МАТЕМАТИКА

УДК 514.764.214, 512.816.3

ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ЛОБАЧЕВСКОГО, ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

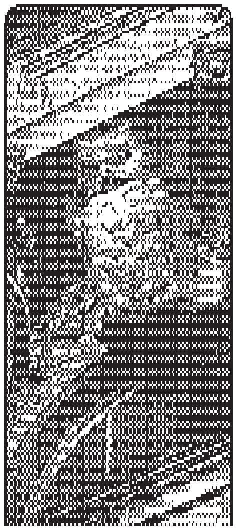
А.С. Галаев
Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: galaevas@mail.ru

В настоящей работе приводится классификация транзитивных и просто транзитивных групп движений пространств Лобачевского и транзитивных групп преобразований подобия евклидовых пространс тв. Также излагается геометрическое доказательство результата Л. Берарда Бержери и А. Икемакхена о классификации слабонеприводимых, не являющихся неприводимыми, подалгебр алгебры Ли so(1, n+1).

Isometry groups of Lobachevskian spaces, similarity transformation groups of Euclidean spaces and Lorentzian holonomy groups

A.S. Galaev

In the present paper transitively and simply transitively acting isometry groups of Lobachevskian spaces and transitively acting similarity transformation groups of Euclidean spaces are classified. A geometrical proof of the result of L. Berard Bergery and A. Ikemakhen about the classification of weakly-irreducible not irreducible subalgebras of so(1,n+1) is given.



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

Введение

В 1952 году А. Борель и А. Лихнерович доказали, что группа голономии риманова многообразия представима в виде прямого произведения неприводимых групп голономии римановых многообразий [1]. Основная причина заключается в следующем: если подгруппа $G \subset SO(n)$ сохраняет некоторое векторное подпространство $U \subset \mathbb{R}^n$, то G сохраняет также его ортогональное дополнение $U^\perp$, и мы имеем $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$, т.е. группа G вполне приводима. В 1955 году М. Берже классифицировал возможные неприводимые связные группы голономии римановых многообразий [2] (подробный обзор групп голономии римановых многообразий см. также [3–6]).

Утверждение теоремы Бореля – Лихнеровича неверно для псевдоримановых многообразий. Действительно, предположим, что подгруппа $G \subset SO(r, s)$ сохраняет собственное вырожденное подпространство $U \subset \mathbb{R}^{r,s}$, тогда $U \cap U^\perp \neq \{0\}$, и мы не получаем ортогонального разложения $\mathbb{R}^{r,s}$ в прямую сумму G-неприводимых подпространств. Подгруппа $G \subset SO(r, s)$ называется слабо неприводимой, если она не сохраняет никакие невырожденные собственные подпространства в $\mathbb{R}^{r,s}$. Теорема By утверждает, что группа голономии псевдориманова многообразия представима в виде прямого произведения слабо неприводимых групп голономии псевдоримановых многообразий [7]. Если группа голономии неприводима, то она слабо неприводима. М. Берже дал классификацию связных неприводимых групп голономии для псевдоримановых многообразий [2]. В частности, единственной связной неприводимой группой голономии лоренцевых многообразий является $SO^0(1, n+1)$. В [8, 9] даны прямые доказательства этого факта.

Вопрос о классификации слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, групп голономии для псевдоримановых многообразий остается открытым. Первый шаг к классификации связных слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, групп голономии лоренцевых многообразий сделали Л. Берард Бержери и А. Икемакхен. В 1993 году они классифицировали слабо неприводимые, не являющиеся неприводимыми, подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{so}(1, n+1)$ [10]. Более подробно, они разделили такие подалгебры на 4 типа. Доказательство этого результата было алгебраическим.

Приведем геометрическое доказательство результата Л. Берарда Бержери и А. Икемакхена. Рассмотрим $(n+2)$-мерное пространство Минковского (V, η) и фиксируем в нем изотропный вектор $p \in V$. Обозначим через $SO(V)_{\mathbb{R}p}$ подгруппу Ли в $SO(V)$, сохраняющую изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Рассмотрим векторное подпространство $E \subset V$ такое, что $(\mathbb{R}p)^{\perp\eta} = \mathbb{R}p \oplus E$. Пространство E является евклидовым. Рассмотрим векторную модель $(n+1)$-мерного пространства Лобачевского L^{n+1} и его абсолют ∂L^{n+1}, который диффеоморфен n-мерной единичной сфере. Имеем естественные изоморфизмы:

$$SO(V) \simeq \mathrm{Isom}\, L^{n+1} \simeq \mathrm{Conf}\, \partial L^{n+1} \quad \text{и} \quad SO(V)_{\mathbb{R}p} \simeq \mathrm{Sim}\, E,$$

где $\mathrm{Isom}\, L^{n+1}$ — группа всех движений пространства L^{n+1}, $\mathrm{Conf}\, \partial L^{n+1}$ – группа конформных преобразований ∂L^{n+1} и $\mathrm{Sim}\, E$ – группа преобразований подобия E. Отождествим множество $\partial L^{n+1} \backslash \{\mathbb{R}p\}$ с евклидовым пространством E. Тогда всякая подгруппа $G \subset SO(V)_{\mathbb{R}p}$ действует на E, более того, $G \subset \mathrm{Sim}\, E$. Докажем, что связная подгруппа $G \subset SO(V)_{\mathbb{R}p}$ является слабо неприводимой тогда и только тогда, когда соответствующая подгруппа $G \subset \mathrm{Sim}\, E$, при изоморфизме

, действует транзитивно в E. Это дает взаимно однозначное соответствие между связными слабо неприводимыми подгруппами в $SO(V)_{\mathbb{R}p}$ и связными транзитивными подгруппами в $\mathrm{Sim}\, E$. Используя описание связных транзитивных подгрупп в $\mathrm{Sim}\, E$, данные в [11, 12], разделяем эти группы на 4 типа и доказываем, что соответствующие слабо неприводимые подгруппы в $SO(V)_{\mathbb{R}p}$ имеют тот же тип из классификации Л. Берарда Бержери и А. Икемакхена.

Классифицируем также транзитивные группы движений пространства Лобачевского L^{n+1}. Докажем, что эти группы исчерпываются группой $SO^0(V)$ и слабо неприводимыми подгруппами в $SO(V)_{\mathbb{R}p}$ типов 1 и 3. Более того, просто транзитивные группы движений пространства Лобачевского L^{n+1} исчерпываются слабо неприводимыми подгруппами в $SO(V)_{\mathbb{R}p}$ типов 1 и 3, удовлетворяющими дополнительному условию.

Замечание. Применяя схожие рассуждения к комплексному пространству Лобачевского, можно получить классификацию связных слабо неприводимых, не являющихся неприводимыми, групп в $SU(1, n+1) \subset SO(2, 2n+2)$. Вопрос классификации групп голономии лоренцевых многообразий рассматривается также в работах [9, 13–17].

1. Результат Л. Берарда Бержери и А. Икемакхена

Рассмотрим пространство Минковского (V, η) размерности $n+2$, где η есть метрика на V сигнатуры $(1, n+1)$. Зафиксируем базис $p, e_1, \dots, e_n, q$ пространства V, относительно которого матрица Грама метрики η имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & E_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_n обозначает n-мерную единичную матрицу. Пусть $E \subset V$ есть векторное подпространство, порожденное векторами $e_1, \dots, e_n$. Векторное пространство

E является евклидовым относительно скалярного произведения $\eta|_E$.

Обозначим через $\mathrm{so}(V)$ алгебру Ли η-кососимметричных эндоморфизмов пространства V и через $\mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}$ — подалгебру в $\mathrm{so}(V)$, сохраняющую прямую $\mathbb{R}p$. Алгебра Ли $\mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}$ может быть отождествлена со следующей матричной алгеброй Ли:

$$\mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}=\left\{\begin{pmatrix} a & -X^t & 0\\ 0 & A & X\\ 0 & 0 & -a\end{pmatrix} : a\in\mathbb{R}, X\in E, A\in \mathrm{so}(E)\right\}.$$

Отождествим матрицу, упомянутую выше, с тройкой (a, A, X). Определим следующие подалгебры в $\mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}$: $\mathcal{A} = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{K} = \{(0, A, 0) : A \in \mathrm{so}(E)\}$ и $\mathcal{N} = \{(0, 0, X) : X \in E\}$. Ясно, что $\mathcal{A}$ коммутирует с $\mathcal{K}$, а $\mathcal{N}$ является идеалом.

Пусть $\mathfrak{h}$ алгебра Ли, а $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ – ее подалгебры, такие, что векторное пространство $\mathfrak{h}$ есть прямая сумма векторных подпространств $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$. Говорят, что $\mathfrak{h}$ раскладывается в прямую сумму подалгебр $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$, если $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ коммутируют, т.е. являются идеалами; в этом случае пишут $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$. Говорят, что $\mathfrak{h}$ раскладывается в полупрямую сумму подалгебр $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$, если $\mathfrak{h}_2$ является идеалом; в этом случае пишут $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_2$.

Для алгебры Ли $\mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}$ получаем разложение $\mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p} = (\mathcal{A} \oplus \mathcal{K}) \ltimes \mathcal{N}$.

Подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathrm{so}(V)$ называется неприводимой, если она не сохраняет никакие собственные подпространства в V; $\mathfrak{g}$ называется слабо неприводимой, если она не сохраняет никакие невырожденные собственные подпространства в V.

Очевидно, что если $\mathfrak{g} \subset \mathrm{so}(V)$ неприводима, то она слабо неприводима. Если $\mathfrak{g} \subset \mathrm{so}(V)$ сохраняет вырожденное собственное подпространство $U \subset V$, то она сохраняет изотропную прямую $U \cap U^{\perp}$; всякая такая алгебра сопряжена некоторой подалгебре в $\mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}$.

Напомним, что всякая подалгебра $\mathfrak{B} \subset \mathrm{so}(E)$ компактна, и имеем разложение $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{B}'$ есть коммутант $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{z}(\mathfrak{B})$ – центр $\mathfrak{B}$ [18].

Следующий результат принадлежит Л. Берарду Бержери и А. Икемакхену.

Теорема. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}$ – слабо неприводимая подалгебра. Тогда $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли одного из следующих типов:

Тип 1. $\mathfrak{g} = (\mathcal{A} \oplus \mathfrak{B}) \ltimes \mathcal{N}$, где $\mathfrak{B} \subset \mathrm{so}(E)$ является подалгеброй;

Тип 2. $\mathfrak{g} = \mathfrak{B} \ltimes \mathcal{N}$;

Тип 3. $\mathfrak{g} = (\mathfrak{B}' \oplus \{\varphi(A) + A : A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{B})\}) \ltimes \mathcal{N}$, где $\varphi : \mathfrak{z}(\mathfrak{B}) \to \mathcal{A}$ – ненулевое линейное отображение;

Тип 4. $\mathfrak{g} = (\mathfrak{B}' \oplus \{\psi(A) + A : A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{B})\}) \ltimes \mathcal{N}_W$, где имеем нетривиальное ортогональное разложение $E = U \oplus W$, $\mathfrak{B} \subset \mathrm{so}(W)$, $\mathcal{N}_W = \{(0, 0, X) : X \in W\}$, $\mathcal{N}_U = \{(0, 0, X) : X \in U\}$, и $\psi : \mathfrak{z}(\mathfrak{B}) \to \mathcal{N}_U$ – сюрьективное линейное отображение.

Обозначим через SO(V) алгебру Ли всех автоморфизмов V, которые сохраняют метрику η и имеют определитель 1, а через $SO(V)_{\mathbb{R}p}$ подгруппу Ли в SO(V), сохраняющую изотропную прямую $\mathbb{R}p$. Очевидно, что $\mathrm{so}(V)$ и $\mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}$ являются алгебрами Ли групп Ли SO(V) и $SO(V)_{\mathbb{R}p}$ соответственно. Определения неприводимости и слабой неприводимости для групп такие же, как для алгебр. Связная подгруппа Ли $G \subset SO(V)_{\mathbb{R}p}$ неприводима (слабо неприводима) тогда и только тогда, когда неприводима (слабо неприводима) соответствующая подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}$. Типом связной слабо неприводимой подгруппы Ли $G \subset SO(V)_{\mathbb{R}p}$ будем называть тип соответствующей подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathrm{so}(V)_{\mathbb{R}p}$.

2. Транзитивные группы преобразований подобия евклидовых пространств

В этом разделе мы напоминаем результаты для транзитивных групп преобразований подобия и движений евклидовых пространств [11, 12].

Рассмотрим евклидово пространство (E, η). Отображение $f : E \to E$ называется преобразованием подобия E, если существует некоторое $\lambda > 0$ такое, что $\|f(x_1) - f(x_2)\| = \lambda\|x_1 - x_2\|$ для всех $x_1, x_2 \in E$, где $\|x\|^2 = \eta(x, x)$. Если $\lambda = 1$, то f называется движением. Обозначим через Sim E и Isom E группы всех преобразований подобия и движений пространства E соответственно. Подгруппа $G \subset$ Sim E такая, что $G \not\subset$ Isom E называется существенной. Подгруппа $G \subset$ Sim E называется неприводимой, если она не сохраняет никакие собственные аффинные подпространства в E.

Пусть H – связная группа Ли, а H_1 и H_2 – ее связные подгруппы Ли такие, что многообразие H диффеоморфно прямому произведению многообразий H_1 и H_2. Говорят, что многообразие H раскладывается в прямое произведение подгрупп Ли H_1 и H_2, если H_1 и H_2 коммутируют, т.е. являются нормальными подгруппами Ли; в этом случае пишут $H = H_1 \times H_2$. Говорят, что H раскладывается в полупрямое произведение подгрупп Ли H_1 и H_2, если H_2 является нормальной подгруппой Ли; в этом случае пишут $H = H_1 \ltimes H_2$. Связная группа Ли раскладывается в прямое (полупрямое) произведение подгрупп Ли тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли раскладывается в прямую (полупрямую) сумму соответствующих подалгебр.

Нам понадобится следующая теорема из [11, 12].

Теорема 1. (1) Пусть $G \subset$ Isom E — связная транзитивная подгруппа. Тогда существует разложение $G = H \ltimes F$, где H является стабилизатором некоторой точки $x \in F$ и F – подгруппой G, которая действует просто транзитивно в E.

(2) Пусть $F \subset$ Isom E – связная просто транзитивная подгруппа. Тогда существует ортогональное разложение $E = U \oplus W$ и гомоморфизм $\Psi : U \to SO(W)$ такой, что $F = U^{\Psi} \ltimes W$, где $U^{\Psi} = \{\Psi(u)\cdot u : u \in U\} \subset SO(W) \times U$ есть группа винтовых движений.

(3) Пусть $G \subset$ Isom E – существенная связная транзитивная подгруппа. Тогда $G = (A_1 \times H) \ltimes F$, где $A_1 \subset$ Sim E – однопараметрическая существенная подгруппа, которая сохраняет некоторую точку x, $H \subset$ Isom E коммутирует с A_1 и сохраняет точку x, а F – нормальная подгруппа в G, которая действует просто транзитивно в E.

(4) Связная подгруппа $G \subset$ Isom E действует неприводимо в E тогда и только тогда, когда G действует транзитивно в E.

Из пунктов (3) и (4) теоремы следует, что связная подгруппа $G \subset$ Isom E действует неприводимо в E тогда и только тогда, когда G действует транзитивно в E.

3. Движения пространств Лобачевского

Пусть $p, e_1, \ldots, e_n, q$ – базис векторного пространства V, рассмотренный выше. Рассмотрим базис $e_0, e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ пространства V, где $e_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(p - q)$ и $e_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(p + q)$. Относительно этого базиса матрица Грама метрики η имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_{n+1} \end{pmatrix}$, где E_{n+1} – (n+1)-мерная единичная матрица.

Векторная модель (n+1)-мерного пространства Лобачевского определяется следующим образом:

$$L^{n+1} = \{x \in V : \eta(x, x) = -1, x_0 > 0\}.$$

Напомним, что L^{n+1} является (n+1)-мерным римановым подмногообразием V. Касательное пространство в точке $x \in L^{n+1}$ отождествляется с векторным подпространством $(x)^{\perp\eta} \subset V$, и ограничение формы η на это подпространство положительно определено.

Всякий элемент $f \in SO(V)$ сохраняет пространство L^{n+1}. Более того, для всякого $f \in SO(V)$, ограничение $f|_{L^{n+1}}$ является движением пространства L^{n+1}, и всякое движение L^{n+1} может быть получено таким образом. Следовательно, имеем изоморфизм $SO(V) \simeq \mathrm{Isom}\, L^{n+1}$, где Isom L^{n+1} обозначает группу всех движений пространства L^{n+1}.

Рассмотрим световой конус в V, $C = \{x \in V : \eta(x, x) = 0\}$

Подмножество (n+1)-мерного проективного пространства IP, состоящего из всех изотропных прямых $l \subset C$, называется абсолютом пространства Лобачевского L^{n+1} и обозначается ∂L^{n+1}.

Отождествим ∂L^{n+1} с n-мерной единичной сферой S^n следующим образом. Рассмотрим векторное подпространство $E_1 = E \oplus \mathbb{R}e_{n+1}$. Каждая изотропная прямая пересекает аффинное подпространство $e_0 + E_1$ в единственной точке. Пересечение $(e_0 + E_1) \cap C$ представляет собой множество

$$\{x \in V : x_0 = 1, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\},$$

которое является n-мерной сферой S^n. Это дает нам отождествление $\partial L^{n-1} \simeq S^n$.

Обозначим через Conf S^n группу всех конформных преобразований сферы S^n. Всякое преобразование $f \in SO(V)$ переводит изотропные прямые в изотропные прямые. Более того, пользуясь нашим отождествлением, имеем $f|_{\partial L^{n-1}} \in \operatorname{Conf} \partial L^{n-1}$, и всякое преобразование из Conf ∂L^{n+1} может быть получено таким образом. Получаем изоморфизм $SO(V) \simeq \operatorname{Conf} \partial L^{n-1}$.

Пусть $f \in SO(V)_{\mathbb{R}p}$. Соответствующий элемент $f \in \operatorname{Conf} \partial L^{n+1}$ (мы обозначаем его той же буквой) сохраняет точку $p_0 = \mathbb{R}p \cap (e_0 + E_1)$. Ясно, что $p_0 = \sqrt{2}p$. Обозначим за s_0 стереографическую проекцию $s_0 : S^n \setminus \{p_0\} \to e_0 + E$. Так как $f \in \operatorname{Conf} S^n$, то $s_0 \circ f \circ s_0^{-1} : E \to E$ является преобразованием подобия евклидова пространства E (здесь мы отождествляем $e_0 + E$ с E). Обратно, всякое преобразование подобия E может быть получено таким образом. Следовательно, имеем изоморфизм $SO(V)_{\mathbb{R}p} \simeq \operatorname{Sim} E$

Плоскостью в пространстве Лобачевского L^{n+1} называется непустое пересечение L^{n+1} и некоторого векторного подпространства $U \subset V$. Пересечение $L^{n+1} \cap U$ непусто тогда и только тогда, когда ограничение формы η на U имеет сигнатуру (1, dim U – 1). Подгруппа $G \subset \operatorname{Isom} L^{n+1}$ называется неприводимой, если она не сохраняет никакие собственные плоскости в L^{n+1}.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть G – собственная связная подгруппа в $SO(V)_{\mathbb{R}p}$. Тогда G действует слабо неприводимо в V тогда и только тогда, когда она действует транзитивно в евклидовом пространстве $E = \partial L^{n+1} \setminus \{\mathbb{R}p\}$.

Доказательство. Мы утверждаем, что подгруппа $G \subset SO(V)_{\mathbb{R}p}$ действует слабо неприводимо в V тогда и только тогда, когда соответствующая подгруппа $G \subset \operatorname{Sim} E$ действует неприводимо в E. Если $G \subset SO(V)_{\mathbb{R}p}$ не является слабо неприводимой, то она сохраняет некоторое собственное невырожденное подпространство $U \subset V$. Так как G сохраняет также ортогональное дополнение $U^\perp \subset V$, и либо $U \cap C \neq \{0\}$, либо $U^\perp \cap C \neq \{0\}$, то можем считать, что $U \cap C \neq \{0\}$. Подгруппа $G \subset \operatorname{Sim} E$ сохраняет собственное аффинное подпространство $s_0((e_0 + E) \cap C \cap U) \subset E$. Обратно, если подгруппа $G \subset \operatorname{Sim} E$ сохраняет некоторое собственное аффинное подпространство $W \subset E$, то $G \subset SO(V)_{\mathbb{R}p}$ сохраняет собственное невырожденное векторное подпространство в V, порожденное множеством $s_0^{-1}(W) \subset e_0 + E$. Доказательство теоремы следует из частей (3) и (4) теоремы 1. □

4. Классификация транзитивных групп преобразований подобия евклидовых пространств и ее применение к группам голономии лоренцевых многообразий

Теперь рассмотрим связные слабо неприводимые, не являющиеся неприводимыми, подгруппы в $SO(V)$. Всякая такая группа G сохраняет изотропную прямую и сопряжена некоторой подгруппе в $SO(V)_{\mathbb{R}p}$.

Во втором разделе мы построили изоморфизм $SO(V)_{\mathbb{R}p} \simeq \operatorname{Sim} E$. Этот изоморфизм и теорема 2 дают нам взаимно-однозначное соответствие между связными слабо неприводимыми подгруппами $G \subset SO(V)_{\mathbb{R}p}$ и связными транзитивными подгруппами $G \subset \operatorname{Sim} E$.

Теорема 3. Пусть $G \subset \operatorname{Sim} E$ – связная транзитивная подгруппа. Тогда G является группой одного из следующих типов:

Тип 1. $G = (A \times H) \ltimes E$, где $A = \mathbb{R}^+$ – компонента единицы группы гомотетий E с центром 0, H

$\subset SO(\mathrm{E})$ – связная подгруппа Ли и E – группа сдвигов;

Тип 2. G = H á E;

Тип 3. G = ($A^{\Phi} \times H$) á E, где $\Phi : A \to SO(E)$ есть гомоморфизм и $A^{\Phi} = \{\Phi(a) \cdot a : a \in A\} \subset SO(\mathrm{E}) \times$ $\times$ A – группа винтовых гомотетий E;

Тип 4. G = ($H \times U^{\Psi}$) á W, где имеем ортогональное разложение $E = U \oplus W$, $H \subset SO(W)$, $\Psi : U \to SO(W)$ – гомоморфизм, и $U^{\Psi} = \{\Psi(u) \cdot u : u \in U\} \subset SO(W) \times U$ есть группа винтовых движений E.

Соответствующие подгруппы в $SO(V)_{Rp}$, при изоморфизме $SO(V)_{\mathbb{R}p} \simeq \mathrm{Sim}\, E$, имеют тот же тип, определенный Л. Берардом Бержери и А. Икемакхеном.

Доказательство. Обозначим через A, K и N связные подгруппы Ли в $SO(V)_{Rp}$, соответствующие подалгебрам A, K и $N \subset so(V)_{Rp}$. Относительно базиса p, e_1, ..., e_n, q эти группы имеют следующий матричный вид:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} a \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f \in SO(E) \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -X^t & -\frac{1}{2}X^t X \\ 0 & \mathrm{id} & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \in E \right\}$$

Имеем разложение $SO^0(V)_{Rp} = (A \times K)$ á N.

Вычисления показывают, что при изоморфизме $SO(V)_{\mathbb{R}p} \simeq \mathrm{Sim}\, E$ элемент $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in A$ соответствует гомотетии $X \mapsto aX$, элемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$ соответствует f Î SO(E), и элемент $\begin{pmatrix} 1 & -X^t & -\frac{1}{2}X^t X \\ 0 & \mathrm{id} & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ соответствует сдвигу $Y \mapsto Y + X$.

Пусть G Ì Sim E – транзитивная подгруппа. Обозначим через G соответствующую слабо неприводимую подгруппу в $SO(V)_{Rp}$. Так как мы рассматриваем группы с точностью до сопряженности, то в теореме 1 можем выбрать x = 0, тогда H Ì SO(E).

Для подгруппы G Ì SO $(V)_{Rp}$ имеем следующие два случая.

Случай 1. G сохраняет вектор p.

Случай 2. G сохраняет изотропную прямую Rp, но не сохраняет вектор p.

Рассмотрим эти случаи.

Случай 1. Имеем G Ì K á N. Значит, соответствующая подгруппа G Ì Sim E состоит из движений, т.е. G Ì Isom E. Из транзитивности G следует, что G Ì H á F, где H Ì SO (E), а F является нормальной подгруппой в G, действующей просто транзитивно в E. Следовательно, существует ортогональное разложение $E = U \oplus W$ и гомоморфизм Y : U ® SO(W) такой, что F = U ^{Y}á W.

Имеем следующие два подслучая.

Подслучай 1.1. Гомоморфизм Y является тривиальным. Значит, F = E и G = H á E. Из классификации Л. Берарда Бержери и А. Икемакхена видно, что G Ì SO $(V)_{Rp}$ является группой типа 2.

Подслучай 1.2. Гомоморфизм Y – нетривиальный. Можем предположить, что гомоморфизм dY : U ® SO (W) – инъективный. Действительно, если ker dY ¹{0}, то выберем разложение

$E = U_1 \oplus W_1$, где $W_1 = W \oplus \ker d\Psi$, а $U_1 \subset U$ есть ортогональное дополнение к $\ker d\Psi$ в U и рассмотрим $\Psi_1 = \Psi|_{U_1}$.

Мы утверждаем, что H коммутирует с $\Psi(U) \subset SO(W)$, более того, H действует тривиально на U и $H \subset SO(W)$. Пусть $f \in H$, $u \in U$. Так как F – нормальная подгруппа в G, то имеем $f \circ \Psi(u) \circ u \circ f^{-1} = w \circ \Psi(u_1) \circ u_1$ для некоторого $w \in W$ и $u_1 \in U$. Следовательно, для всех $v \in E$ мы имеем $f(u) + f \circ \Psi(u) \circ f^{-1}(v) = w + u_1 + \Psi(u_1)v$. Так как это выполняется для всех $v \in E$, получаем $f \circ \Psi(u) \circ f^{-1} = \Psi(u_1)$. Докажем, что $\Psi(u) = \Psi(u_1)$. Пусть $\mathfrak{l}(\Psi(U))$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(H)$ алгебры Ли, соответствующие группам Ли $\Psi(U)$ и H. Имеем $(\mathfrak{h} + \mathfrak{l}(\Psi(U)))' = \mathfrak{h} + [\mathfrak{h}, \Psi(U)]$. Так как $[\mathfrak{h}, \Psi(U)] \subset \Psi(U)$ и алгебра Ли $\mathfrak{l}(\Psi(U))$ – коммутативна, имеем $(\mathfrak{h} + \mathfrak{l}(\Psi(U)))'' = \mathfrak{h}'$. Если $\Psi(u) \neq \Psi(u_1)$, то $[\mathfrak{h}, \Psi(U)] \neq \{0\}$ и $(\mathfrak{h} + \mathfrak{l}(\Psi(U)))' \neq (\mathfrak{h} + \mathfrak{l}(\Psi(U)))''$. Так как подалгебра $\mathfrak{h} + \mathfrak{l}(\Psi(U)) \subset \mathfrak{so}(E)$ компактна, получаем противоречие. Таким образом, $\Psi(u) = \Psi(u_1)$, и H коммутирует с $\Psi(U)$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{l}(G)$ группы Ли G. Имеем $\mathfrak{l}(G) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}(U^\Psi) \ltimes W$. Так как $U^\Psi = \{\Psi(u) \circ u : u \in U\}$, то $\mathfrak{l}(U^\Psi) = \{d\Psi(u) + u : u \in U\}$. Для $x \in \mathfrak{h}$ и $d\Psi(u) + u \in \mathfrak{l}(U^\Psi)$ имеем $[x, d\Psi(u) + u] = xu \subset U$. Так как $U \cap \mathfrak{l}(G) = \{0\}$, то $xu = 0$. Следовательно, H действует транзитивно в U. Так как $H \subset SO(E)$ и W ортогонально к U, имеем $H(W) \subset W$ и $H \subset SO(W)$.

Получаем, что $d\Psi(U) \subset \mathfrak{so}(W)$ коммутативна и коммутирует с $\mathfrak{h}$. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{h} \oplus d\Psi(U)$. Имеем $\mathfrak{z}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \oplus d\Psi(U)$. Положим $\psi = d\Psi^{-1} : d\Psi(U) \to U$ и продолжим до линейного отображения $\psi : \mathfrak{z}(\mathfrak{B}) \to U$, полагая $\psi|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})}$. Таким образом,

$$\mathfrak{l}(G) = (\mathfrak{B}' \oplus \{\psi(A) + A : A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{B})\}) \ltimes W.$$

Ясно, что $\mathfrak{l}(G)$ является алгеброй типа 4, и G есть группа типа 4.

Случай 2. В этом случае имеем $G \subset \mathrm{Sim}\, E$, следовательно, $G = (A_1 \times H) \ltimes F$, где A_1 – однопараметрическая подгруппа в G, сохраняющая точку 0, $H \subset SO(E)$ коммутирует с A_1, и F – нормальная подгруппа в G, действующая просто транзитивно в E.

Рассмотрим 2 подслучая.

Подслучай 2.1. Имеем $A_1 = A$ – компонента единицы группы гомотетий E с центром $0 \in E$.

Мы утверждаем, что $F = E$. Действительно, предположим, что $F = U^\Psi \ltimes W$ и гомоморфизм Ψ – нетривиальный. Пусть $u \in U$, $w \in W$ и $1 \neq \lambda \in A = \mathbb{R}^+$. Так как подгруппа $F \subset G$ является нормальной, получаем $\lambda \circ \Psi(u) \circ u \circ w \circ \lambda^{-1} \in U^\Psi \ltimes W$. Пусть $v \in E$. Имеем

$$(\lambda \circ \Psi(u) \circ u \circ w \circ \lambda^{-1})v = \Psi(u)(\lambda \circ u \circ w \circ \lambda^{-1})v = \Psi(u)(\lambda \circ u \circ w(\lambda^{-1}v)) =$$
$$= \Psi(u)(\lambda(u + w + \lambda^{-1}v)) = \Psi(u)(\lambda u + \lambda w + v)$$

Следовательно, $\lambda \circ \Psi(u) \circ u \circ w \circ \lambda^{-1} = \Psi(u) \circ (\lambda u) \circ (\lambda w) \in U^\Psi \ltimes W$. Из этого следует $u = \lambda u$ для всех $u \in U$, отсюда $\lambda = 1$. Получаем противоречие. Таким образом, $F = E$.

Ясно, что $G = (A_1 \times H) \ltimes F$ – группа типа 1.

Подслучай 2.2. В этом случае $A_1 \neq A$, тогда $A_1 \subset A \times SO(E)$. Как и в подслучае 2.1, можем доказать, что $F = E$.

Пусть $\xi : \mathbb{R} \to A_1$ – параметризация группы A_1. Определим гомоморфизм $\xi_1 : \mathbb{R} \to A$ и $\xi_2 : \mathbb{R} \to SO(E)$ условием $\xi(t) = \xi_1(t)\ \xi_2(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как $A_1 \not\subset SO(E)$, то гомоморфизм ξ_1 является изоморфизмом. Положим $\Phi = \xi_2 \circ \xi_1^{-1} : A \to SO(E)$. Имеем $A_1 = \{\Phi(a)\ a \mid a \in A\} \subset SO(n) \times \mathbb{R}$.

Получаем, что $\mathfrak{l}(G) = (\mathfrak{l}(A_1) \oplus \mathfrak{h}) \ltimes E$ и $\mathfrak{l}(A_1) = \{d\Phi(a) + a : a \in \mathfrak{l}(A)\}$.

Заметим, что подалгебра $\mathfrak{l}(d\Phi(\mathfrak{l}(A))) \subset \mathfrak{so}(E)$ коммутативна и коммутирует с $\mathfrak{h}$. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}(d\Phi(\mathfrak{l}(A)))$. Ясно, что $\mathfrak{z}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{l}(d\Phi(\mathfrak{l}(A)))$. Положим $\varphi = (d\Phi)^{-1} : d\Phi(\mathfrak{l}(A)) \to \mathfrak{l}(A)$ и продолжим φ до линейного отображения $\varphi : \mathfrak{z}(\mathfrak{B}) \to \mathfrak{l}(A)$, полагая $\varphi|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{h})} = 0$. Таким образом,

$$\mathfrak{l}(G) = (\mathfrak{B}' \oplus \{\varphi(A) + A : A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{B})\}) \ltimes E.$$

Ясно, что G – группа типа 3. Это завершает доказательство теоремы. □

5. Транзитивные группы движений пространства Лобачевского L^{n+1}

Напомним, что мы рассматриваем (n + 2)-мерное пространство Минковского (V, h) и базис p, e_1, ..., e_n, q в V, относительно которого матрица Грама формы h имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & E_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_n – n-мерная единичная матрица. Мы рассматриваем векторное подпространство E Ì V, порожденное векторами e_1, ..., e_n, как евклидово пространство относительно скалярного произведения $h|_E$. Обозначим через $SO(V)_{Rp}$ подгруппу в SO(V), сохраняющую прямую Rp. Для группы Ли $SO^0(V)_{Rp}$ имеем разложение $SO^0(V)_{Rp}$ = (A ´ K) á N, где относительно базиса p, e_1, ..., e_n, q группы A, K и N имеют следующий матричный вид:

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} : a\in\mathbb{R}, a>0\right\}, K=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : f\in SO(E)\right\} \text{ и } N=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -X^t & -\frac{1}{2}X^tX \\ 0 & \mathrm{id} & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : X\in E\right\}$$

Теорема 4. Пусть G Ì SO(V) – связная подгруппа, действующая транзитивно в пространстве Лобачевского L^{n+1}. Тогда либо G = SO^0(V), либо G сохраняет изотропную прямую l Ì V, и существует базис p, e_1, ..., e_n, q пространства V, как и выше, такой, что l = Rp и G является одной из следующих групп:

(1) (A ´ H) á N , где H Ì K – подгруппа;

(2) ($A^Φ$ ´ H) á N, где Φ : A ® K – нетривиальный гомоморфизм и $A^Φ$ = {Φ(a) × a : a Î A} Ì K ´ A.

Более того, группы вида A á N и $A^Φ$ á N исчерпывают все связные подгруппы в SO(V) , которые действуют просто транзитивно в L^{n+1}.

Заметим, что A – группа сдвигов в L^{n+1} вдоль прямой h = (Rp ⊕ Rq) ∩ L^{n+1}, K – группа вращений вокруг h, N – группа параболических сдвигов вдоль 2-мерных плоскостей в L^{n+1} и $A^Φ$ – группа винтовых сдвигов вдоль прямой h.

Доказательство. Предположим, что подгруппа G Ì SO(V) действует транзитивно в L^{n+1}. Тогда она не сохраняет никакие плоскости в L^{n+1}, следовательно, G действует слабо неприводимо в V. Если G действует неприводимо в V, то G Ì SO^0(V) [8, 9].

Если G действует слабо неприводимо и не является неприводимой в V, тогда G сохраняет изотропную прямую l Ì V. Предположим, что l = Rp. Тогда G является группой типа 1, 2, 3 или 4.

Мы утверждаем, что подгруппа K á N Ì SO(V) не действует транзитивно в L^{n+1}. Действительно, любой элемент из K á N переводит вектор $\frac{1}{2}p-q\in L^{n+1}$ в некоторый вектор u – q, где u Î span {p, e_1, ..., e_n}, следовательно, нет элементов из K á N, которые переводят $\frac{1}{2}p-q\in L^{n+1}$ в $p-\frac{1}{2}q\in L^{n+1}$. Значит, группы типов 2 и 4 не действуют транзитивно в L^{n+1}.

Мы должны доказать, что группы типов 1 и 3, т.е. группы вида (A ´ H) á N и ($A^Φ$ ´ H) á N, действуют транзитивно в L^{n+1}. Пусть $v=xp+\alpha+yq\in L^{n+1}$ и $w=xp+\beta+yq\in L^{n+1}$, где $\alpha,\beta\in E$. Тогда $2xy+\eta(\alpha,\alpha)=-1$ и $2xy+\eta(\beta,\beta)=-1$. Пусть $X=\frac{\alpha-\beta}{y}$. Элемент $\begin{pmatrix} 1 & -X^t & -\frac{1}{2}X^tX \\ 0 & \mathrm{id} & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in N$ переводит u в w.

Пусть $v = x_1 p + \beta + y_1 q \in L^{n+1}$, т.е. $2x_1 y_1 + \eta(\beta, \beta) = -1$.

Элемент $\begin{pmatrix} \frac{x_1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{id} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{x_1} \end{pmatrix} \in A$ переводит w в v. Элемент $\begin{pmatrix} \frac{x_1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi\left(\frac{x_1}{x}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{x_1} \end{pmatrix} \in A^{\Phi}$ переводит w в $xp + \Phi\left(\frac{x_1}{x}\right)(\beta) + yq \in L^{n+1}$. Таким образом, существуют элементы в (A ´ H) á N и (A$^{\Phi}$ ´ H) á N, переводящие u в v, т.е. группы (A ´ H) á N и (A$^{\Phi}$ ´ H) á N действуют транзитивно в L^{n+1}.

Заметим, что элементы подгруппы H Ì G сохраняют точку $p - \frac{1}{2}q \in L^{n+1}$. Так как dim L^{n+1} = dim (A á N) = dim (A$^{\Phi}$ á N) и пространство L^{n+1}односвязно, получаем, что группы вида A á N и A$^{\Phi}$ á N являются единственными связными подгруппами в SO(V), которые действуют просто транзитивно в L^{n+1}. □

Автор выражает благодарность М.В. Лосику и Д.В. Алексеевскому за помощь, оказанную при работе над этой темой.

Библиографический список

1. Borel A., Lichnerowicz A. Groupes d'holonomie des varietes riemanniennes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1952. V. 234. P. 279–300.
2. Berger M. Sur les groupers d'holonomie des varietes aconnexion affine et des varietes riemanniennes // Bull. Soc. Math. France. 1955. V. 83. P. 279–330.
3. Besse A.L. Einstein manifolds. Berlin; Heidelberg; N.Y., 1987.
4. Joyce D. Compact manifolds with special holonomy. Oxford, 2000.
5. Алексеевский Д.В. Римановы пространства с необычными группами голономии // Функциональный анализ и его приложения. 1968. Т. 2, вып. 2. С. 1–10.
6. Ambrose W., Singer I.M. A theorem on holonomy // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 79. P. 428-443.
7. Wu H. Holonomy groups of indefinite metrics // Pacific J. Math. 1967. V. 20. P. 351–382.
8. Di Scala A.J., Olmos C. The geometry of homogeneous submanifolds of hyperbolic space // Math. J. 2001. V. 237. P. 199–209.
9. Boubel C., Zeghib A. Dynamics of some Lie subgroups of O(n,1) applications // Prepublication de l'ENS Lyon. 2003. № 315.
10. Berard Bergery L., Ikemakhen A. On the holonomy of Lorentzian manifolds // Proc. of symp. in pure math. 1993. V. 54. P. 27–40.
11. Алексеевский Д.В. Однородные римановы многообразия отрицательной кривизны // Мат. сб. 1975. № 1. С. 93–117.
12. Алексеевский Д.В., Винберг Э.Б., Солодовников А.С. Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. фунд. направления. 1988. Т. 29. С. 5–146.
13. Boubel C. On the holonomy of Lorentzian metrics // Prepublication de l'ENS Lyon. 2004. № 323.
14. Ikemakhen A. Examples of indecomposable non-irreducible Lorentzian manifolds // Ann. Sci. Math. Quebec. 1996. V. 20, № 1. P. 53–66.
15. Leistner T. Berger algebras, weak-Berger algebras and Lorentzian holonomy. Sfb 288-preprint № 567. Berlin, 2002.
16. Leistner T. Towards a classification of Lorentzian holonomy groups // ArXiv:math.DG/0305139. 2003.
17. Leistner T. Towards a classification of Lorentzian holonomy groups. Part II: semisimple, non-simple weak-Berger algebras // ArXiv:math.DG/0309274. 2003.
18. Винберг Э.Б., Онищик А.Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., 1995.