{n_0(x)}$.

Теорема 2. Пусть $\overline{S} \subset \mathfrak{U}$. Тогда существует постоянная $C > 0$ и функция $\varepsilon: [0,1] \to (0,+\infty)$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $r(\mathcal{A}^*(0, f_\lambda, \mathfrak{U})) \geqslant r$ при всех $\lambda \in W_0 \cap D(\lambda_0, \varepsilon(r))$ и $r \in [0,1)$.

(ii) $\varepsilon(r) \geqslant C(1-r)^3/\ell((1-r)^{-1.601})$ при всех $r \in (0,1)$.

В явном виде функция $\varepsilon(r)$ определена в доказательстве теоремы 2.

Замечание 5. Известно [11, с. 107, следствие 7.6); 12], что отображение $P \mapsto K(P) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{A}(\infty, P)$ множества P_d многочленов фиксированной степени $d > 1$ в множество компактов на плоскости C является непрерывным относительно метрики Хаусдорфа

$$d_H(X,Y) := \max\{\partial(X,Y), \partial(Y,X)\}, \quad \partial(X,Y) := \sup_{z \in X} \inf_{w \in Y} |z - w|,$$

в точке $P_0 \in P_d$, если ни одна из функций P_0^n, $n \in N$, не имеет в C параболических неподвижных точек.

Это замечание позволяет построить пример, доказывающий следующую теорему.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 $U := D$ и α удовлетворяет условию Брюно

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty. \tag{5}$$

Тогда существует семейство $f := f^*. W \times \mathfrak{U} \to \mathbb{C}$ такое, что для всякой последовательности $\{\lambda_n \in W_0\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящейся к λ_0, последовательность областей $\mathcal{A}^*(0, f_{\lambda_n}, \mathfrak{U})$ не сходится к области S по метрике d_H.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 2 и 3

2.1. Основная лемма

Теоремы 1 и 2 являются следствиями леммы, для формулировки которой необходимо ввести некоторые обозначения.

Пусть ω_r, $r \in (0,1)$, — нормированный модуль непрерывности семейства $\{f_\lambda\}_{\lambda\in W}$ по параметру в точке λ_0, определяемый следующим образом:

$$\omega_r(\delta) := \frac{1}{r}\sup\{|f_\lambda(z) - f_{\lambda_0}(z)| : z \in S_r, \lambda \in W \cap \mathrm{D}(\lambda_0, \delta)\}, \quad \delta > 0.$$

При каждом фиксированном $r \in (0,1)$ функция ω_r определена и непрерывна на интервале $I^* := (0, \delta^*)$, где $\delta^* := \mathrm{dist}\,(\lambda_0, \partial W)$. Кроме того, она возрастает на I^*, причем $\lim_{\delta\to+0}\omega_r(\delta) = 0$. Поэтому существует обратная функция ω_r^{-1}, определенная на интервале $(0, \varepsilon^*)$, где $\varepsilon^* := \lim_{\delta\to\delta^*-0} \omega_r(\delta)$. Если $\varepsilon^* \neq +\infty$, то будем полагать $\omega_r^{-1}(\varepsilon)$ равной δ^* при всех $\varepsilon \geqslant \varepsilon^*$.

Пусть $\beta \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Известно (см., напр.: [13, с. 97, 102–103, 108]), что последовательность $\{x_n := \{\alpha n + \beta\}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа, является равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$, и поэтому последовательность функций $\{F_{\beta,N}\}_{N\in\mathbb{N}}$,

$$F_{\beta,N}(x) := \sum_{\substack{x_n < x \\ 0\leqslant n<N}} \frac{1}{N}, \quad x \in [0,1],$$

сходится при $N\to+\infty$ равномерно на $[0, 1]$ к тождественной функции $F(x) = x$. Более того, справедлива следующая теорема (см., например, [13, с. 55–62]).

Теорема А. Пусть ϕ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$ функция. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ справедливо следующее неравенство:

$$\left|\int_0^1 \phi(x)dx - \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\phi(x_n)\right| < Q_{\beta,N}\int_0^1 |\phi'(x)|dx, \quad Q_{\beta,N} := \sup_{x\in[0,1]}\left|F_{\beta,N}(x) - x\right|. \tag{6}$$

Пусть $r_0 \in (0,1)$ — фиксированное число. Обозначим

$$k_r(z) = \frac{z}{(1+z)^2}, \quad u(z) = \frac{\partial f_\lambda(z)}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad H(\xi) := 1 + \frac{\xi\psi''(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

$$J(t) := \frac{u'(\psi(\xi))\psi'(\xi) - u(\psi(\xi))H(\xi)}{\lambda_0\xi\psi'(\lambda_0\xi)}$$

Для $\tau \in (0, -\log r_0)$ и $N \in \mathbb{N}$ положим

$$Q_N := \inf_{\beta\in\mathbb{R}} Q_{\beta,N}, \quad a_N := 2\pi Q_N\int_0^1 |J(t)|\,dt,$$

$$\Lambda_N(\tau, \theta, \varepsilon) := \frac{\sqrt{1 + 2b^2\cos 2\vartheta + b^4} - 1 + b^2}{2b\cos\vartheta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0,$$

где $\vartheta := \theta + \arcsin a_N$, $b = \pi\varepsilon N(1 - a_N)/(4\tau)$,

$$\varepsilon_N(\tau) := \omega_{r_*}^{-1}(1 - k_\pi(r_*)/k_\pi(r^*)), \quad r_* := r_0 e^{\tau(1-1/N)}, \; r^* := r_0 e^{\tau}.$$

Определение 7. Множество U ⊂ U называется инвариантным вперед относительно функции f_λ, если $f_\lambda(U) \subset U$.

Замечание 6. Согласно замечанию 3, каждая инвариантная вперед область U ⊂ U лежит в одной из компонент связности множества Фату F(f, U). В частности, если при этом 0 Î U, то U ⊂ A*(0, f, U).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть числа N Î N и $\tau \in (0, -\log r_0)$ удовлетворяют следующим двум условиям:

(i) $a_n < 1$;

(ii) $\arcsin a_N + \vartheta < \pi/2$,

где θ обозначает полураствор угла Штольца Δ. Тогда при всех $\lambda \in \Delta \cap \mathrm{D}(\lambda_0, \varepsilon_*)$, $\varepsilon_* = \varepsilon_N(\tau)\Lambda_N(\tau, \vartheta, \varepsilon_N(\tau))$, область S_{r0} является инвариантной вперед относительно функции f_λ^N.

2.2. Доказательство леммы 1

Доказательство леммы 1 проводится по следующей схеме. Основным элементом доказательства является исследование функции $s_N(\lambda) = s_N(z_0, \lambda) := \varphi(f_\lambda^N(z_0))$, N Î N, при фиксированном z_0 Î L_{r0}. На первом этапе выясняется размер окрестности точки λ_0, в которой функция аналитична и принимает значения в заданной области вида $\{\xi : \rho_1 < |\xi| < \rho_2\}$. Соответствующее утверждение сформулировано в виде леммы 2. Затем рассматривается логарифмическая производная функции $s_N(\lambda)$, значение которой в точке λ_0 может быть, согласно лемме 3, выражено как

$$A_N(z_0) = \frac{s_N'(\lambda_0)}{s_N(\lambda_0)} = \sum_{k=0}^{N-1} G(\lambda_0^k \varphi(z_0)),$$

где функция G аналитична в D и определяется семейством $\{f_\lambda\}_{l\,Î\,W}$, точкой λ_0, а также выбором z_0 Î L_{r0}. Равенство $\int_0^1 G(e^{2\pi i t}\varphi(z_0))\,dt = 1/\lambda_0$ позволяет применить теорему A для оценки $|A_N(z_0)|$ и $|\arg A_N(z_0)|$, что в свою очередь, вследствие предложения 2, приводит при $\lambda \in \Delta \cap \mathrm{D}(\lambda_0, \varepsilon_*)$ к неравенству $|s_N(\lambda)| \leqslant |\varphi(z_0)|$. Последнее справедливо для всех z_0 Î L_{r0} и поэтому означает, что $f_\lambda^N(S_{r_0}) \subset S_{r_0}$ при указанных значениях λ.

Лемма 2. В условиях леммы 1 функция $s_N(z, \lambda) := \varphi(f_\lambda^N(z))$ определена, аналитична при всех $z \in \overline{S_{r_*}}$ и $\lambda \in \mathrm{D}(\lambda_0, \varepsilon_N(\tau))$ и удовлетворяет неравенству

$$r_0 e^{-\tau} < |s_N(z, \lambda)| < r_0 e^{\tau}, \quad z \in \mathcal{L}_{r_0}, \; \lambda \in \mathrm{D}(\lambda_0, \varepsilon_N(\tau)), \tag{7}$$

Доказательство. В первую очередь заметим, что из определения функции $\omega_{r_*}^{-1}$ следует, что $\mathrm{D}(\lambda_0, \varepsilon_N(\tau)) \subset W$. Будем далее по доказательству учитывать это обстоятельство без дополнительных пояснений.

Покажем, что для любых r_1 Î (0,1), r_2 Î $(r_1,1)$, имеет место включение

$$B(z_0, r_1, r_2) := \{z : |z - z_0| < |z_0|(1 - k_\pi(r_1)/k_\pi(r_2))\} \subset S_{r_2} \setminus \overline{S_{r_1}}, \quad z_0 \in \mathcal{L}_{r_1}, \tag{8}$$

где $r_3 := r_1^2/r_2$. Для этого заметим, что вместе со всякой точкой z_0 Î L_{r1} области $S_{r_2} \setminus \overline{S_{r_1}}$ принадлежат также все точки z, удовлетворяющие условию[2]

$$|\log(z/z_0)| < \log(k_\pi(r_2)/k_\pi(r_1)). \tag{9}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно применить к функции ψ следующую оценку из теории однолистных функций (см. например, [8, с. 117]):

$$\left|\log \frac{z\psi'(z)}{\psi(z)}\right| \leqslant \log \frac{1+|z|}{1-|z|}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{10}$$

в силу которой для любой спрямляемой кривой $\Gamma \subset \overline{S_{r_2}} \setminus S_{r_3}$, соединяющей точку z_0 с контуром L_{r2} или L_{r3},

$$\int_\Gamma \left|\frac{dz}{z}\right| = \int_{\varphi(\Gamma)} \left|\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}\right| |d\xi| \geqslant \int_{\varphi(\Gamma)} \left|\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)}\right| d\,|\xi| \geqslant \min\left\{\int_{r_1}^{r_2} \frac{(1-r)\,dr}{(1+r)r}, \int_{r_3}^{r_1} \frac{(1-r)\,dr}{(1+r)r}\right\} = \log(k_\pi(r_2)/k_\pi(r_1)).$$

Используя неравенство $|\log(1+\xi)| \leqslant -\log(1-|\xi|),\ \xi \in \mathbb{D}$, убеждаемся, что если z Î $B(z_0, r_1, r_2)$, то

$$|\log(z/z_0)| = |\log(1+(z-z_0)/z_0)| \leqslant -\log(1-|z-z_0|/|z_0|) < \log(k_\pi(r_2)/k_\pi(r_1)),$$

то есть для z Î $B(z_0, r_1, r_2)$ выполняется условие (9), что и доказывает включение (8).

Пусть r Î $(0, e^{-\tau/N})$. Обозначим $r' := re^{\tau/N}$, $r'' := re^{-\tau/N}$. Рассмотрим произвольную функцию h, аналитическую в S и удовлетворяющую условиям $h(0) = 0$ и $|h(z) - z| < r(1-k_\pi(r)/k_\pi(r'))$ при всех $z \in \overline{S_r}$. В силу включения (8) для $r_1 := |z_0|$, $r_2 := |z_0|e^{\tau/N}$, z_0 Î L_r,

$$h(L_r) \subset S_{r'} \setminus \overline{S_{r''}}, \tag{11}$$

$$h(\overline{S_r}) \subset S_{r'}. \tag{12}$$

Из замечания 2 следует, что функция $f_{\lambda 0}$ является автоморфизмом каждой из областей S_r, rÎ$(0,1]$. Поэтому приведенные рассуждения можно применить для $h(z) := f_\lambda(f_{\lambda_0}^{-1}(z))$ при $\lambda \in D(\lambda_0, \varepsilon_N(\tau))$ и $0 < r \leqslant r_*$. Итак, из (11), (12) в частности следует, что при всех $\lambda \in D(\lambda_0, \varepsilon_N(\tau))$,

$$f_\lambda\left(\overline{S_{r_j}}\right) \subset S_{r_{j+1}}, \qquad j = 0, 1, \quad , N-1, \tag{13}$$

$$f_\lambda\left(\overline{S_{r_j}} \setminus S_{r_{-j}}\right) \subset S_{r_{j+1}} \setminus \overline{S_{r_{-(j+1)}}}, \qquad j = 0, 1, \quad , N-1, \tag{14}$$

где $r_j := r_0 e^{j\tau/N}$, $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$. Воспользовавшись тем, что образ подмножества является подмножеством образа, из (13) заключаем, что $f_\lambda^N(S_{r_0}) \subset S_{r_N}$, а из (14) — что $f_\lambda^N(L_{r_0}) \subset S_{r_N} \setminus \overline{S_{r_{-N}}}$. Первое означает, что функция $s_N(z, \lambda)$ определена и аналитична при $z \in S_{r_*}$ и λ Î $D(\lambda_0, \varepsilon_N(\tau))$, второе — что для указанных λ выполняется неравенство (7). Тем самым доказательство леммы 2 завершено. □

Лемма 3. В условиях леммы 2 для всех z_0 Î L_{r0} справедлива следующая формула:

$$A_N(z_0) = \left.\frac{\partial \log s_N(z_0, \lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{k=0}^{N-1} G(\lambda_0^k \varphi(z_0)), \quad G(\xi) = \frac{u(\psi(\xi))}{\lambda_0 \xi \psi'(\lambda_0 \xi)}. \tag{15}$$

Замечание 7. Условие z_0 Î L_{r0} в лемме 3 не существенно. Формула (15) справедлива для всех z_0 Î S, однако в дальнейшем она будет использоваться именно для z_0 Î L_{r0}.

Доказательство леммы 3. Воспользуемся методом математической индукции. При $N = 0$ равен-

[2] Под $\log(z/z_0)$ в неравенстве (9) следует понимать то из значений функции log, которое имеет наименьшую абсолютную величину.

ство (15) очевидно. Действительно, выражение под знаком дифференцирования по λ в его левой части $s_0(z_0, \lambda) = \varphi(z_0)$ не зависит от λ, а сумма в правой части равна нулю, так как не содержит ни одного слагаемого.

Зафиксируем теперь произвольное $j \in N$. Введем следующие обозначения:

$$z_k := f_{\lambda_0}^k(z_0), \quad u_k(z) := [(\partial/\partial\lambda) f_\lambda^k(z)]|_{\lambda=\lambda_0}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Заметим, что согласно замечанию 2,

$$\varphi(z_k) = s_k(z_0, \lambda_0) = \lambda^k \varphi(z_0), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{16}$$

Далее, дифференцируя по λ равенство $f_\lambda^j(z_0) = f_\lambda(f_\lambda^{j-1}(z_0))$ и учитывая (16), получаем

$$u_j(z_0) = u_1(z_{j-1}) + u_{j-1}(z_0) f'_{\lambda_0}(z_{j-1}) = u_1(\psi(s_{j-1}(z_0, \lambda_0))) +$$
$$+ u_{j-1}(z_0) f'_{\lambda_0}(z_{j-1}) = u_1(\psi(\lambda_0^{j-1}\varphi(z_0))) + u_{j-1}(z_0) f'_{\lambda_0}(z_{j-1}). \tag{17}$$

Кроме того, из (2) при $\lambda := \lambda_0$ следует, что

$$f'_{\lambda_0}(z_{j-1})\varphi'(z_j) = \lambda_0 \varphi'(z_{j-1}). \tag{18}$$

Используя равенства (16)–(18), получаем

$$A_j(z_0) = \frac{\varphi'(z_j) u_j(z_0)}{s_j(z_0, \lambda_0)} = \frac{\varphi'(z_j) u_1(\psi(\lambda_0^{j-1}\varphi(z_0)))}{\lambda_0^j \varphi(z_0)} + \frac{\varphi'(z_{j-1}) u_{j-1}(z_0)}{s_{j-1}(z_0, \lambda_0)} =$$
$$= \frac{u_1(\psi(\lambda_0^{j-1}\varphi(z_0)))}{\lambda_0^j \varphi(z_0) \psi'(\lambda_0^j \varphi(z_0))} + A_{j-1}(z_0) = G(\lambda_0^{j-1}\varphi(z_0)) + A_{j-1}(z_0),$$

из чего следует, что справедливость равенства (15) при $N = j - 1$ влечет справедливость этого равенства при $N = j$. Приведенные рассуждения верны для любого $j \in N$.

Таким образом, схема индукции реализована, и равенство (15) тем самым доказано для всех $N \in N_0$. □

Предложение 2. Пусть $\tau > 0$, $\theta \in (0, \pi/2)$. Если функция $\nu(\varsigma)$ аналитична в круге D, удовлетворяет там неравенству

$$|\nu(0)| e^{-\tau} < |\nu(\varsigma)| < |\nu(0)| e^{\tau}, \tag{19}$$

и $\vartheta := |\arg\{\nu'(0)/\nu(0)\}| + \theta < \pi/2$, то модуль величины $t := \pi\nu'(0)/(4\tau\nu(0))$ не превышает единицы, и для всех ς из сектора

$$\Xi(\rho_0) := \{\varsigma : |\Im m \varsigma| \leqslant |\varsigma| \sin\theta \leqslant \rho_0 \sin\theta\},$$

где $\rho_0 = \sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma$, $\gamma := (1 - |t|^2)/(2|t|\cos\vartheta)$, справедливо неравенство

$$|\nu(\varsigma)| \geqslant |\nu(0)|. \tag{20}$$

Доказательство. Рассматривая при необходимости функцию $\nu(\varsigma)/\nu(0)$ вместо $\nu(\varsigma)$, можно считать, что $\nu(0) = 1$. Многозначная функция

$$\phi(\xi) = h\left(\exp\left(\frac{i\pi \log\xi}{2\tau}\right)\right), \quad h(z) = -i\frac{z-1}{z+1},$$

реализует конформное отображение кольца $\{\xi: e^{-\tau} < |\xi| < e^{\tau}\}$ на круг D, удовлетворяя условиям нормировки $\phi(1) = 0$, $\phi'(1) > 0$. Функция $\phi \circ \nu$ продолжима по любому пути в D. Следовательно, по теореме о монодромии (см., например, [14, с. 127]) ее ветви представляют собой функции, однозначные в круге D. Обозначим через f ту из них, которая удовлетворяет условию

$f(0) = 0$. Вычислим $f'(0) = \phi'(0)v'(0) = \pi v'(0)/(4\tau) = t$. Функция f отображает единичный круг в себя, поэтому в силу леммы Шварца $|t| \leqslant 1$, что доказывает первую часть предложения. Для доказательства второй его части заметим, что неравенство (20) эквивалентно тому, что $\Re e\, f(\varsigma) \geqslant 0$. Величина $f(\varsigma)$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{f(\varsigma) - f'(0)\varsigma}{\varsigma - \overline{f'(0)} f(\varsigma)}\right| \leqslant |\varsigma|, \quad \varsigma \in \mathbb{D}, \tag{21}$$

доказательство которого можно найти в [15, с. 200]. Из (21) находим, что $f(\varsigma)$ лежит в замкнутом круге радиуса

$$R := \frac{|\varsigma|^2 (1 - |t|^2)}{1 - |t\varsigma|^2}$$

с центром в точке

$$\sigma_0 := \frac{t\varsigma(1 - |\varsigma|^2)}{1 - |t\varsigma|^2}.$$

Следовательно, для того чтобы $\Re e\, f(\varsigma) \geqslant 0$, достаточно выполнения условия $\Re e\, \sigma_0 \geqslant R$. После эквивалентных преобразований оно переходит в неравенство

$$\cos(\arg t + \arg \varsigma) \geqslant \frac{|\varsigma|(1 - |t|^2)}{|t|(1 - |\varsigma|^2)},$$

которому удовлетворяют все точки дуги

$$l(\rho) := \{\varsigma : |\Im m \varsigma| \leqslant |\varsigma| \sin\theta = \rho \sin\theta\}, \qquad r \in (0, 1),$$

если

$$\cos\vartheta \geqslant \frac{\rho(1 - |t|^2)}{|t|(1 - \rho^2)}. \tag{22}$$

Выражение в правой части неравенства (22) является возрастающей функцией ρ на интервале (0,1), причем $\rho = \rho_0$ удовлетворяет этому неравенству. Таким образом, неравенство (20) имеет место для всех точек $\varsigma \in \bigcup_{\rho \in [0, \rho_0]} l(\rho) = \Xi(\rho_0)$, что и требовалось доказать. □

Доказательство леммы 1. Рассмотрим функцию $s_N(z, \lambda)$ леммы 2. Согласно этой лемме, функция $s_N(z, \lambda)$ определена и аналитична при всех $z \in S_\tau$ и $\lambda \in D(\lambda_0, \varepsilon_N(\tau))$ и удовлетворяет при указанных λ неравенству (7). Кроме того, так как согласно замечанию 2, $f_{\lambda_0}(L_r) = L_r$ для всех $r \in [0,1)$, то $|s_N(z, \lambda_0)| = |\varphi(z)|$, $z \in S$. Поэтому для каждого $z_0 \in L_{r_0}$ функция $v(\varsigma) := 1/s_N(z_0, \lambda_0(1 - \varepsilon_N(\tau)\varsigma))$ аналитична в круге D и удовлетворяет там неравенству (19).

Чтобы применить предложение 2, найдем логарифмическую производную функции $v(\varsigma)$ в точке $\varsigma = 0$. Согласно лемме 3 она равна

$$\frac{v'(0)}{v(0)} = \lambda_0 \varepsilon_N(\tau) A_N(z_0) = \lambda_0 \varepsilon_N(\tau) \sum_{k=0}^{N-1} G(\lambda_0^k \varphi(z_0)).$$

Рассмотрим сумму $E_N := \sum_{k=0}^{N-1} G(\lambda_0^k \varphi(z_0))/N$. Ее можно понимать как приближенное значение интеграла

$$E_* := \int_0^1 G(r_0 e^{2\pi i(t + t_0)})\, dt, \tag{23}$$

где t_0 Î R — произвольное число, от которого значение интеграла (23) не зависит:

$$E_* = \int_0^1 G(r_0 e^{2\pi i(t+t_0)})\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r_0} \frac{G(\xi)}{\xi}\,d\xi = \operatorname*{Res}_{\xi=0} \frac{G(\xi)}{\xi} = G(0) = \frac{1}{\lambda_0}.$$

Применяя теорему А для $\beta := (\arg\varphi(z_0))/(2\pi) - t_0$ и $\phi(t) := G(r_0 e^{2\pi i(t-t_0)})$, получаем следующую оценку погрешности приближения:

$$|E_N - E_*| < Q_{\beta,N}\int_0^1 |(d/dt)G(r_0 e^{2\pi i(t+t_0)})|\,dt,$$

из чего в силу произвольности выбора t_0 Î R вытекает неравенство

$$|E_N - E_*| \leqslant Q_N\int_0^1 |(d/dt)G(r_0 e^{2\pi i(t+t_0)})|\,dt. \tag{24}$$

Функция под знаком $\int_0^1 |\ \ |\,dt$ равна

$$\frac{dG(r_0 e^{2\pi i(t-t_0)})}{dt} = 2\pi i\xi G'(\xi) = 2\pi i J(t+t_0),$$

где $\xi := r_0 e^{2\pi i(t+t_0)}$.

Так как операция циклического сдвига аргумента функций не изменяет ее нормы в пространстве L_1, из (24) получим

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G(\lambda_0^k \varphi(z_0)) - \frac{1}{\lambda_0}\right| \leqslant a_N, \tag{25}$$

откуда

$$\left|\frac{1}{N}\cdot\frac{v'(0)}{v(0)} - \varepsilon_N(\tau)\right| \leqslant a_N \varepsilon_N(\tau). \tag{26}$$

С учетом этого неравенства пункт (i) условия леммы гарантирует, что

$$\left|\frac{v'(0)}{v(0)}\right| \geqslant N(1-a_N)\varepsilon_N(\tau), \tag{27}$$

$$\left|\arg\frac{v'(0)}{v(0)}\right| \leqslant \arcsin a_N. \tag{28}$$

Вспоминая, что справедливость неравенства (19) мы уже доказали, из неравенств (27), (28) совместно с пунктом (ii) условия леммы заключаем после элементарных рассуждений, что условия предложения 2 выполнены. Следовательно, для всех $\varsigma \in \Xi(\Lambda_N(\tau,\theta,\varepsilon_N(\tau)))$ справедливо неравенство (20). В терминах функции s_N это означает, что

$$|s_N(z_0,\lambda)| \leqslant |s_N(z_0,\lambda_0)| = r_0, \quad \lambda \in \Delta \cap \mathrm{D}(\lambda_0,\varepsilon_*). \tag{29}$$

Так как приведенные рассуждения справедливы для всех z_0 Î $L_{r0} = \partial S_{r0}$, то согласно принципу максимума из неравенства (29) следует, что $\varphi(f_\lambda^N(z)) < r_0$ для всех z Î S_{r0} и $\lambda \in \Delta \cap \mathrm{D}(\lambda_0,\varepsilon_*)$. Таким образом, при указанных l имеет место включение $f_\lambda^N(S_{r_0}) \subset S_{r_1}$, что и требовалось доказать. □

2.3. Доказательство теоремы 2

Предпошлем доказательству теоремы 2 следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 3. Для всякого n Î N справедлива оценка

$$Q_{q_n} < (1/q_n + 1/q_{n+1})/2 \tag{30}$$

Доказательство. Достаточно найти β_0 Î R такое, что

$$Q_{\beta_0, q_n} < (1/q_n + 1/q_{n+1})/2 \tag{31}$$

Для краткости будем писать p, q, p′ и q′ вместо p_n, q_n, p_{n+1} и q_{n+1} соответственно. Как известно из теории цепных дробей (см., напр., [10, с. 213]), при четных n имеет место неравенство $p/q < \alpha < p'/q'$, а при нечетных — неравенство $p/q > \alpha > p'/q'$.

Рассмотрим первый случай (n четно). Пусть z_j, j = 0, 1, …, q – 1, — занумерованные в порядке возрастания точки множества $\{\{\alpha n\} : n = 0, 1, \ldots, q-1\}$. Из теории цепных дробей известно (см., например, [10, с. 225]), что $0 < \alpha - p/q < 1/(qq')$. Выберем число g Î (0,1/q′) так, чтобы α – p/q < g/q). Из того, что числа p и q взаимно простые, с учетом неравенства g < 1/q′ < 1/q следует справедливость следующего соотношения:

$$0 < z_j - j/q < \gamma, \qquad j = 0, 1, \ldots, q-1 \tag{32}$$

Положим b_0 := (1/q – g)/2. Обозначим $y_j := z_j + b_0$, j := 0, 1, …, q – 1 и y_{-1} : = 0, y_q : = 1. Из неравенства (32) следует, что

$$|y_j - (j+1/2)/q| < \gamma/2, \qquad j = 0, 1, \ldots, q-1. \tag{33}$$

В частности, $0 < y_j < y_{j+1} \leqslant 1$ для всех j = 0, 1, …, q – 1, и следовательно, $\{\alpha k + \beta_0\} = y_j$, при $j \equiv pk \pmod{q}$, $0 \leqslant j < q$, k = 0, 1, …, q – 1. Поэтому справедливо равенство

$$F_{\beta_0, q}(x) = (j+1)/q, x \in (y_j, y_{j+1}], \quad j = -1, 0, 1, \ldots, q-1 \tag{34}$$

С другой стороны, из (33) получаем

$$|x - (j+1)/q| < 1/(2q) + \gamma/2, x \in (y_j, y_{j+1}], \quad j = -1, 0, 1, \ldots, q-1. \tag{35}$$

Объединяя соотношения (34), (35), заключаем, что

$$|F_{\beta_0, q}(x) - x| \leqslant (1/q + \gamma)/2 < (1/q + 1/q')/2, \qquad x \in (y_{-1}, y_q] = (0,1]. \tag{36}$$

С учетом того, что $F_{\beta_0, q}(0) = 0$, неравенство (36) влечет выполнение неравенства (31). Тем самым доказательство предложения 3 в случае четного n завершено.

Случай нечетного n рассматривается аналогично, за исключением того, что g Î (0,1/q¢) теперь выбирается так, чтобы p/q – a < g/q, вместо неравенства (32) имеет место соотношение 0 < j/q – z_j < g, j = 0, 1, …, q – 1, а b_0 полагают равным (1/q + g)/2. □

Замечание 8. В доказательстве теоремы 2 достаточно показать справедливость утверждения (ii) этой теоремы лишь для r, близких к 1, скажем, $r \geqslant \bar r_0$, $\bar r_0 \in (0,1)$. Для того чтобы утверждение (ii) имело место и при $r \in (0, \bar r_0)$, следует положить $\varepsilon(r) := \varepsilon(\bar r_0)$, $r \in (0, \bar r_0)$ и заменить постоянную C на $\min\{C, \varepsilon(\bar r_0)\}$.

Доказательство теоремы 2. Настоящее доказательство основано на применении леммы 1, поэтому будем использовать в нем обозначения, введенные в разделе 2.1.

Пусть r_0 Î (0,1). Определим значение e(r) в точке r := r_0 следующим образом. Через q, так же как в лемме 1, будем обозначать полураствор угла D. Положим

$$N := \ell\left(2\pi \int_0^1 |J(t)|\,dt \Big/ \sin(\pi/4 - \theta/2)\right), \quad \tau := \log \frac{1+2r_0}{3r_0}.$$

Нетрудно проверить, что в силу предложения 3, условия леммы 1 для этих значений N и t выполняются, причем

$$0 < a_N < \sin(\pi/4 - \theta/2) \tag{37}$$

Поэтому, полагая $\varepsilon(r_0) := \varepsilon_*$, заключаем в соответствии с замечанием 6, что утверждение (i) из теоремы 2 истинно. Остается доказать утверждение (ii) при таком же определении e(r_0). Опираясь на замечание 8, на протяжении всего доказательства будем считать, что 1 – r_0 достаточно мало.

Выберем e^0 > 0 так, чтобы $D(\lambda_0, \varepsilon^0) \subset W$. Так как $\bar{S} \subset \mathfrak{U}$, то существует постоянная C_1 > 0 такая, что $|\partial(f_\lambda(\psi(\xi))/\xi)/\partial\lambda| < C_1$ для всех x Î D и l Î D (l$_0$, e^0) . Интегрируя это неравенство по l, получаем

$$\frac{|f_\lambda(\psi(\xi)) - f_{\lambda_0}(\psi(\xi))|}{|\xi|} < C_1 |\lambda - \lambda_0|.$$

Таким образом,

$$\omega_r^{-1}(s) \geqslant \min\{\varepsilon^0, s/C_1\}, \qquad s > 0, r \in (0,1). \tag{38}$$

Далее, из неравенства

$$\frac{d}{dx} \log k_\pi(e^x) \geqslant \frac{1 - r^*}{1 + r^*}, \quad x \in (-\infty, \log r^*],$$

находим, что

$$1 - \frac{k_\pi(r_*)}{k_\pi(r^*)} \geqslant 1 - \exp\left(-\frac{\tau(1 - r^*)}{N(1 + r^*)}\right) \geqslant C_2 \frac{(1 - r_0)^2}{N} \tag{39}$$

для некоторой постоянной C_2 > 0.

Из (38) и (39) заключаем, что

$$\varepsilon_N(\tau) \geqslant C_3 \frac{(1 - r_0)^2}{N}, \qquad C_3 := C_2/C_1. \tag{40}$$

Так как $\sqrt{1 + 2b^2 \cos 2\vartheta + b^4} - 1 + b^2 \geqslant 2b^2 \cos^2 \vartheta$, из (37) и (40) делаем вывод, что

$$\varepsilon_* \geqslant C \frac{(1 - r_0)^3}{N}$$

для некоторой постоянной C > 0.

Остается показать, что $N \leqslant \ell((1 - r_0)^{-1.501})$. Функция ψ однолистна в D, поэтому имеют место следующие асимптотические равенства (см., например, [16, с. 176–178, 183]):

$$\int_0^1 |\psi'(r_0 e^{2\pi i t})| \, dt = O((1 - r_0)^{-0.491}) \quad \text{при } r_0 \to 1 - 0, \tag{41}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{|\psi'(r_0 e^{2\pi i t})|} \, dt = o((1 - r_0)^{-0.501}) \quad \text{при } r_0 \to 1 - 0, \tag{42}$$

и оценки (см., например, [8, с. 52]):

$$\left| \frac{\xi \psi''(\xi)}{\psi'(\xi)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leqslant \frac{4r}{1 - r^2}, \quad 0 \leqslant r = |\xi| < 0, \tag{43}$$

$$\left| \frac{\psi'(\xi)}{\psi'(0)} \right| \geqslant \frac{1 - r}{(1 + r)^3}, \qquad 0 \leqslant r = |\xi| < 0. \tag{44}$$

Так как $\bar{S} \subset \mathfrak{U}$, функция u(z) ограничена вместе со своей производной в области S. Поэтому из (41)–(44) следует, что

$$\int_0^1 |J(t)| \, dt = o((1 - r_0)^{-1.501}), \quad \text{при } r_0 \to 1 - 0. \tag{45}$$

Поскольку функция $\ell(x)$ не убывает на $(0, +\infty)$, из (45) следует, что $\ell((1-r_0)^{-1.601}) \geq N$ для $r_0 < 1$ достаточно близких к 1. Тем самым доказательство теоремы 2 завершено. □

2.4. Доказательство теоремы 1

Доказательство предложения 1. Применяя лемму 1 для значений N и t, указанных в доказательстве теоремы 2, приходим к выводу, что для каждого $r_0 \in (0,1)$ существует ε^* такое, что $S_{r_0} \subset A^*(0, f_\lambda, U)$ для всех $\lambda \in \Delta \cap D(\lambda_0, \varepsilon_*)$. Последнее эквивалентно равенству (4), что и доказывает предложение 1. □

Предпошлем доказательству теоремы 1 следующую лемму.

Лемма 4. Пусть $z_0 \in U$. Если в условиях теоремы 1 существует окрестность U точки z_0, такая что $U \subset F(f_\lambda, U)$ для всех достаточно больших $n \in N$, то

$$z_0 \in \mathcal{F}\left(f_{\lambda_0}, \mathfrak{U}\right). \tag{46}$$

Доказательство. Докажем сначала, что $z_0 \in E(f_{\lambda_0}, U)$. Предположим, что это не так. Тогда существует $j_0 \in N$ такое, что $f_{\lambda_0}^{j_0}$ определена (в смысле (3)) в некоторой открытой связной окрестности $U_0 \subset U$ точки z_0 и $f_{\lambda_0}^{j_0}(z_0) \notin \mathfrak{U}$. Сходимость последовательности f_{λ_n} при $n \to +\infty$ к функции f_{λ_0} равномерно внутри U влечет сходимость последовательности $f_{\lambda_n}^{j_0}$ при $n \to +\infty$ к функции $f_{\lambda_0}^{j_0}$ равномерно внутри U_0. Поэтому согласно теореме Гурвица (см., например, [17, с. 426]), для всякого достаточно большого n существует $z_n \in U_0$ такое, что $f_{\lambda_n}^{j_0}(z_n) = f_{\lambda_0}^{j_0}(z_0) \notin \mathfrak{U}$. В то же время, по построению и условию леммы, для достаточно больших $n \in N$ имеет место включение $U_0 \subset U \subset F(f_{\lambda_n}, U)$.

Полученное противоречие доказывает, что $z_0 \in E(f_{\lambda_0}, U)$. То же самое справедливо для всех внутренних точек множества U. Следовательно, $z_0 \in \operatorname{int}(U) \subset E(f_{\lambda_0}, U)$, из чего, в силу замечания 3, следует (46). Тем самым лемма 4 доказана. □

Доказательство теоремы 1. Достаточно показать, что область S является ядром последовательности $A^*(0, f_{\lambda_n}, U)$ относительно точки $z = 0$. Действительно, если это утверждение верно для произвольной последовательности $\lambda_n \in \Omega$, $n \in N$, $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to +\infty$, то оно в той же степени верно и для любой ее подпоследовательности, что и составляет вывод теоремы 1.

Итак, нужно показать, что справедливы следующие утверждения:

(i) Всякий компакт $K \subset S$ лежит во всех $A^*(0, f_{\lambda_n}, U)$ за исключением, может быть, конечного числа номеров n.

(ii) Область S является максимальной из всех областей, обладающих свойством (i) и содержащих точку $z = 0$.

Утверждение (i) следует непосредственно из предложения 1. Докажем (ii) от противного. Предположим, что (ii) не имеет места. Тогда существует область $S' \not\subset S$, $0 \in S'$, обладающая свойством (i). Пусть $z_0 \in S' \setminus S$ и $\Gamma \subset S'$ — кривая, соединяющая точки z_0 и $z = 0$. Рассмотрим компактную окрестность $K \subset S'$ кривой Γ. По построению, $K \subset A^*(0, f_{\lambda_n}, U)$ для всех достаточно больших $n \in N$. Следовательно, по лемме 4, имеет место включение $\Gamma \subset F(f_{\lambda_0}, U)$, из чего в силу связности множества $\Gamma \ni 0$, находим, что $z_0 \in \Gamma \subset S$. В то же время, по построению, $z_0 \notin S$. Полученное противоречие доказывает утверждение (ii). На этом доказательство теоремы 1 завершено. □

2.5. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим семейство $f^*: C \times D \to C$; $(\lambda, z) \mapsto f_\lambda^*(z) := \lambda z + 3z^2$. В принятых обозначениях это соответствует $U := D$, $W := C$.

Замечание 9. Условие (5) гарантирует [18, с. 90 (теорема 6)], что $z = 0$ является для $f_{\lambda_0}^*$ точкой

Зигеля.

Замечание 10. Функции f_λ^* можно рассматривать на всей комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$. Точка ¥ является суперпритягивающей для каждой из них, причем $f_\lambda^*(\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}})\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ для всех $\lambda\in\overline{\mathbb{D}}$. Поэтому $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}}\subset\mathcal{A}^*(\infty,f_\lambda^*)$ при $\lambda\in\overline{\mathbb{D}}$. С другой стороны, $\mathcal{A}(\infty,P)=\mathcal{A}^*(\infty,P)$ для всякого многочлена P степени $d\geqslant 2$ (см., напр.: [1, с. 119 (лемма 9.4)]. Таким образом, $\mathcal{F}(f_\lambda^*,\mathbb{D})=\mathcal{F}(f_\lambda^*)\setminus\mathcal{A}(\infty,f_\lambda^*)$.

Замечание 11. Итерации квадратичных полиномов хорошо изучены. В частности, относительно семейства $g_c(z):=z^2+c$, c Î C, известно (см., например, [4, с. 121–126, 65–67]), что если g_c имеет притягивающую неподвижную точку или точку Зигеля, то $\partial\mathcal{A}^*(\infty,g_c)=\partial K(g_c)=\mathcal{J}(g_c)$ и $K(g_c)=\overline{\operatorname{int}(K(g_c))}$, причем множество int ($K(g_c)$) является объединением всех ограниченных компонент связности множества Фату $F(g_c)$, совокупность которых в первом случае ограничивается непосредственным бассейном притягивающей неподвижной точки, а во втором – объединением множеств $(g_c^n)^{-1}(S_1)$, n Î N, где S_1 – диск Зигеля функции g_c.

Доказательство теоремы 3. Замена переменного z = T(z) := 3z – l/2 сводит отображение f_λ^*, действующее в плоскости (z), к отображению $T\circ f_\lambda^*\circ T^{-1}=g_c$, $c=c(\lambda):=\lambda(2-\lambda)/4$, действующему в плоскости (z). Перенося утверждение замечания 11 на функции f_λ^*, обнаружим, что $K(f_\lambda^*)=\mathcal{A}^*(0,f_\lambda^*)$ для всех l Î D и

$$K(f_{\lambda_0}^*)=\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(f_{\lambda_0}^{*\,n})^{-1}(S)}.$$

В силу замечаний 5 и 10 достаточно показать, что среди ограниченных компонент множества Фату $\mathcal{F}(f_{\lambda_0}^*)$ найдется отличная от диска Зигеля S. Для этого заметим, что $f_{\lambda_0}^*(-\lambda/3-z)=f_{\lambda_0}^*(z)$, z Î C, и покажем, что множество $S':=\{-\lambda/3-z:z\in S\}\subset\mathcal{F}(f_{\lambda_0}^*,\mathbb{D})$ не лежит в S. Предположив противное, в силу односвязности области S находим, что – l/6 Î S, и следовательно, функция $f_{\lambda_0}^*$ не является однолистной в S, что противоречит замечанию 2. Тем самым доказательство теоремы 3 завершено.
□

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00083), программы «Университеты России» (проект УР 04.01.374) и программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

Библиографический список

1. Милнор Дж. Голоморфная динамика / Пер. с англ. Ижевск, 2000 (Milnor J. Dynamics in One Complex Variable. Vieweg, 2000) .

2. Bargmann D. Conjugations on rotation domains as limit functions of the geometric means of the iterates // Annales Academi Scientiarum Fennic. Mathematica. 1998. V. 23. P. 507–524.

3. Beardon A.F. Iteration of Rational Functions. N.Y., 1991.

4. Carleson L., Gamelin T.W. Complex Dynamics. N.Y., 1993.

5. Еременко А.Э., Любич М.Ю. Динамика аналитиче-ских отображений // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 3. С. 1–70.

6. Bergweiler W. An introduction to complex dynamics // Textos de Matematica Universidade de Coimbra. 1995. Ser. B. № 6. P. 1–37.

7. Bergweiler W. Iteration of meromorphic functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 29, № 2. P. 151–188.

8. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.

9. Kriete H. Approximation of indifferent cycles // Math. Gottingensis: preprint series. Gottingen, 1996. № 3.

10. Бухштаб А.А. Теория чисел. М., 1966.

11. Douady A. Does the Julia set depend continuously on the polynomial? // Proc. Symp. in Appl. Math. 1994. V. 49. P. 91–

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00083), программы «Университеты России» (проект УР 04.01.374) и программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

Библиографический список

1. *Милнор Дж.* Голоморфная динамика / Пер. с англ. Ижевск, 2000 (*Milnor J.* Dynamics in One Complex Variable. Vieweg, 2000) .

2. *Bargmann D.* Conjugations on rotation domains as limit functions of the geometric means of the iterates // Annales Academi Scientiarum Fennic. Mathematica. 1998. V. 23. P. 507–524.

3. *Beardon A.F.* Iteration of Rational Functions. N.Y., 1991.

4. *Carleson L., Gamelin T.W.* Complex Dynamics. N.Y., 1993.

5. *Еременко А.Э., Любич М.*Ю. Динамика аналитических отображений // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 3. С. 1–70.

6. *Bergweiler W.* An introduction to complex dynamics // Textos de Matematica Universidade de Coimbra. 1995. Ser. B. № 6. P. 1–37.

7. *Bergweiler W.* Iteration of meromorphic functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 29, № 2. P. 151–188.

8. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.

9. *Kriete H.* Approximation of indifferent cycles // Math. Gottingensis: preprint series. Gottingen, 1996. № 3.

10. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. М., 1966.

11. *Douady A.* Does the Julia set depend continuously on the polynomial? // Proc. Symp. in Appl. Math. 1994. V. 49. P. 91–138.

12. *Kriete H.* Continuity of filled-in Julia sets and the closing lemma // Nonlinearity. 1996. V. 9. P. 1599–1608.

13. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М., 1969.

14. *Неванлинна Р.* Униформизация. М., 1955.

15. *Duren P.L.* Univalent functions. N.Y., 1983.

16. *Pommerenke Ch.* Boundary Behaviour of Conformal maps. N.Y., 1992.

17. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. М., 1967. Т. I.

18. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. V. 25. С. 119–262.

УДК 517.5

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО СПЛАЙНА ПО ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

Ю.В. Куприянова, С.Ф. Лукомский

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: lukomskiisf@info.sgu.ru

В статье строится Эрмитов сплайн на треугольнике, для которого оценка погрешности его производной в направлении любой стороны треугольника обратно пропорциональна длине этой стороны.

On optimal choice of interpolation spline on triangular net

Yu.V. Kupriyanova, S.F. Lukomskiy

In this paper we find a Hermite Spline on atriangle for the approximation error of its derivatives with respect to a side of this triangle are inversely proportional to length of this side.

Введение

Пусть $(T_j)_{j=1}^m$ – треугольная сетка на плоскости, и $Q_j(x)$ – многочлен Эрмита, интерполирующий функцию f и ее производные 1-го порядка на треугольнике T_j. Такой многочлен определен неоднозначно и, кроме того, функция $Q(x)$, совпадающая с Q_j на каждом T_j, не принадлежит классу C^1 на объединении $\bigcup\limits_{j=1}^{m} T_j$. Чтобы добиться дифференцируемости на границах [1] обычно в каждом треугольнике T_j выбирают точку P_j и строят интерполяционные многочле-