

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия



Серия Математика. Механика. Информатика

2020

Том 20

Выпуск 1



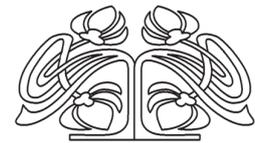
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 1

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2020 Том 20

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издается с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Антонов С. Ю., Антонова А. В. О квазимногочленах Капелли. II 4

Ignatiev M. Yu. Asymptotics of Solutions of Some Integral Equations Connected with Differential Systems with a Singularity
[Игнатъев М. Ю. Асимптотики решений некоторых интегральных уравнений, связанных с дифференциальными системами с особенностью] 17

Можей Н. П. О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. I 29

Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On Definability of Universal Graphic Automata by Their Input Symbol Semigroups
[Молчанов В. А., Фарахутдинов Р. А. Об определяемости универсальных графических автоматов своими полугруппами входных сигналов] 42

Трынин А. Ю., Киреева Е. Д. Принцип локализации на классе функций, интегрируемых по Риману, для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля 51

Механика

Иванова Н. А., Бородина К. А. Термокапиллярное движение тонкой пленки бинарного спиртосодержащего раствора 64

Лапина Е. О., Семенов А. А. Исследование прочности и устойчивости ортотропных конических оболочек и конических панелей 79

Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата 93

Информатика

Абросимов М. Б., Судани Х. Х. К., Лобов А. А. Построение минимальных реберных расширений графа без проверки на изоморфизм 105

Григорьева Е. Г., Клячин В. А. Исследование статистических характеристик текста на основе графовой модели лингвистического корпуса 116

Левенец С. А., Веревин Т. Т., Маханьков А. В., Панферов А. Д., Пирогов С. О. Моделирование динамики безмассовых носителей заряда в двумерной системе 127

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 года

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (специальности: 01.01.01; 01.01.02; 01.01.06; 01.01.07; 01.01.09; 01.02.04; 01.02.05; 01.02.06; 01.02.08; 05.13.01; 05.13.18).

Журнал входит в международные базы данных Emerging Sources Citation Index, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна

Редактор
Садыкова Марина Владимировна

Художник
Соколов Дмитрий Валерьевич

Редактор-стилист
Кочкаева Инна Анатольевна

Верстка
Халова Виктория Анатольевна

Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич

Корректор
Кочкаева Инна Анатольевна

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89
E-mail: izvestiya@info.sgu.ru

Подписано в печать 25.02.20.
Подписано в свет 02.03.20.

Формат 60x84 1/8.

Усл. печ. л. 16,04(17,25).

Тираж 500 экз. Заказ 9-Т.

Цена свободная

Отпечатано в типографии
Саратовского университета.

Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2020



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <http://mmi.sgu.ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию журнала и соответствующие его профилю, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от автора, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <http://mmi.sgu.ru>.

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@info.sgu.ru

Website: <http://mmi.sgu.ru/>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-Polynomials of Capelli. II 4

Ignatiev M. Yu. Asymptotics of Solutions of Some Integral Equations Connected with Differential Systems with a Singularity 17

Mozhey N. P. On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. I 29

Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On Definability of Universal Graphic Automata by Their Input Symbol Semigroups 42

Trynin A. Yu., Kireeva E. D. The Principle of Localization at the Class of Functions Integrable in the Riemann for the Processes of Lagrange – Sturm – Liouville 51

Mechanics

Ivanova N. A., Borodina K. A. Thin Film Thermocapillary Motion of Binary Alcohol-Containing Solution 64

Lapina E. O., Semenov A. A. Investigation of Strength and Buckling of Orthotropic Conical Shells and Conical Panels 79

Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Quaternion Models and Algorithms for Solving the General Problem of Optimal Reorientation of Spacecraft Orbit 93

Computer Sciences

Abrosimov M. B., Sudani H. H. K., Lobov A. A. Construction of All Minimal Edge Extensions of the Graph with Isomorphism Rejection 105

Grigorieva E. G., Klyachin V. A. The Study of the Statistical Characteristics of the Text Based on the Graph Model of the Linguistic Corpus 116

Levenets S. A., Verevin T. T., Makhankov A. V., Panferov A. D., Pirogov S. O. Modeling the Dynamics of Massless Charge Carriers in Two-Dimensional System 127



**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Индейцев Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

(Санкт-Петербург, Россия)

Каплунов Юлий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Республика Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеенко Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Морозов Никита Фёдорович, доктор физ.-мат. наук, акад. РАН (Санкт-Петербург, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Пархоменко Павел Павлович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D., профессор (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Республика Беларусь)

Субботин Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Екатеринбург, Россия)

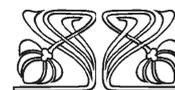
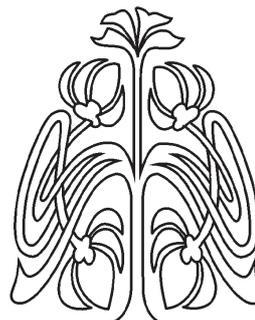
Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Шальто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)



EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL

**«IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY. NEW SERIES.
SERIES: MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS»**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Dmitry A. Indeitsev (St. Petersburg, Russia)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

Avgust P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Nikita F. Morozov (St. Petersburg, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan', Russia)

Pavel P. Parkhomenko (Moscow, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Shoji IMATANI (Kyoto, Japan)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny, Moscow region, Russia)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Yuri N. Subbotin (Ekaterinburg, Russia)

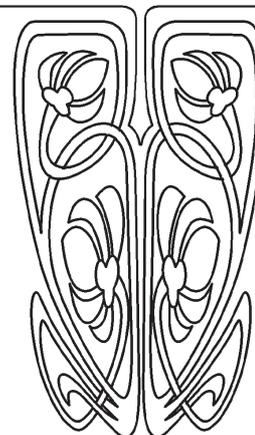
Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)

**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**





МАТЕМАТИКА

УДК 512

О квазимногочленах Капелли. II

С. Ю. Антонов, А. В. Антонова

Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51, antonovst-vm@rambler.ru

Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, Россия, 420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51, antonovakazan@rambler.ru

В данной работе продолжено исследование некоторого вида многочленов типа Капелли (квазимногочленов Капелли), принадлежащих свободной ассоциативной алгебре $F\{X \cup Y\}$, рассматриваемой над произвольным полем F и порожденной двумя непересекающимися счетными множествами X, Y . Доказано, что если $\text{char } F = 0$, то среди квазимногочленов Капелли степени $4k - 1$ существуют такие, которые не являются ни следствиями стандартного многочлена S_{2k}^- , ни тождествами матричной алгебры $M_k(F)$. Показано, что если $\text{char } F = 0$, то только два из шести квазимногочленов Капелли степени $4k - 1$ будут тождествами нечетной компоненты Z_2 -градуированной матричной алгебры $M_{k+k}(F)$. Также доказано, что все квазимногочлены Капелли степени $4k + 1$ являются тождествами некоторых подпространств нечетной компоненты Z_2 -градуированной матричной алгебры $M_{m+k}(F)$ при $m > k$. Приведены условия, при которых квазимногочлены Капелли степени $4k + 1$ будут тождествами подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$.

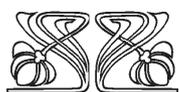
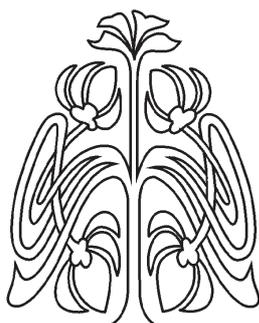
Ключевые слова: T -идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

Поступила в редакцию: 04.02.2019 / Принята: 03.03.2019 /
Опубликована: 02.03.2020

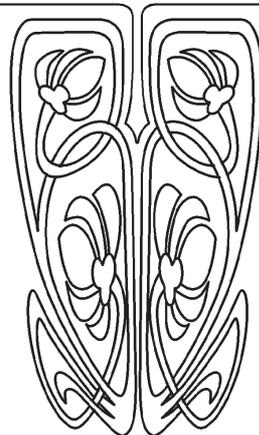
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16>

Продолжение. Начало см.: Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 371–382.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F , порожденная счетным множеством Z , которое представим в виде $X \cup Y$, где $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — непересекающиеся счетные множества, $f_{2n-1}, g_{2n-1}, b_{2n-1}, h_{2n-1}, a_{2n-1}, c_{2n-1}, f_{2n}, g_{2n}, b_{2n}, h_{2n}, a_{2n}, c_{2n}$ — многочлены типа Капелли (квазимногочлены Капелли) алгебры $F\{Z\}$, исследование которых начато в [1, 2]. В данной работе мы продолжаем изучение этих многочленов и показываем, что они являются тождествами некоторых подпространств матричной алгебры $M_m(F)$.

Полученные в статье результаты о квазимногочленах Капелли представляют интерес как сами по себе, поскольку эти многочлены оказываются минимальными тождествами некоторых подпространств алгебры $M_{m+k}(F)$ (с этой точки зрения см., например, работы [3–7]), так и в связи с задачей описания идеала $T_{Z_2}(M_{m+k}(F))$ Z_2 -градуированных тождеств Z_2 -градуированной матричной алгебры $M_{m+k}(F)$ при любых m, k и F . Заметим, что, несмотря на отдельные имеющиеся результаты (см., например, [8–12]), общего решения этой задачи до сих пор нет.

1. О НЕКОТОРЫХ МНОГОЧЛЕНАХ АЛГЕБРЫ $F\{Z\}$

Пусть S_n — симметрическая группа степени n , $A_n^+ = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn } \sigma = 1\}$, $A_n^- = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn } \sigma = -1\}$, $S_n^-(\bar{x}) = S_n^-(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ —

стандартный многочлен степени n ; p, q — какие-нибудь многочлены алгебры $F\{Z\}$, $\{p\}^T$ — T -идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный многочленом p . Напомним, что двусторонний идеал I алгебры $F\{Z\}$ называется T -идеалом и обозначается символом $I \triangleleft_T F\{Z\}$, если для любого эндоморфизма φ алгебры $F\{Z\}$ справедливо включение $\varphi(I) \subseteq I$. Далее будем говорить, что многочлен q является следствием многочлена p (следует из p), если $q \in \{p\}^T$. Кроме того, пусть $M_m(F)$ — алгебра квадратных матриц размера $m \times m$, $T[M_m(F)]$ — идеал ее полиномиальных тождеств. Теорема Амицура–Левицкого утверждает [13], что $S_{2m}^- \in T[M_m(F)]$ и что если $\Phi \in T[M_m(F)]$, то $\text{deg } \Phi \geq 2m$. Опираясь на этот факт, докажем следующее предположение.

Предложение 1. Пусть $\text{char } F = 0$, H — произвольное непустое подмножество группы S_{2m} , $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in H} \sum_{\tau \in S_{2m-1}} \text{sgn } \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(2m-1)} x_{\pi(2m)}$. Тогда

$$P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_m(F)].$$

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_m(F)]$, и, значит, для подстановки аргументов $(x_1, \dots, x_{2m}) = (1, \dots, 1)$, $(y_1, \dots, y_{2m-1}) = (a_1, \dots, a_{2m-1})$, где $1, a_1, \dots, a_{2m-1} \in M_m(F)$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} 0 &= P_{4m-1}(1, \dots, 1, a_1, \dots, a_{2m-1}) = \sum_{\pi \in H} \sum_{\tau \in S_{2m-1}} \text{sgn } \tau 1_{\pi(1)} a_{\tau(1)} 1_{\pi(2)} \cdots a_{\tau(2m-1)} 1_{\pi(2m)} = \\ &= |H| S_{2m-1}^-(a_1, \dots, a_{2m-1}). \end{aligned}$$

Отсюда и из произвольности выбора элементов a_1, \dots, a_{2m-1} алгебры $M_m(F)$ получаем, что стандартный многочлен $S_{2m-1}^-(\bar{x}) \in T[M_m(F)]$, что противоречит теореме Амицура–Левицкого. Следовательно, наше предположение неверно и потому $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_m(F)]$. \square

Следствие 1. Если $\text{char } F = 0$, то $C_{4m-1, \{1\}}(\bar{x}, \bar{y})$, $a_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $c_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_m(F)]$.



Доказательство. Последовательно полагая в предложении 1 H равным S_{2m} , A_{2m}^+ , A_{2m}^- , получим требуемый результат. \square

Следствие 2. Если $\text{char } F = 0$, то многочлен $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin \{S_{2m}^-(\bar{x})\}^T$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{S_{2m}^-(\bar{x})\}^T$, и, значит, с учетом теоремы Амицура – Левицкого имеем включения $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{S_{2m}^-(\bar{x})\}^T \subseteq T[M_m(F)]$. Следовательно, $P_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_m(F)]$, что противоречит предложению 1. Таким образом, наше предположение неверно. \square

Следствие 3. Если $\text{char } F = 0$, то $C_{4m-1, \{1\}}(\bar{x}, \bar{y}), a_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), c_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin \{S_{2m}^-(\bar{x})\}^T$.

Доказательство. Последовательно полагая в следствии 2 H равным S_{2m} , A_{2m}^+ , A_{2m}^- , получим требуемый результат. \square

Рассуждая так же, как и выше, приходим к следующим результатам.

Предложение 2. Если $\text{char } F = 0$, то многочлены $f_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), g_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_m(F)]$.

Следствие 4. Если $\text{char } F = 0$, то многочлены $f_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), g_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin \{S_{2m}^-(\bar{x})\}^T$.

Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $M_{m+k}(F)$ — алгебра матриц, градуированная подпространствами $M_0^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{m \times m}(F) & 0_{m \times k} \\ 0_{k \times m} & D_{k \times k}(F) \end{pmatrix} \right\}$, $M_1^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B_{m \times k}(F) \\ A_{k \times m}(F) & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \right\}$, $T[M_1^{(m,k)}(F)]$ — идеал тождеств векторного подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$.

Предложение 3. Пусть $\text{char } F = 0$ и многочлен $d_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \{f_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), g_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), a_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), c_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y})\}$. Тогда $d_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_1^{(m,m)}(F)]$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда для любых матриц $a^i = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B_{m \times m}^i \\ A_{m \times m}^i & 0_{m \times m} \end{pmatrix}$, $b^j = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & C_{m \times m}^j \\ D_{m \times m}^j & 0_{m \times m} \end{pmatrix} \in M_1^{(m,m)}(F)$, где $i = \overline{1, 2m}$, $j = \overline{1, 2m-1}$, будем иметь

$$\begin{aligned} & d_{4m-1}(a^1, \dots, a^{2m}, b^1, \dots, b^{2m-1}) = \\ & = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & d_{4m-1}(B^1, \dots, B^{2m}, D^1, \dots, D^{2m-1}) \\ d_{4m-1}(A^1, \dots, A^{2m}, C^1, \dots, C^{2m-1}) & 0_{m \times m} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $d_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_m(F)]$, а это противоречит или следствию 1, или предложению 2. Таким образом, наше предположение неверно и, значит, $d_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_1^{(m,m)}(F)]$. \square

Заметим, что согласно предложению 3 работы [14] многочлены $b_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), h_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_m(F)]$, и потому, как нетрудно видеть, справедливы включения $b_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}), h_{4m-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,m)}(F)]$. Таким образом, в случае, когда $\text{char } F = 0$, только два из шести квазимногочленов Капелли степени $4m-1$ являются тождествами подпространства $M_1^{(m,m)}(F)$.



2. О ТОЖДЕСТВАХ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВА $M_1^{(m,k)}(F)$

Пусть n, m, k — произвольные натуральные числа, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $M_{k \times m}(F)$, $M_{m \times k}(F)$ — векторные пространства над F , элементами которых являются прямоугольные матрицы размера $k \times m$ и $m \times k$ соответственно, $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^\pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\pi(2k+1)}$ — какой-нибудь полилинейный многочлен алгебры $F\{Z\}$. Для любого $i \in I_{2k+1}$ положим

$$S_{2k+1}(i) = \{\sigma \in S_{2k+1} \mid \sigma(i) = i\}.$$

Нетрудно видеть, что отображения $\psi_i : S_{2k+1}(i) \rightarrow S_{2k}$, $\xi_i : S_{2k} \rightarrow S_{2k+1}(i)$ такие, что для любых $\sigma \in S_{2k+1}(i)$, $\pi \in S_{2k}$

$$\psi_i(\sigma)(j) = \begin{cases} \sigma(j), & \text{если } j \leq i-1 \text{ и } \sigma(j) \leq i-1, \\ \sigma(j) - 1, & \text{если } j \leq i-1 \text{ и } \sigma(j) \geq i+1, \\ \sigma(j+1), & \text{если } j \geq i \text{ и } \sigma(j+1) \leq i-1, \\ \sigma(j+1) - 1, & \text{если } j \geq i \text{ и } \sigma(j+1) \geq i+1, \end{cases}$$

$$\xi_i(\pi)(j) = \begin{cases} \pi(j), & \text{если } j \leq i-1 \text{ и } \pi(j) \leq i-1, \\ \pi(j) + 1, & \text{если } j \leq i-1 \text{ и } \pi(j) > i-1, \\ i, & \text{если } j = i, \\ \pi(j-1), & \text{если } j \geq i+1 \text{ и } \pi(j-1) \leq i-1, \\ \pi(j-1) + 1, & \text{если } j \geq i+1 \text{ и } \pi(j-1) > i-1 \end{cases}$$

являются изоморфизмами групп и что $\xi_i = \psi_i^{-1}$.

Лемма 1. Для многочлена $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$ справедливы равенства

$$1) \Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{2k+1} x_i \tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_i),$$

$$2) \Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{2k+1} \tilde{\Psi}_{4k}^i(\bar{x}_i, \bar{y}) x_i, \text{ где}$$

$$\tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_i) = \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^{\sigma_i \mu_i} y_{\tau(1)} x_{\sigma_i(1)} \cdots y_{\tau(i-1)} x_{\sigma_i(i-1)} y_{\tau(i)} x_{\sigma_i(i+1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\sigma_i(2k+1)},$$

$$\tilde{\Psi}_{4k}^i(\bar{x}_i, \bar{y}) = \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^{\sigma_i \rho_i} x_{\sigma_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\sigma_i(i-1)} y_{\tau(i-1)} x_{\sigma_i(i+1)} y_{\tau(i)} \cdots x_{\sigma_i(2k+1)} y_{\tau(2k)},$$

$$\mu_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & 2k+1 \\ i & 1 & 2 & \dots & i-2 & i-1 & i+1 & \dots & 2k+1 \end{pmatrix}, \rho_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & \dots & 2k & 2k+1 \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & 2k+1 & i \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для любого $i \in I_{2k+1}$ положим $S'_{2k+1}(i) = \{\pi \in S_{2k+1} \mid \pi(1) = i\}$, $\tilde{S}_{2k+1}(i) = \{\omega \in S_{2k+1} \mid \omega(2k+1) = i\}$. Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in S'_{2k+1}(i)$, $\omega \in \tilde{S}_{2k+1}(i)$ можно представить в виде $\pi = \sigma \mu_i$, $\omega = \gamma \rho_i$, где $\sigma, \gamma \in S_{2k+1}(i)$. Тогда мы можем записать, что

$$\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^\pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\pi(2k+1)} =$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{\pi_i \in S'_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi_i} x_{\pi_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\pi_i(2k+1)} = \\
 &= \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\sigma_i \mu_i} x_{\sigma_i \mu_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\sigma_i \mu_i(2k+1)} = \\
 &= \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\sigma_i \mu_i} x_i y_{\tau(1)} x_{\sigma_i(1)} \cdots y_{\tau(i-1)} x_{\sigma_i(i-1)} y_{\tau(i)} x_{\sigma_i(i+1)} \cdots y_{\tau(2k)} x_{\sigma_i(2k+1)} = \\
 &= \sum_{i=1}^{2k+1} x_i \tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_i).
 \end{aligned}$$

Аналогично получаем второе равенство леммы 1. □

Замечание 1. Последовательно полагая $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$ равным $b_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $a_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $c_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $f_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$ и учитывая предложение 3 из [1] и предложение 3 из [2], будем иметь

$$\begin{aligned}
 b_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} x_i a_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_i) = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} b_{4k}(\bar{x}_i, \bar{y}) x_i, \\
 h_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} x_i c_{4k}(\bar{y}, \bar{x}_i) = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} h_{4k}(\bar{x}_i, \bar{y}) x_i, \\
 a_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} b_{4k}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i-1}}) + \sum_{i=1}^k x_{2i} h_{4k}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i}}) = \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} a_{4k}(\widehat{\bar{x}_{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} + \sum_{i=1}^k c_{4k}(\widehat{\bar{x}_{2i}}, \bar{y}) x_{2i}, \\
 c_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} h_{4k}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i-1}}) + \sum_{i=1}^k x_{2i} b_{4k}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i}}) = \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} c_{4k}(\widehat{\bar{x}_{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} + \sum_{i=1}^k a_{4k}(\widehat{\bar{x}_{2i}}, \bar{y}) x_{2i}, \\
 f_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} f_{4k}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i-1}}) - \sum_{i=1}^k x_{2i} g_{4k}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i}}) = \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} f_{4k}(\widehat{\bar{x}_{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^k g_{4k}(\widehat{\bar{x}_{2i}}, \bar{y}) x_{2i}, \\
 g_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} g_{4k}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i-1}}) - \sum_{i=1}^k x_{2i} f_{4k}(\bar{y}, \widehat{\bar{x}_{2i}}) = \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} g_{4k}(\widehat{\bar{x}_{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^k f_{4k}(\widehat{\bar{x}_{2i}}, \bar{y}) x_{2i}.
 \end{aligned}$$



Лемма 2. Для любого $i \in I_{2k+1}$ справедливы включения $\tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_i) \in \{\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})\}^T$, $\tilde{\Psi}_{4k}^i(\bar{x}_i, \bar{y}) \in \{\Psi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})\}^T$, где

$$\begin{aligned}\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) &= \sum_{\tau \in S_{2k}} \sum_{\pi \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\psi_i^{-1}(\pi)\mu_i} x_{\tau(1)} y_{\pi(1)} x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(2k)} y_{\pi(2k)}, \\ \Psi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_{2k}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\psi_i^{-1}(\pi)\rho_i} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)}.\end{aligned}$$

Доказательство. Для любого $i \in I_{2k+1}$ определим эндоморфизмы φ_i, χ_i алгебры $F\{Z\}$:

$$\begin{aligned}\varphi_i(z) &= \begin{cases} z, & \text{если } z \notin \{x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_{2k}\}, \\ y_s, & \text{если } z = x_s, 1 \leq s \leq 2k, \\ x_s, & \text{если } z = y_s \text{ и } 1 \leq s \leq i-1, \\ x_{s+1}, & \text{если } z = y_s \text{ и } i \leq s \leq 2k, \end{cases} \\ \chi_i(z) &= \begin{cases} z, & \text{если } z \notin \{x_1, \dots, x_{2k}\}, \\ x_s, & \text{если } z = x_s, 1 \leq s \leq i-1, \\ x_{s+1}, & \text{если } z = x_s \text{ и } i \leq s \leq 2k. \end{cases}\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\varphi_i(\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})) = \tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_i)$, $\chi_i(\Psi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})) = \tilde{\Psi}_{4k}^i(\bar{x}_i, \bar{y})$, и, значит, $\tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_i) \in \{\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})\}^T$, $\tilde{\Psi}_{4k}^i(\bar{x}_i, \bar{y}) \in \{\Psi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})\}^T$. \square

Замечание 2. Из определения эндоморфизмов φ_i, χ_i следует, что для любых матриц $A^1, \dots, A^{2k} \in M_{k \times m}(F)$, $B^1, \dots, B^{2k} \in M_{m \times k}(F)$ и всякого $s \in I_{2k+1}$ справедливы равенства $\tilde{\Phi}_{4k}^s(\bar{A}; \bar{B}) = \Phi_{4k}^s(\bar{A}; \bar{B})$, $\tilde{\Phi}_{4k}^s(\bar{B}; \bar{A}) = \Phi_{4k}^s(\bar{B}; \bar{A})$, $\tilde{\Psi}_{4k}^s(\bar{A}; \bar{B}) = \Psi_{4k}^s(\bar{A}; \bar{B})$, $\tilde{\Psi}_{4k}^s(\bar{B}; \bar{A}) = \Psi_{4k}^s(\bar{B}; \bar{A})$, где $\bar{A} = (A^1, \dots, A^{2k})$, $\bar{B} = (B^1, \dots, B^{2k})$.

Положим

$$\begin{aligned}K_1 &= \{f_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), g_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), b_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), h_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), a_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}), c_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})\}, \\ K_0 &= \{\pm f_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm g_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm b_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm h_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm a_{4k}(\bar{x}', \bar{y}), \pm c_{4k}(\bar{x}', \bar{y})\}.\end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in K_1$. Тогда для любого $i \in I_{2k+1}$ $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})$, $\Psi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in K_0$.

Доказательство. Согласно лемме 1

$$\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{2k+1} x_i \tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_i) = \sum_{i=1}^{2k+1} \tilde{\Psi}_{4k}^i(\bar{x}_i, \bar{y}) x_i.$$

Отсюда, а также из замечания 1 и леммы 2 получаем требуемый результат. \square

Лемма 4. Пусть $I \triangleleft_T F\{Z\}$ и для любого $i \in I_{2k+1}$ $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in I$ ($\Psi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in I$), тогда $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \sum_{i=1}^{2k+1} \{\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})\}^T \subseteq I$ ($\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \sum_{i=1}^{2k+1} \{\Psi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})\}^T \subseteq I$).



Доказательство. Проведем для многочленов $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})$, поскольку для $\Psi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})$ оно аналогично. В силу леммы 1 справедливо равенство

$$\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{2k+1} x_i \tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_i).$$

Согласно лемме 2 для любого $i \in I_{2k+1}$ $\tilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{y}, \bar{x}_i) \in \{\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})\}^T$. Отсюда и из того, что I является T -идеалом алгебры $F\{Z\}$, следует, что

$$\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in \sum_{i=1}^{2k+1} \{\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})\}^T \subseteq I. \quad \square$$

Лемма 5. Для любых матриц

$$u^i = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & P_{k \times k}^i \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & S_{(m-k) \times k}^i \\ A_{k \times k}^i & 0_{k \times (m-k)} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \quad v^j = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & D_{k \times k}^j \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & U_{(m-k) \times k}^j \\ B_{k \times k}^j & 0_{k \times (m-k)} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

алгебры $M_{m+k}(F)$, где $m > k$, $i = \overline{1, 2k+1}$, $j = \overline{1, 2k}$, справедливо равенство

$$\Phi_{4k+1}(u^1, \dots, u^{2k+1}; v^1, \dots, v^{2k}) = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & W_{k \times k}^2 \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & W_{(m-k) \times k}^1 \\ W_{k \times k}^3 & 0_{k \times (m-k)} & 0_{k \times k} \end{pmatrix},$$

где $W_{(m-k) \times k}^1 = \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \Phi_{4k}^i(\bar{B}; \bar{P}_i)$, $W_{k \times k}^2 = \sum_{i=1}^{2k+1} P^i \Phi_{4k}^i(\bar{B}; \bar{P}_i)$, $W_{k \times k}^3 = \sum_{i=1}^{2k+1} A^i \Phi_{4k}^i(\bar{D}; \bar{A}_i)$,
здесь $\bar{B} = (B^1, \dots, B^{2k})$, $\bar{P}_i = (P^1, \dots, P^{i-1}, P^{i+1}, \dots, P^{2k+1})$, $\bar{D} = (D^1, \dots, D^{2k})$,
 $\bar{A}_i = (A^1, \dots, A^{i-1}, A^{i+1}, \dots, A^{2k+1})$.

Доказательство. Подставляя заданные матрицы в многочлен $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_{4k+1}(u^1, \dots, u^{2k+1}; v^1, \dots, v^{2k}) &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} \prod_{i=1}^{2k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(i)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(i)} \\ A^{\pi(i)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & D^{\tau(i)} \\ 0 & 0 & U^{\tau(i)} \\ B^{\tau(i)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ A^{\pi(2k+1)} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} \prod_{i=1}^{2k} \begin{pmatrix} P^{\pi(i)} B^{\tau(i)} & 0 & 0 \\ S^{\pi(i)} B^{\tau(i)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{\pi(i)} D^{\tau(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ A^{\pi(2k+1)} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{2k} P^{\pi(i)} B^{\tau(i)} & 0 & 0 \\ S^{\pi(1)} B^{\tau(1)} P^{\pi(2)} B^{\tau(2)} \dots P^{\pi(2k)} B^{\tau(2k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \prod_{i=1}^{2k} A^{\pi(i)} D^{\tau(i)} \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ A^{\pi(2k+1)} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & W_{k \times k}^2 \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & W_{(m-k) \times k}^1 \\ W_{k \times k}^3 & 0_{k \times (m-k)} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



где

$$\begin{aligned} W_{(m-k) \times k}^1 &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} S_{(m-k) \times k}^{\pi(1)} B^{\tau(1)} P^{\pi(2)} B^{\tau(2)} \dots P^{\pi(2k)} B^{\tau(2k)} P^{\pi(2k+1)}, \\ W_{k \times k}^2 &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} P^{\pi(1)} B^{\tau(1)} P^{\pi(2)} \dots B^{\tau(2k)} P^{\pi(2k+1)}, \\ W_{k \times k}^3 &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} A^{\pi(1)} D^{\tau(1)} A^{\pi(2)} \dots D^{\tau(2k)} A^{\pi(2k+1)}. \end{aligned}$$

Преобразуем правые части в выражения для матриц $W_{(m-k) \times k}^1$, $W_{k \times k}^2$, $W_{k \times k}^3$. Для этого положим $S'_{2k+1}(i) = \{\pi \in S_{2k+1} \mid \pi(1) = i\}$, $S_{2k+1}(i) = \{\sigma \in S_{2k+1} \mid \sigma(i) = i\}$, $\mu_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & 2k+1 \\ i & 1 & \dots & i-2 & i-1 & i+1 & \dots & 2k+1 \end{pmatrix}$, где $i = \overline{1, 2k+1}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in S'_{2k+1}(i)$ можно представить в виде $\pi = \sigma \mu_i$, где $\sigma \in S_{2k+1}(i)$. Тогда мы можем записать, что

$$\begin{aligned} W_{(m-k) \times k}^1 &= \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{\pi_i \in S'_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi_i} S_{(m-k) \times k}^{\pi_i(1)} B^{\tau(1)} P^{\pi_i(2)} \dots B^{\tau(2k)} P^{\pi_i(2k+1)} = \\ &= \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\sigma_i \mu_i} S^i B^{\tau(1)} P^{\sigma_i(1)} B^{\tau(2)} \dots B^{\tau(2k)} P^{\sigma_i(2k+1)} = \\ &= \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\sigma_i \mu_i} B^{\tau(1)} P^{\sigma_i(1)} B^{\tau(2)} \dots B^{\tau(2k)} P^{\sigma_i(2k+1)} = \\ &= \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \tilde{\Phi}_{4k}^i(B^1, \dots, B^{2k}, P^1, \dots, P^{i-1}, P^{i+1}, \dots, P^{2k+1}). \end{aligned}$$

Учитывая теперь замечание 2, приходим к равенству $W_{(m-k) \times k}^1 = \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \Phi_{4k}^i(\bar{B}; \bar{P}_i)$.

Аналогично для матриц $W_{k \times k}^2$ и $W_{k \times k}^3$ получаем, что $W_{k \times k}^2 = \sum_{i=1}^{2k+1} P^i \Phi_{4k}^i(\bar{B}; \bar{P}_i)$,

$$W_{k \times k}^3 = \sum_{i=1}^{2k+1} A^i \Phi_{4k}^i(\bar{D}; \bar{A}_i). \quad \square$$

Следствие 5. Предположим, что для любого $i = \overline{1, 2k+1}$ многочлен $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in T[M_k(F)]$. Тогда $\Phi_{4k+1}(u^1, \dots, u^{2k+1}; v^1, \dots, v^{2k}) = 0$.

Теорема 1. Для любого многочлена $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in K_1$ и произвольных матриц

$$u^i = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & P_{k \times k}^i \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & S_{(m-k) \times k}^i \\ A_{k \times k}^i & 0_{k \times (m-k)} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \quad v^j = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & D_{k \times k}^j \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & U_{(m-k) \times k}^j \\ B_{k \times k}^j & 0_{k \times (m-k)} & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

алгебры $M_{m+k}(F)$, где $m > k$, $i = \overline{1, 2k+1}$, $j = \overline{1, 2k}$, справедливо равенство $\Phi_{4k+1}(u^1, \dots, u^{2k+1}; v^1, \dots, v^{2k}) = 0$.



Доказательство. Согласно лемме 3 для любого $i = \overline{1, 2k+1}$ многочлен $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in K_0$, а в силу предложения 7 работы [2] при $\text{char } F \neq 2$ $K_0 \subseteq \{S_{2k}^-(\bar{x}')\}^T$. Учитывая теперь теорему Амицура – Левицкого, получаем, что $\{S_{2k}^-(\bar{x}')\}^T \subseteq T[M_k(F)]$, но тогда $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in T[M_k(F)]$ для любого $i = \overline{1, 2k+1}$.

Из того, что включение $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in T[M_k(F)]$ верно при любом поле F характеристики не два, и того, что многочлен $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y})$ полилинеен и имеет коэффициенты ± 1 , вытекает, что включение $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in T[M_k(F)]$ остается верным и при $\text{char } F = 2$. Таким образом, при любом поле F и всяком $i \in \overline{1, 2k+1}$ многочлен $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in T[M_k(F)]$. Отсюда и из следствия 5 получаем $\Phi_{4k+1}(u^1, \dots, u^{2k+1}; v^1, \dots, v^{2k}) = 0$. \square

Замечание 3. При доказательстве теоремы 1 нами установлено, что если многочлен $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in K_1$, то для любого $i = \overline{1, 2k+1}$ $\Phi_{4k}^i(\bar{x}', \bar{y}) \in K_0 \subseteq T[M_k(F)]$.

Лемма 6. Для любых матриц

$$u^i = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & P_{k \times k}^i \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & S_{(m-k) \times k}^i \\ 0_{k \times k} & N_{k \times (m-k)}^i & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, v^j = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & D_{k \times k}^j \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & U_{(m-k) \times k}^j \\ 0_{k \times k} & L_{k \times (m-k)}^j & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

алгебры $M_{m+k}(F)$, где $m > k$, $i = \overline{1, 2k+1}$, $j = \overline{1, 2k}$, справедливо равенство

$$\Phi_{4k+1}(u^1, \dots, u^{2k+1}; v^1, \dots, v^{2k}) = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & \widetilde{W}_{k \times k}^2 \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & \widetilde{W}_{(m-k) \times k}^1 \\ 0_{k \times k} & \widetilde{W}_{k \times (m-k)}^3 & 0_{k \times k} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{(m-k) \times k}^1 &= \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \Phi_{4k}^i(\bar{L}; \bar{S}_i), & \widetilde{W}_{k \times k}^2 &= \sum_{i=1}^{2k+1} P^i \Phi_{4k}^i(\bar{L}; \bar{S}_i), \\ \widetilde{W}_{k \times (m-k)}^3 &= \sum_{i=1}^{2k+1} N^i \Phi_{4k}^i(\bar{U}; \bar{N}_i) = \sum_{i=1}^{2k+1} \Psi_{4k}^i(\bar{N}_i; \bar{U}) N^i, \end{aligned}$$

здесь $\bar{L} = (L^1, \dots, L^{2k})$, $\bar{S}_i = (S^1, \dots, S^{i-1}, S^{i+1}, \dots, S^{2k+1})$, $\bar{U} = (U^1, \dots, U^{2k})$, $\bar{N}_i = (N^1, \dots, N^{i-1}, N^{i+1}, \dots, N^{2k+1})$.

Доказательство. Подставляя заданные матрицы в многочлен $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y})$, получим

$$\begin{aligned} & \Phi_{4k+1}(u^1, \dots, u^{2k+1}; v^1, \dots, v^{2k}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^\pi \prod_{i=1}^{2k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(i)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(i)} \\ 0 & N^{\pi(i)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & D^{\tau(i)} \\ 0 & 0 & U^{\tau(i)} \\ 0 & L^{\tau(i)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ 0 & N^{\pi(2k+1)} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^\pi \prod_{i=1}^{2k} \begin{pmatrix} 0 & P^{\pi(i)} L^{\tau(i)} & 0 \\ 0 & S^{\pi(i)} L^{\tau(i)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{\pi(i)} U^{\tau(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ 0 & N^{\pi(2k+1)} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_\tau^\pi \begin{pmatrix} 0 & P^{\pi(1)} L^{\tau(1)} \prod_{i=2}^{2k} S^{\pi(i)} L^{\tau(i)} & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^{2k} S^{\pi(i)} L^{\tau(i)} & 0 \\ 0 & 0 & \prod_{i=1}^{2k} N^{\pi(i)} L^{\tau(i)} \end{pmatrix} \times \end{aligned}$$



$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & P^{\pi(2k+1)} \\ 0 & 0 & S^{\pi(2k+1)} \\ 0 & N^{\pi(2k+1)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & \widetilde{W}_{k \times k}^2 \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & \widetilde{W}_{(m-k) \times k}^1 \\ 0_{k \times k} & \widetilde{W}_{k \times (m-k)}^3 & 0_{k \times k} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{(m-k) \times k}^1 &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} S^{\pi(1)} L^{\tau(1)} \dots L^{\tau(2k)} S^{\pi(2k+1)} = \\ &= \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\sigma_i \mu_i} L^{\tau(1)} S^{\sigma_i(1)} L^{\tau(2)} \dots L^{\tau(2k)} S^{\sigma_i(2k+1)} = \\ &= \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \widetilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{L}; \bar{S}_i) = | \text{учитываем замечание 2} | = \sum_{i=1}^{2k+1} S^i \Phi_{4k}^i(\bar{L}; \bar{S}_i); \\ \widetilde{W}_{k \times k}^2 &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} P^{\pi(1)} L^{\tau(1)} S^{\pi(2)} \dots L^{\tau(2k)} S^{\pi(2k+1)} = \\ &= \sum_{i=1}^{2k+1} P^i \widetilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{L}; \bar{S}_i) = \sum_{i=1}^{2k+1} P^i \Phi_{4k}^i(\bar{L}; \bar{S}_i); \\ \widetilde{W}_{k \times (m-k)}^3 &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} N^{\pi(1)} U^{\tau(1)} \dots U^{\tau(2k)} N^{\pi(2k+1)} = \\ &= \sum_{i=1}^{2k+1} N^i \widetilde{\Phi}_{4k}^i(\bar{U}; \bar{N}_i) = \sum_{i=1}^{2k+1} N^i \Phi_{4k}^i(\bar{U}; \bar{N}_i), \end{aligned}$$

или при другом преобразовании

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{k \times (m-k)}^3 &= \sum_{\pi \in S_{2k+1}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\pi} N^{\pi(1)} U^{\tau(1)} \dots U^{\tau(2k)} N^{\pi(2k+1)} = \\ &= \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{\sigma_i \in S_{2k+1}(i)} \sum_{\tau \in S_{2k}} \alpha_{\tau}^{\sigma_i \rho_i} N^{\sigma_i(1)} U^{\tau(1)} N^{\sigma_i(2)} \dots N^{\sigma_i(2k+1)} U^{\tau(2k)} N^i = \\ &= \sum_{i=1}^{2k+1} \widetilde{\Psi}_{4k}^i(\bar{N}_i; \bar{U}) N^i = \sum_{i=1}^{2k+1} \Psi_{4k}^i(\bar{N}_i; \bar{U}) N^i. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 6. Предположим, что для любого $i = \overline{1, 2k}$ и произвольных матриц $A^1, \dots, A^{2k} \in M_{k \times (m-k)}(F)$, $B^1, \dots, B^{2k} \in M_{(m-k) \times k}(F)$ справедливы равенства

$$\Phi_{4k}^i(\bar{A}; \bar{B}) = 0, \quad \Phi_{4k}^i(\bar{B}; \bar{A}) = 0 \quad \text{или} \quad \Phi_{4k}^i(\bar{A}; \bar{B}) = 0, \quad \Psi_{4k}^i(\bar{A}; \bar{B}) = 0.$$

Тогда

$$\Phi_{4k+1}(u^1, \dots, u^{2k+1}; v^1, \dots, v^{2k}) = 0.$$

Предложение 4. Пусть $0 < m - k \leq k$ и многочлен

$$t_{4k}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_{2k}} \sum_{\tau \in S_{2k}} \gamma_{\tau}^{\pi} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(2k)} y_{\tau(2k)} \in T[M_k(F)].$$

Тогда для любых матриц $A^i \in M_{k \times (m-k)}(F)$, $B^j \in M_{(m-k) \times k}(F)$, где $i, j = \overline{1, 2k}$, справедливы равенства

$$t_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0, \quad t_{4k}(\bar{B}; \bar{A}) = 0.$$



Доказательство. Определим отображения $\psi_1 : M_{k \times (m-k)}(F) \rightarrow M_k(F)$, $\psi_2 : M_{(m-k) \times k}(F) \rightarrow M_k(F)$, положив для любых $A \in M_{k \times (m-k)}(F)$, $B \in M_{(m-k) \times k}(F)$ $\psi_1(A) = (A0)$, $\psi_2(B) = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что отображения ψ_1 , ψ_2 являются гомоморфизмами векторных пространств и что $M_{k \times (m-k)}(F) \cong \text{Im } \psi_1$, $M_{(m-k) \times k}(F) \cong \text{Im } \psi_2$. Отсюда и из того, что $t_{4k}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_k(F)]$, получаем

$$t_{4k}(A^1, \dots, A^{2k}; B^1, \dots, B^{2k}) = t_{4k}(\psi_1(A^1), \dots, \psi_1(A^{2k}); \psi_2(B^1), \dots, \psi_2(B^{2k})) = 0, \\ t_{4k}(B^1, \dots, B^{2k}; A^1, \dots, A^{2k}) = t_{4k}(\psi_2(B^1), \dots, \psi_2(B^{2k}); \psi_1(A^1), \dots, \psi_1(A^{2k})) = 0. \quad \square$$

Теорема 2. Пусть $0 < m - k \leq k$, $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in K_1$. Тогда для любых матриц

$$u^i = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & P_{k \times k}^i \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & S_{(m-k) \times k}^i \\ 0_{k \times k} & N_{k \times (m-k)}^i & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \quad v^j = \begin{pmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times (m-k)} & D_{k \times k}^j \\ 0_{(m-k) \times k} & 0_{(m-k) \times (m-k)} & U_{(m-k) \times k}^j \\ 0_{k \times k} & L_{k \times (m-k)}^j & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$$

алгебры $M_{m+k}(F)$, где $i = \overline{1, 2k+1}$, $j = \overline{1, 2k}$, справедливо равенство $\Phi_{4k+1}(u^1, \dots, u^{2k+1}; v^1, \dots, v^{2k}) = 0$.

Доказательство. Вытекает из замечания 3, предложения 4 и следствия 6. \square

Лемма 7. Предположим, что для любых матриц $A^1, \dots, A^{2k} \in M_{k \times m}(F)$, $B^1, \dots, B^{2k} \in M_{m \times k}(F)$ справедливы равенства $a_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $b_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$. Тогда будут верны и равенства $c_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $h_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $f_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$, $g_{4k}(\bar{A}; \bar{B}) = 0$.

Доказательство. Вытекает из предложения 2 [1], предложений 1–2 [2] и равенства $b_{4k} - a_{4k} = g_{4k}$. \square

Предложение 5. Пусть многочлен $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in K_1$ и для любых матриц $P^1, \dots, P^{2k} \in M_{k \times m}(F)$, $Q^1, \dots, Q^{2k} \in M_{m \times k}(F)$ $a_{4k}(\bar{P}; \bar{Q}) = 0$, $b_{4k}(\bar{P}; \bar{Q}) = 0$. Тогда многочлен $\Phi_{4k+1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,k)}(F)]$.

Доказательство. Пусть $u^i = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B_{m \times k}^i \\ A_{k \times m}^i & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$, $v^j = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & C_{m \times k}^j \\ D_{k \times m}^j & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \in M_1^{(m,k)}(F)$,

где $i = \overline{1, 2k+1}$, $j = \overline{1, 2k}$. Тогда $\Phi_{4k+1}(\bar{u}; \bar{v}) = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & V_{m \times k}^1 \\ V_{k \times m}^2 & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$, где с учетом леммы 1

$$\text{и замечания 2 } V_{m \times k}^1 = \sum_{i=1}^{2k+1} B^i \Phi_{4k}^i(\bar{D}; \bar{B}_i), \quad V_{k \times m}^2 = \sum_{i=1}^{2k+1} \Psi_{4k}^i(\bar{A}_i; \bar{C}) A^i.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что для выполнения равенства $\Phi_{4k+1}(\bar{u}; \bar{v}) = 0$ достаточно, чтобы для любых матриц $P^1, \dots, P^{2k} \in M_{k \times m}(F)$, $Q^1, \dots, Q^{2k} \in M_{m \times k}(F)$ и всякого многочлена $\Phi_{4k}(\bar{x}', \bar{y}) \in K_0$ было верно равенство $\Phi_{4k}(\bar{P}; \bar{Q}) = 0$. Но оно справедливо в силу условия предложения 5 и леммы 7. \square

Окончание следует.

Библиографический список

1. Антонов С. Ю. Некоторые виды тождеств подпространств $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Т. 154, кн.1. С. 189–201.
2. Антонов С. Ю., Антонова А. В. О квазимногочленах Капелли // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 371–382. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382>



3. *Birmajer D.* Polynomial detection of matrix subalgebras // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 133, № 4. P. 1007–1012.
4. *Chang Q.* Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710.
5. *Kostant B.* A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory // J. Math. Mech. 1958. Vol. 7. P. 237–264.
6. *Rowen L. H.* Standard polynomials in matrix algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 190. P. 253–284.
7. *Wenxin M., Racine M.* Minimal identities of symmetric matrices // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 320, № 1. P. 171–192.
8. *Vincenzo O. M.* On the graded identities of $M_{1,1}(E)$ // Israel J. Math. 1992. Vol. 80, № 3. P. 323–335.
9. *Mattina D.* On the graded identities and cocharacters of the algebra of 3x3 matrices // J. Linear Algebra App. 2004. Vol. 384. P. 55–75. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(04\)00034-5](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5)
10. *Аверьянов И. В.* Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4298>
11. *Vincenzo O. M.* Z_2 -graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices // Serdica Math. J. 2004. Vol. 30. P. 111–134.
12. *Vincenzo O. M.* Z_2 -graded cocharacters for superalgebras of triangular matrices // J. of Pure and Applied Algebra. 2004. Vol. 194, iss. 1–2. P. 193–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.04.004>
13. *Amitsur S. A., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463.
14. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* К теореме Ченга. II // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 127–137. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137>

Образец для цитирования:

Антонов С. Ю., Антонова А. В. О квазимногочленах Капелли. II // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 4–16. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16>

Quasi-Polynomials of Capelli. II

S. Yu. Antonov, A. V. Antonova

Stepan Yu. Antonov, <https://orcid.org/0000-0003-1705-3929>, Kazan State Power Engineering University, 51 Krasnosel'skaya St., Kazan 420066, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

Alina V. Antonova, <https://orcid.org/0000-0001-7047-7275>, Kazan State Power Engineering University, 51 Krasnosel'skaya St., Kazan 420066, Russia, antonovakazan@rambler.ru

This paper observes the continuation of the study of a certain kind of polynomials of type Capelli (Capelli quasi-polynomials) belonging to the free associative algebra $F\{X \cup Y\}$ considered over an arbitrary field F and generated by two disjoint countable sets X and Y . It is proved that if $\text{char } F = 0$ then among the Capelli quasi-polynomials of degree $4k - 1$ there are those that are neither consequences of the standard polynomial S_{2k}^- nor identities of the matrix algebra $M_k(F)$. It is shown that if $\text{char } F = 0$ then only two of the six Capelli quasi-polynomials of degree $4k - 1$ are identities of the odd component of the Z_2 -graded matrix algebra $M_{k+k}(F)$. It is also proved that all Capelli quasi-polynomials of degree $4k + 1$ are identities of certain subspaces of the odd component of the Z_2 -graded matrix algebra $M_{m+k}(F)$ for $m > k$. The conditions under which Capelli quasi-polynomials of degree $4k + 1$ being identities of the subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ are given.



Keywords: T -ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

Received: 04.02.2019 / Accepted: 03.03.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Continuation. The previous part was published in: Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 371–382. The following part is to be published.

References

1. Antonov S. Yu. Some types of identities of subspaces $M_0^{(m,k)}(F), M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, book 1, pp. 189–201 (in Russian).
2. Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-polynomials of Capelli. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 371–382 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382
3. Birmajer D. Polynomial detection of matrix subalgebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2004, vol. 133, no. 4, pp. 1007–1012.
4. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
5. Kostant B. A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur–Levitzki, and cohomology theory. *J. Math. Mech.*, 1958, vol. 7, pp. 237–264.
6. Rowen L. H. Standard polynomials in matrix algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 190, pp. 253–284.
7. Wenxin M., Racine M. Minimal identities of symmetric matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 320, no. 1, pp. 171–192.
8. Vincenzo O. M. On the graded identities of $M_{1,1}(E)$. *Israel J. Math.*, 1992, vol. 80, no. 3, pp. 323–335.
9. Mattina D. On the graded identities and cocharacters of the algebra of 3×3 matrices. *J. Linear Algebra App.*, 2004, vol. 384, pp. 55–75. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(04\)00034-5](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(04)00034-5)
10. Aver'yanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra $M_{1,2}(F)$. *Math. Notes*, 2009, vol. 85, pp. 467–483. DOI: 10.1134/S0001434609030195
11. Vincenzo O. M. Z_2 -graded polynomial identities for superalgebras of block-triangular matrices. *Serdica Math. J.*, 2004, vol. 30, pp. 111–134.
12. Vincenzo O. M. Z_2 -graded cocharacters for superalgebras of triangular matrices. *J. of Pure and Applied Algebra*, 2004, vol. 194, iss. 1–2, pp. 193–211. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2004.04.004>
13. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.
14. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang Theorem. II. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, iss. 2, pp. 127–137 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-127-137>

Cite this article as:

Antonov S. Yu., Antonova A. V. Quasi-Polynomials of Capelli. II. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 4–16 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-4-16>



Asymptotics of Solutions of Some Integral Equations Connected with Differential Systems with a Singularity

M. Yu. Ignatiev

Mikhail Yu. Ignatiev, <https://orcid.org/0000-0002-4354-9197>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, mikkieram@gmail.com, ignatievmu@info.sgu.ru

Our studies concern some aspects of scattering theory of the singular differential systems $y' - x^{-1}Ay - q(x)y = \rho By$, $x > 0$ with $n \times n$ matrices $A, B, q(x)$, $x \in (0, \infty)$, where A, B are constant and ρ is a spectral parameter. We concentrate on investigation of certain Volterra integral equations with respect to tensor-valued functions. The solutions of these integral equations play a central role in construction of the so-called Weyl-type solutions for the original differential system. Actually, the integral equations provide a method for investigation of the analytical and asymptotical properties of the Weyl-type solutions while the classical methods fail because of the presence of the singularity. In the paper, we consider the important special case when q is smooth and $q(0) = 0$ and obtain the classical-type asymptotical expansions for the solutions of the considered integral equations as $\rho \rightarrow \infty$ with $o(\rho^{-1})$ rate remainder estimate. The result allows one to obtain analogous asymptotics for the Weyl-type solutions that play in turn an important role in the inverse scattering theory.

Keywords: differential systems, singularity, integral equations, asymptotical expansions.

Received: 26.06.2019 / Accepted: 01.07.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-17-28>

INTRODUCTION

Our studies concern some aspects of scattering theory of the differential systems

$$y' - x^{-1}Ay - q(x)y = \rho By, \quad x > 0 \quad (1)$$

with $n \times n$ matrices $A, B, q(x)$, $x \in (0, \infty)$, where A, B are constant and ρ is a spectral parameter.

Differential equations with coefficients having non-integrable singularities at the end or inside the interval often appear in various areas of natural sciences and engineering. For $n = 2$, there exists an extensive literature devoted to different aspects of spectral theory of the radial Dirac operators, see, for instance [1–5].

Systems of the form (1) with $n > 2$ and arbitrary complex eigenvalues of the matrix B appear to be considerably more difficult for investigation even in the “regular” case $A = 0$ [6]. Some difficulties of principal matter also appear due to the presence of the singularity. Whereas the “regular” case $A = 0$ has been studied fairly completely to date [6–8], for the system (1) with $A \neq 0$ there are no similar general results.

The important role in scattering theory is played by a certain distinguished basis of generalized eigenfunctions for (1) (the so-called *Weyl-type solutions*, see, for instance [9]). In the presence of the singularity construction and investigation of this basis encounters some difficulties which do not appear in the “regular” case $A = 0$. In particular, one can not use the auxiliary Cauchy problems with the initial conditions



at $x = 0$. The approach presented in [10] (see also [11] and references therein) for the scalar differential operators

$$\ell y = y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\frac{\nu_j}{x^{n-j}} + q_j(x) \right) y^{(j)} \tag{2}$$

is based on using some special solutions of the equation $\ell y = \lambda y$ that also satisfy certain Volterra integral equations. This approach assumes some additional decay condition for the coefficients $q_j(x)$ as $x \rightarrow 0$, moreover, the required decay rate depends on eigenvalues of the matrix A . In this paper, we do not impose any additional restrictions of such a type. Instead, we use a modification of the approach first presented in [12] for the higher-order differential operators with *regular* coefficients on the whole line and recently adapted for differential systems of the form (1) on the semi-axis in [9].

In brief outline the approach can be described as follows. We consider some auxiliary systems with respect to the functions with values in the exterior algebra $\wedge \mathbb{C}^n$. Our study of these auxiliary systems centers on two families of their solutions that also satisfy some asymptotical conditions as $x \rightarrow 0$ and $x \rightarrow \infty$ respectively, and can be constructed as solutions of certain *Volterra* integral equations. As in [12] we call these distinguished tensor solutions the *fundamental tensors*. The main difference from the above-mentioned method used in [10] is that we use the integral equations to construct the fundamental tensors rather than the solutions for the original system. Since each of the fundamental tensors has minimal growth (as $x \rightarrow 0$ or $x \rightarrow \infty$) among solutions of the same auxiliary system, this step does not require any decay of $q(x)$ as $x \rightarrow 0$.

Construction and properties of the fundamental tensors were considered in details in our paper [9] provided that $q(\cdot)$ is absolutely continuous and both q, q' are integrable on the semi-axis $(0, \infty)$. In this paper, we consider the important special case $q(0) = 0$ and obtain the classical-type asymptotical expansions for the fundamental tensors as $\rho \rightarrow \infty$ with $o(\rho^{-1})$ rate remainder estimate.

1. ASSUMPTIONS AND NOTATIONS. FORMULATIONS OF THE RESULTS

We are to discuss first the unperturbed system:

$$y' - x^{-1}Ay = \rho By \tag{3}$$

and its particular case corresponding to the value $\rho = 1$ of the spectral parameter

$$y' - x^{-1}Ay = By \tag{4}$$

but to *complex* (in general) values of x .

Assumption 1. Matrix A is off-diagonal. The eigenvalues $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ of the matrix A are distinct and such that $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ for $j \neq k$, moreover, $\text{Re}\mu_1 < \text{Re}\mu_2 < \dots < \text{Re}\mu_n$, $\text{Re}\mu_k \neq 0$, $k = \overline{1, n}$.

Assumption 2. $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$, the entries b_1, \dots, b_n are nonzero distinct points on the complex plane such that $\sum_{j=1}^n b_j = 0$ and such that any 3 points are noncolinear.

Under Assumption 1 system (4) has the fundamental matrix $c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$, where

$$c_k(x) = x^{\mu_k} \hat{c}_k(x),$$

$\det c(x) \equiv 1$ and all $\hat{c}_k(\cdot)$ are entire functions, $\hat{c}_k(0) = \mathfrak{h}_k$, \mathfrak{h}_k is an eigenvector of the matrix A corresponding to the eigenvalue μ_k . We define $C_k(x, \rho) := c_k(\rho x)$, $x \in (0, \infty)$,



$\rho \in \mathbb{C}$. We note that the matrix $C(x, \rho)$ is a solution of the unperturbed system (3) (with respect to x for the given spectral parameter ρ).

Let Σ be the following union of lines through the origin in \mathbb{C} :

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j \neq k} \{z : \operatorname{Re}(zb_j) = \operatorname{Re}(zb_k)\}.$$

By virtue of Assumption 2 for any $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ there exists the ordering R_1, \dots, R_n of the numbers b_1, \dots, b_n such that $\operatorname{Re}(R_1 z) < \operatorname{Re}(R_2 z) \dots < \operatorname{Re}(R_n z)$. Let \mathcal{S} be a sector $\{z = r \exp(i\gamma), r \in (0, \infty), \gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)\}$ lying in $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Then [13] the system (4) has the fundamental matrix $e(x) = (e_1(x), \dots, e_n(x))$ which is analytic in \mathcal{S} , continuous in $\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ and admits the asymptotics:

$$e_k(x) = e^{xR_k}(\mathbf{f}_k + x^{-1}\eta_k(x)), \quad \eta_k(x) = O(1), \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in \overline{\mathcal{S}},$$

where $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n) = \mathbf{f}$ is a permutation matrix such that $(R_1, \dots, R_n) = (b_1, \dots, b_n)\mathbf{f}$. We define $E(x, \rho) := e(\rho x)$.

Everywhere below we assume that the following additional condition is satisfied.

Condition 1. For all $k = \overline{2, n}$ the numbers

$$\Delta_k^0 := \det(e_1(x), \dots, e_{k-1}(x), c_k(x), \dots, c_n(x))$$

are not equal to 0.

Under Condition 1 the system (4) has the fundamental matrix $\psi^0(x) = (\psi_1^0(x), \dots, \psi_n^0(x))$ which is analytic in \mathcal{S} , continuous in $\overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\}$ and admits the asymptotics:

$$\psi_k^0(xt) = \exp(xtR_k)(\mathbf{f}_k + o(1)), \quad t \rightarrow \infty, \quad x \in \mathcal{S}, \quad \psi_k^0(x) = O(x^{\mu_k}), \quad x \rightarrow 0.$$

We define $\Psi^0(x, \rho) := \psi^0(\rho x)$. As above, we note that the matrices $E(x, \rho)$, $\Psi^0(x, \rho)$ solve (3).

In the sequel we use the following notations:

- $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ is the standard basis in \mathbb{C}^n ;
- \mathcal{A}_m is the set of all ordered multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$, $\alpha_j \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- for a sequence $\{u_j\}$ of vectors and a multi-index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ we define $u_\alpha := u_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge u_{\alpha_m}$;
- for a numerical sequence $\{a_j\}$ and a multi-index α we define $a_\alpha := \sum_{j \in \alpha} a_j$,
- $a^\alpha := \prod_{j \in \alpha} a_j$;
- for a multi-index α the symbol α' denotes the ordered multi-index that complements α to $(1, 2, \dots, n)$;
- for $k = \overline{1, n}$ we denote

$$\vec{a}_k := \sum_{j=1}^k a_j, \quad \overleftarrow{a}_k := \sum_{j=k}^n a_j, \quad \vec{a}^k := \prod_{j=1}^k a_j, \quad \overleftarrow{a}^k := \prod_{j=k}^n a_j.$$

We note that Assumptions 1, 2 imply, in particular, $\sum_{k=1}^n \mu_k = \sum_{k=1}^n R_k = 0$ and therefore for any multi-index α one has $R_{\alpha'} = -R_\alpha$ and $\mu_{\alpha'} = -\mu_\alpha$;



– the symbol $V^{(m)}$, where V is $n \times n$ matrix, denotes the operator acting in $\wedge^m \mathbb{C}^n$ so that for any vectors u_1, \dots, u_m the following identity holds:

$$V^{(m)}(u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m) = \sum_{j=1}^m u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_{j-1} \wedge V u_j \wedge u_{j+1} \wedge \dots \wedge u_m;$$

– if $h \in \wedge^n \mathbb{C}^n$ then $|h|$ is a number such that $h = |h| \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n$;

– for $h \in \wedge^m \mathbb{C}^n$ we set $\|h\| := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_m} |h_\alpha|$, where $\{h_\alpha\}$ are the coefficients from the

expansion $h = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_m} h_\alpha \mathbf{e}_\alpha$.

We use the same notation $L_p(a, b)$ for all the spaces of the form $L_p((a, b), \mathcal{E})$, where \mathcal{E} is a finite-dimensional space. The notation $C[a, b]$ for the spaces of continuous functions will be used in a similar way.

Everywhere below the symbol \mathcal{S} denotes some (arbitrary) open sector with the vertex at the origin lying in $\mathbb{C} \setminus \Sigma$.

For each fixed $\rho \in \overline{\mathcal{S}} \setminus \{0\} =: \mathcal{S}'$ we consider the following Volterra integral equations ($k = \overline{1, n}$):

$$Y(x) = T_k^0(x, \rho) + \int_0^x G_{n-k+1}(x, t, \rho) (q^{(n-k+1)}(t)Y(t)) dt, \quad (5)$$

$$Y(x) = F_k^0(x, \rho) - \int_x^\infty G_k(x, t, \rho) (q^{(k)}(t)Y(t)) dt, \quad (6)$$

where

$$T_k^0(x, \rho) := C_k(x, \rho) \wedge \dots \wedge C_n(x, \rho), \quad (7)$$

$$F_k^0(x, \rho) := E_1(x, \rho) \wedge \dots \wedge E_k(x, \rho) = \Psi_1^0(x, \rho) \wedge \dots \wedge \Psi_k^0(x, \rho) \quad (8)$$

and $G_m(x, t, \rho)$ is an operator acting in $\wedge^m \mathbb{C}^n$ as follows:

$$G_m(x, t, \rho)f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_m} \sigma_\alpha |f \wedge C_{\alpha'}(t, \rho)| C_\alpha(x, \rho). \quad (9)$$

Here and below $\sigma_\alpha := |\mathfrak{h}_\alpha \wedge \mathfrak{h}_{\alpha'}|$.

For any $\rho \in \mathcal{S}'$ equations (5) and (6) were shown to have the unique solutions $T_k(x, \rho)$ and $F_k(x, \rho)$ respectively such that (see [9] for details):

$$\|T_k(x, \rho)\| \leq M \begin{cases} |(\rho x)^{\overleftarrow{\mu}_k}|, & |\rho x| \leq 1, \\ \left| \exp(\rho x \overleftarrow{R}_k) \right|, & |\rho x| > 1, \end{cases}$$

$$\|F_k(x, \rho)\| \leq M \begin{cases} |(\rho x)^{\overrightarrow{\mu}_k}|, & |\rho x| \leq 1, \\ \left| \exp(\rho x \overrightarrow{R}_k) \right|, & |\rho x| > 1. \end{cases}$$

We call the functions $F_k(x, \rho)$, $T_k(x, \rho)$ the *fundamental tensors*. Note that the fundamental tensors solve the auxiliary systems

$$Y' = Q^{(m)}(x, \rho)Y, \quad Q(x, \rho) := x^{-1}A + \rho B + q(x) \quad (10)$$

with $m = k$ and $m = n - k + 1$.



We note that the tensors $\{E_\alpha(x, \rho)\}_{\alpha \in \mathcal{A}_m}$ form the fundamental system of solutions for the system (10) in the “unperturbed” case. Therefore, the following representation holds:

$$T_k^0(x, \rho) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T_{k\alpha}^0 E_\alpha(x, \rho) \quad (11)$$

with x -independent coefficients $T_{k\alpha}^0$. Taking into account the special construction of the fundamental matrices $C(x, \rho)$, $E(x, \rho)$ one can conclude that the coefficients $T_{k\alpha}^0$ do not depend on ρ as well.

The $G_m(x, t, \rho)$ terms in equations (5), (6) are actually the Green operator functions for the nonhomogeneous systems:

$$Y' = Q^{(m)}(x, \rho)Y + f(x).$$

In order to construct them one can use various fundamental systems of solutions of the unperturbed system (3). In particular the following representations hold:

$$G_m(x, t, \rho)f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_m} \chi_\alpha |f \wedge \Psi_{\alpha'}^0(t, \rho)| \Psi_\alpha^0(x, \rho) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_m} \chi_\alpha |f \wedge E_{\alpha'}(t, \rho)| E_\alpha(x, \rho). \quad (12)$$

Here and below $\chi_\alpha := |f_\alpha \wedge f_{\alpha'}|$.

In the paper, we study the asymptotical behavior of the fundamental tensors for $\rho \rightarrow \infty$. In [9] the following expansions were obtained:

$$\begin{aligned} T_k(x, \rho) &= T_k^0(x, \rho) + O\left(\rho^{-\varepsilon} \exp\left(\rho x \overleftarrow{R}_k\right)\right), \quad \varepsilon \in (0, 1), \\ F_k(x, \rho) &= F_k^0(x, \rho) + O\left(\rho^{-1} \exp\left(\rho x \overrightarrow{R}_k\right)\right) \end{aligned}$$

for any fixed $x \in (0, \infty)$ and $\rho \rightarrow \infty$, $\rho \in \mathcal{S}'$. We show that under the additional condition $q(0) = 0$ more detailed expansion can be obtained.

Let $W_0(\xi)$ be the function defined as follows:

$$W_0(\xi) = (1 - |\xi|)\xi + |\xi|^2, \quad |\xi| \leq 1, \quad W_0(\xi) := (W_0(\xi^{-1}))^{-1}, \quad |\xi| > 1.$$

Notice that $W_0(\xi)$ is continuous in $\xi \in \mathbb{C}$, never vanishes for nonzero ξ and admits the estimate:

$$M_1|\xi| \leq |W_0(\xi)| \leq M_2|\xi|$$

for all $\xi \in \mathbb{C}$. Moreover, we have $W_0(\xi) = 1$ if $|\xi| = 1$ and the asymptotics $W_0(\xi) = \xi(1 + o(1))$ hold as $\xi \rightarrow 0$ and $\xi \rightarrow \infty$.

We introduce the following weight functions:

$$W_k(\xi) := \begin{cases} W_0(\xi^{\mu_k}) \exp(R_k \xi), & |\xi| \leq 1, \\ \exp(R_k \xi), & |\xi| > 1. \end{cases}$$

From the definition and the above-mentioned properties of $W_0(\cdot)$ it follows that the weight functions $W_k(\cdot)$, $k = \overline{1, n}$ are all continuous in \mathcal{S}' , never vanish and admit the asymptotics $W_k(\xi) = \xi^{\mu_k}(1 + o(1))$ as $\xi \rightarrow 0$. We define

$$\tilde{F}_k(x, \rho) := (\overrightarrow{W}^k(\rho x))^{-1} F_k(x, \rho), \quad \tilde{T}_k(x, \rho) := (\overleftarrow{W}^k(\rho x))^{-1} T_k(x, \rho).$$



Theorem 1. Suppose that $q(\cdot)$ is an absolutely continuous off-diagonal matrix function such that $q(0) = 0$. Denote by $\hat{q}_o(\cdot)$ the off-diagonal matrix function such that $[B, \hat{q}_o(x)] = -q(x)$ for all $x > 0$ (here $[\cdot, \cdot]$ denotes the matrix commutator). Define the diagonal matrix $d(x) = \text{diag}(d_1(x), \dots, d_n(x))$, where

$$d_k(x) := \int_x^\infty t^{-1} ([\hat{q}_o(t), A])_{kk} dt$$

and set $\hat{q}(x) := \hat{q}_o(x) + d(x)$.

Suppose that all the functions $q_{ij}(\cdot), q'_{ij}(\cdot)$ and $\tilde{q}_{ij}(\cdot)$, where $\tilde{q}(x) := \hat{q}'(x) + x^{-1}[\hat{q}(x), A]$ are from $X_p := L_1(0, \infty) \cap L_p(0, \infty)$, $p > 2$.

Then for each fixed $x > 0$ and $\rho \rightarrow \infty$, $\rho \in \mathcal{S}'$ the following asymptotics hold:

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{T}_k(x, \rho) - \tilde{T}_k^0(x, \rho)) &= d_{0k} \tilde{T}_k^0(x, \rho) + \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T_{k\alpha\beta}^0 g_{k\alpha\beta}(x) \exp(\rho x (R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \mathfrak{f}_\alpha + o(1), \\ \rho(\tilde{F}_k(x, \rho) - \tilde{F}_k^0(x, \rho)) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} f_{k\alpha}(x) \mathfrak{f}_\alpha + o(1). \end{aligned}$$

Here

$$d_{0k} = -\sigma_{\alpha^*(k)} |(d^{(n-k+1)}(0) \mathfrak{h}_{\alpha^*(k)}) \wedge \mathfrak{h}_{(\alpha^*(k))'}|,$$

$\alpha^*(k) := (k, \dots, n)$ and the coefficients in the representations are defined as follows:

$$f_{k\alpha}(x) = \chi_\alpha |(\hat{q}^{(k)}(x) \mathfrak{f}_{\alpha^*(k)}) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}|$$

for $\alpha \neq \alpha_*(k) := (1, \dots, k)$,

$$\begin{aligned} f_{k, \alpha_*(k)}(x) &= - \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} \int_x^\infty \chi_{\alpha_*(k)} |(q^{(k)}(t) \mathfrak{f}_\alpha) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha_*(k)}| \chi_\alpha |(\hat{q}^{(k)}(t) \mathfrak{f}_{\alpha_*(k)}) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}| dt; \\ g_{k\alpha\beta}(x) &= \chi_\alpha |(\hat{q}^{(n-k+1)}(x) \mathfrak{f}_\beta) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}| \end{aligned}$$

for $\beta \neq \alpha$,

$$g_{k\beta\beta}(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \int_0^x \chi_\beta |(q^{(n-k+1)}(t) \mathfrak{f}_\alpha) \wedge \mathfrak{f}_{\beta'}| \chi_\alpha |(\hat{q}^{(n-k+1)}(t) \mathfrak{f}_\beta) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}| dt.$$

2. PROOF OF THEOREM 1

We consider in details the function $T_k(x, \rho)$, for the function $F_k(x, \rho)$ similar arguments are valid.

For the function $\hat{T}_k(x, \rho) := \tilde{T}_k(x, \rho) - \tilde{T}_k^0(x, \rho)$ we have the representation $\hat{T}_k(\cdot, \rho) = (Id - \mathcal{K}(\rho))^{-1} v_k(\cdot, \rho)$, where $\mathcal{K}(\rho)$ is an operator of the form:

$$(\mathcal{K}(\rho)f)(x) := \int_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho) (q^{(n-k+1)}(t) f(t)) dt$$

acting in $L_\infty(0, T)$, $T \in (0, \infty)$ is arbitrary. Here and below

$$\mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho) := \frac{\overleftarrow{W}^k(\rho t)}{\overleftarrow{W}^k(\rho x)} G_{n-k+1}(x, t, \rho),$$



$$v_k(x, \rho) = \int_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(q^{(n-k+1)}(t) \tilde{T}_k^0(t, \rho) \right) dt.$$

Let us consider first the function $v_k(x, \rho)$. From the identity:

$$\begin{aligned} & \rho(q^{(n-k+1)}(t)T_k^0(t, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(t, \rho) = \\ & = \frac{d}{dt} \left((\hat{q}^{(n-k+1)}(t)T_k^0(t, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(t, \rho) \right) - (\tilde{q}^{(n-k+1)}(t)T_k^0(t, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(t, \rho), \end{aligned}$$

where $\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}$ is arbitrary it follows the relation:

$$\begin{aligned} & \rho \int_{x_0}^x G_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(q^{(n-k+1)}(t)T_k^0(t, \rho) \right) dt = \\ & = G_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(\hat{q}^{(n-k+1)}(t)T_k^0(t, \rho) \right) \Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x G_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(\tilde{q}^{(n-k+1)}(t)T_k^0(t, \rho) \right) dt. \end{aligned}$$

Passing to the limits as $x_0 \rightarrow 0$ and taking into account that $\hat{q}_o(0) = 0$ we arrive at the relation:

$$\begin{aligned} \rho v_k(x, \rho) & = d_{0k} \tilde{T}_k^0(x, \rho) + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \left| (\hat{q}^{(n-k+1)}(x) \tilde{T}_k^0(x, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(x, \rho) \right| E_\alpha(x, \rho) - \\ & \int_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(\tilde{q}^{(n-k+1)}(t) \tilde{T}_k^0(t, \rho) \right) dt. \end{aligned} \tag{13}$$

Since $\tilde{q}_{jj} = 0, j = \overline{1, n}$, from (13) and [14] we obtain (in particular) the estimate:

$$\|v_k(\cdot, \rho)\|_{BC[0, \infty)} = O(\rho^{-1}), \quad \rho \in \mathcal{S}'. \tag{14}$$

In what follows if $V = V(x, \rho)$ is some matrix function then \tilde{V} denotes the matrix function $\tilde{V}(x, \rho) := V(x, \rho)(W(\rho x))^{-1}$, where $W = \text{diag}(W_1, \dots, W_n)$. Since $\tilde{\Psi}^0(x, \rho)$ is continuous and bounded in $[0, \infty) \times \overline{\mathcal{S}}$ we have:

$$\|\mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho)\| \leq M, \quad 0 < t \leq x < \infty, \quad \rho \in \mathcal{S}' \tag{15}$$

with some absolute constant M .

Using the boundedness of $\mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho)$ one can obtain the estimate (see also the proof of [9, Theorem 3.1]):

$$\|\mathcal{K}^r(\rho)\| \leq M_0 \frac{M_1^r}{r!} \left(\int_0^T \|q(t)\| dt \right)^r,$$

where the norm $\|\mathcal{K}^r(\rho)\|$ assumes the norm of the operator acting in $L_\infty(0, T)$ for arbitrary $T > 0$ and the constants M_0, M_1 do not depend on T . This yields the estimate $\|(Id - \mathcal{K}(\rho))^{-1}\| = O(1)$ uniformly in $\rho \in \mathcal{S}'$. Thus (with taking into account (14)), we obtain the auxiliary prior estimate for \hat{T}_k :

$$\|\hat{T}_k(\cdot, \rho)\|_{L_\infty(0, T)} = O(\rho^{-1}), \quad \rho \in \mathcal{S}' \tag{16}$$



for any $T > 0$.

In order to make a more detailed study we represent the operator $\mathcal{K}(\rho)$ in the form $\mathcal{K}(\rho) = \mathcal{K}_0(\rho) + \mathcal{K}_1(\rho)$, where:

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_0(\rho)f(x) := \\ & = \theta^+(|\rho x| - 1) \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \int_{|\rho|^{-1}}^x \exp(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k)) |(q^{(n-k+1)}(t)f(t)) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}| \mathfrak{f}_\alpha dt. \end{aligned}$$

Here and below the symbols $\theta^\pm(\cdot)$ denote the Heaviside step functions:

$$\theta^+(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ 1, & \xi > 0, \end{cases} \quad \theta^-(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leq 0 \\ 0, & \xi > 0 \end{cases} = 1 - \theta^+(\xi).$$

Lemma 1. *Under the conditions of Theorem 1 one has the estimate $\|\mathcal{K}_1(\rho)\| = O(\rho^{-1})$.*

Proof. We split the operator as follows: $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_0^{(1)} + \mathcal{K}_1^{(1)} + \mathcal{K}_2^{(1)}$, where:

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_0^{(1)}f)(x) &= \theta^-(|\rho x| - 1) \int_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho) (q^{(n-k+1)}(t)f(t)) dt, \\ (\mathcal{K}_1^{(1)}f)(x) &= \theta^+(|\rho x| - 1) \int_0^{|\rho|^{-1}} \mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho) (q^{(n-k+1)}(t)f(t)) dt. \end{aligned}$$

By virtue of (15) we have:

$$\|\mathcal{K}_1^{(1)}f\| \leq M\|f\| \cdot \int_0^{|\rho|^{-1}} \|q(t)\| dt \leq M|\rho|^{-1}\|f\| \cdot \|q(\cdot)\|_{L_\infty(0,T)}.$$

Proceeding in a similar way and taking into account that $(\mathcal{K}_0^{(1)}f)(x) \neq 0$ only if $|\rho x| \leq 1$ one can obtain the similar estimate for $\|\mathcal{K}_0^{(1)}f\|$.

Let us consider $\mathcal{K}_2^{(1)}$. Using the representation (9) for $G_{n-k+1}(x, t, \rho)$, the asymptotics

$$E_\alpha(x, \rho) = \exp(\rho x R_\alpha)(\mathfrak{f}_\alpha + O((\rho x)^{-1})),$$

which is uniform in $|\rho x| \geq 1$ and taking into account that $\text{Re}(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k)) \leq 0$ for any $0 \leq t \leq x$, $\rho \in \mathcal{S}'$, $\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}$ we obtain the estimate:

$$\begin{aligned} & \theta^+(|\rho x| - 1)\theta^+(|\rho t| - 1)\theta^+(x - t) \|\mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho) (q^{(n-k+1)}(t)f(t)) - \\ & \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \exp(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k)) |(q^{(n-k+1)}(t)f(t)) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}| \mathfrak{f}_\alpha \Big\| \leq \frac{M}{|\rho t|} \|q(t)\| \end{aligned}$$

with some absolute constant M . Since under the conditions of Theorem 1 $t^{-1}q(t) \in L_1(0, \infty)$ the estimate above yields

$$\|\mathcal{K}_2^{(1)}f\| \leq M|\rho|^{-1}\|f\| \cdot \int_0^\infty t^{-1}\|q(t)\| dt$$

and therefore $\|\mathcal{K}_2^{(1)}\| = O(\rho^{-1})$. □



Lemma 2. Under the conditions of Theorem 1 one has the estimate $\|\mathcal{K}_0^2(\rho)\| = O(\rho^{-1})$.

Proof. We have:

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_0^2 f)(x) &= \theta^+(|\rho x| - 1) \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \int_{|\rho|^{-1}}^x \exp(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k)) \chi_\alpha \times \\ &\quad \times |(q^{(n-k+1)}(t)(\mathcal{K}_0 f)(t)) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}| \mathfrak{f}_\alpha dt, \\ &\quad \chi_\alpha |(q^{(n-k+1)}(t)(\mathcal{K}_0 f)(t)) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}| = \theta^+(|\rho t| - 1) \times \\ &\times \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\beta \int_{|\rho|^{-1}}^t \exp(\rho(t-\tau)(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) |(q^{(n-k+1)}(\tau)f(\tau)) \wedge \mathfrak{f}_{\beta'}| Q_{\alpha\beta}(t) d\tau, \end{aligned}$$

where $Q_{\alpha\beta}(t) := \chi_\alpha |(q^{(n-k+1)}(t)\mathfrak{f}_\beta) \wedge \mathfrak{f}_{\alpha'}|$.

Thus, we can rewrite:

$$(\mathcal{K}_0^2 f)(x) = \theta^+(|\rho x| - 1) \sum_{\alpha\beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \int_{|\rho|^{-1}}^x |(q^{(n-k+1)}(\tau)f(\tau)) \wedge \mathfrak{f}_{\beta'}| H_{\alpha\beta}(x, \tau, \rho) d\tau,$$

where:

$$H_{\alpha\beta}(x, \tau, \rho) = \int_\tau^x Q_{\alpha\beta}(t) \exp(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho(t-\tau)(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \mathfrak{f}_\alpha dt.$$

We notice again that $\text{Re}(\rho(x-t)(R_\alpha - \overleftarrow{R}_k) + \rho(t-\tau)(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \leq 0$ for any $0 \leq \tau \leq t \leq x$, $\rho \in \mathcal{S}'$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}$. Moreover, under the conditions of Theorem 1 $Q_{\alpha\beta}(\cdot)$ are absolutely continuous and $Q_{\alpha\beta}(t) \equiv 0$ if $\alpha = \beta$. This yields the estimate

$$\theta^+(|\rho\tau| - 1)H_{\alpha\beta}(x, \tau, \rho) = O(\rho^{-1}),$$

which is uniform in $0 \leq \tau \leq x$, $\rho \in \mathcal{S}'$. The estimate implies the required assertion. \square

Proof of Theorem 1. We have $\hat{T}_k(\cdot, \rho) = v_k(\cdot, \rho) + \mathcal{K}(\rho)v_k(\cdot, \rho) + \mathcal{K}^2(\rho)\hat{T}_k(\cdot, \rho)$.

We note that

$$(\mathcal{K}(\rho)\tilde{T}_k^0(\cdot, \rho))(x) = \int_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(q^{(n-k+1)}(t)\tilde{T}_k^0(t, \rho) \right) = v_k(x, \rho) = O(\rho^{-1})$$

uniformly for $\rho \in \mathcal{S}'$, $x \in (0, T)$.

This, prior estimate (16), (14) and Lemmas 1, 2 yield:

$$\hat{T}_k(\cdot, \rho) = v_k(\cdot, \rho) + \mathcal{K}_0(\rho)\omega_k(\cdot, \rho) + O(\rho^{-2}), \tag{17}$$

where

$$\begin{aligned} \rho\omega_k(x, \rho) &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \left| (\hat{q}^{(n-k+1)}(x)\tilde{T}_k^0(x, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(x, \rho) \right| E_\alpha(x, \rho) - \\ &\quad - \int_0^x \mathcal{G}_{n-k+1}(x, t, \rho) \left(\tilde{q}^{(n-k+1)}(t)\tilde{T}_k^0(t, \rho) \right) dt. \end{aligned} \tag{18}$$

and the $O(\cdot)$ term assumes an estimate in $L_\infty(0, T)$ norm.



From [14, Theorem 1] and (18) we have:

$$\rho\omega_k(x, \rho) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\alpha \left| (\hat{q}^{(n-k+1)}(x) \tilde{T}_k^0(x, \rho)) \wedge E_{\alpha'}(x, \rho) \right| E_\alpha(x, \rho) + o(1),$$

that yields:

$$\begin{aligned} & \theta^+(|\rho t| - 1) \rho\omega_k(t, \rho) = \\ & = \theta^+(|\rho t| - 1) \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T_{k\beta}^0 \exp(\rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \hat{Q}_{\alpha\beta}(t) \mathbf{f}_\alpha + \rho^{-1} \hat{\omega}_k(t, \rho) + o(1), \end{aligned}$$

where $\hat{Q}_{\alpha\beta}(t) = \chi_\alpha \left| (\hat{q}^{(n-k+1)}(t) \mathbf{f}_\beta) \wedge \mathbf{f}_{\alpha'} \right|$, the $o(\cdot)$ term assumes an estimate in $L_\infty(0, T)$ norm and $t\hat{\omega}_k(t, \rho)$ is uniformly bounded in $\{|\rho t| \geq 1\}$.

Under the conditions of Theorem 1 we have $t^{-1}q(t) \in L_1(0, \infty)$. This yields $\mathcal{K}_0(\rho)\hat{\omega}_k(\cdot, \rho) = O(1)$ and thus from the representation above we obtain:

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_0(\rho)\omega_k(\cdot, \rho))(x) &= \rho^{-1} \theta^+(|\rho x| - 1) \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}_{n-k+1}} \chi_\gamma T_{k\beta}^0 \int_{|\rho|^{-1}}^x \exp(\rho(x-t)(R_\gamma - \overleftarrow{R}_k) + \\ & + \rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \hat{Q}_{\alpha\beta}(t) \left| (q^{(n-k+1)}(t) \mathbf{f}_\alpha) \wedge \mathbf{f}_{\gamma'} \right| \mathbf{f}_\gamma dt + o(\rho^{-1}) = \rho^{-1} \theta^+(|\rho x| - 1) \times \\ & \times \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T_{k\beta}^0 \int_{|\rho|^{-1}}^x \exp(\rho(x-t)(R_\gamma - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \tilde{Q}_{\gamma\beta}(t) \mathbf{f}_\gamma dt + o(\rho^{-1}), \end{aligned}$$

where:

$$\tilde{Q}_{\gamma\beta}(t) := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} Q_{\gamma\alpha}(t) \hat{Q}_{\alpha\beta}(t), \quad Q_{\gamma\alpha}(t) = \chi_\gamma \left| (q^{(n-k+1)}(t) \mathbf{f}_\alpha) \wedge \mathbf{f}_{\gamma'} \right|$$

and the $o(\cdot)$ term assumes an estimate in $L_\infty(0, T)$. Under the conditions of Theorem 1 the functions $Q_{\alpha\beta}$ и $\hat{Q}_{\alpha\beta}$ (for any pair of multi-indices α, β) are absolutely continuous. Therefore, we have for $\gamma \neq \beta$:

$$\int_{|\rho|^{-1}}^x \exp(\rho(x-t)(R_\gamma - \overleftarrow{R}_k) + \rho t(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \tilde{Q}_{\gamma\beta}(t) dt = O(\rho^{-1}),$$

that yields:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{K}_0(\rho)\omega_k(q, \cdot, \rho))(x) = \\ & = \rho^{-1} \theta^+(|\rho x| - 1) \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T_{k\beta}^0 \exp(\rho x(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \int_{|\rho|^{-1}}^x \tilde{Q}_{\beta\beta}(t) dt \mathbf{f}_\beta + o(\rho^{-1}). \end{aligned}$$

Substituting the obtained asymptotics to the representation (17) we arrive at:

$$\begin{aligned} \hat{T}_k(x, \rho) &= v_k(x, \rho) + \rho^{-1} \theta^+(|\rho x| - 1) \times \\ & \times \sum_{\beta \in \mathcal{A}_{n-k+1}} T_{k\beta}^0 \exp(\rho x(R_\beta - \overleftarrow{R}_k)) \int_{|\rho|^{-1}}^x \tilde{Q}_{\beta\beta}(t) dt \mathbf{f}_\beta + o(\rho^{-1}). \end{aligned} \tag{19}$$



Here, as above, the $o(\cdot)$ term assumes an estimate in $L_\infty(0, T)$ norm. But all the terms in (19) are actually continuous with respect to $x \in (|\rho|^{-1}, T)$. This means that the expansion can be considered in point-wise sense as $\rho \rightarrow \infty$ while $x > 0$ is arbitrary fixed.

Now we notice that

$$\int_{|\rho|^{-1}}^x \tilde{Q}_{\beta\beta}(t) dt \rightarrow \int_0^x \tilde{Q}_{\beta\beta}(t) dt = g_{k\beta\beta}(x)$$

as $\rho \rightarrow \infty$. Then we use the representation (13) for $v_k(x, \rho)$ and thus we obtain the required asymptotics. \square

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 17-11-01193).

References

1. Brunnhuber R., Kostenko A., Teschl G. Singular Weyl–Titchmarsh–Kodaira theory for one-dimensional Dirac operators. *Monatshefte für Mathematik*, 2014, vol. 174, pp. 515–547. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00605-013-0563-5>
2. Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya. Reconstruction of radial Dirac operators. *J. Math. Phys.*, 2007, vol. 48, iss. 4, 043501, 14 p. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2709847>
3. Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya. Reconstruction of radial Dirac and Schrödinger operators from two spectra. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 339, iss. 1, pp. 45–57. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.034>
4. Serier F. Inverse Problems Inverse spectral problem for singular Ablowitz–Kaup–Newell–Segur operators on $[0, 1]$. *Inverse Problems*, 2006, vol. 22, no. 4, pp. 1457–1484. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/4/018>
5. Gorbunov O. B., Shieh C.-T., Yurko V. A. Dirac system with a singularity in an interior point. *Applicable Analysis*, 2016, vol. 95, iss. 11, pp. 2397–2414. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036811.2015.1091069>
6. Beals R., Coifman R. R. Scattering and inverse scattering for first order systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1984, vol. 37, iss. 1, pp. 39–90. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160370105>
7. Zhou X. Direct and inverse scattering transforms with arbitrary spectral singularities. *Comm. Pure Appl. Math.* 1989, vol. 42, iss. 7, pp. 895–938. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160420702>
8. Yurko V. A. Inverse spectral problems for differential systems on a finite interval. *Results Math.*, 2005, vol. 48, iss. 3–4, pp. 371–386. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03323374>
9. Ignatyev M. Spectral analysis for differential systems with a singularity. *Results Math.*, 2017, vol. 71, iss. 3–4, pp. 1531–1555. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00025-016-0605-0>
10. Yurko V. A. On higher-order differential operators with a singular point. *Inverse Problems*, 1993, vol. 9, no. 4, pp. 495–502. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/9/4/004>
11. Fedoseev A. E. Inverse problems for differential equations on the half-line having a singularity in an interior point. *Tamkang Journal of Mathematics*, 2011, vol. 42, no. 3, pp. 343–354. DOI: <https://doi.org/10.5556/j.tkjm.42.2011.879>
12. Beals R., Deift P., Tomei C. *Direct and inverse scattering on the line*. Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1988. 209 p.
13. Sibuya Yu. Stokes phenomena. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1977, vol. 83, no. 5, pp. 1075–1077.
14. Ignatiev M. Integral transforms connected with differential systems with a singularity. *Tamkang Journal of Mathematics*, 2019, vol. 50, no. 3, pp. 253–268. DOI: <https://doi.org/10.5556/j.tkjm.50.2019.3353>



Cite this article as:

Ignatiev M. Yu. Asymptotics of Solutions of Some Integral Equations Connected with Differential Systems with a Singularity. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 17–28. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-17-28>

УДК 517.984

Асимптотики решений некоторых интегральных уравнений, связанных с дифференциальными системами с особенностью

М. Ю. Игнатьев

Игнатьев Михаил Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, mikkieram@gmail.com, ignatievmu@info.sgu.ru

В работе изучаются некоторые аспекты теории рассеяния для сингулярных систем дифференциальных уравнений $y' - x^{-1}Ay - q(x)y = \rho By$, $x > 0$ со спектральным параметром ρ , где $A, B, q(x), x \in (0, \infty) - n \times n$ матрицы, причем матрицы A, B постоянны. Основным предметом исследования являются некоторые вольтерровские интегральные уравнения относительно тензорно-значных функций. Решения этих уравнений играют центральную роль в построении так называемых решений типа Вейля для исходной системы дифференциальных уравнений. Поскольку классические методы при наличии особенности оказываются неприменимыми, изучение рассматриваемых интегральных уравнений становится в этом случае ключевым этапом исследования аналитических и асимптотических свойств решений типа Вейля. В данной работе мы рассматриваем важный частный случай, когда матрица-функция $q(\cdot)$ является гладкой и $q(0) = 0$. В этом случае для решений рассматриваемых интегральных уравнений удается получить асимптотические разложения при $\rho \rightarrow \infty$ с оценкой остаточного члена $o(\rho^{-1})$. Полученный результат позволяет получить асимптотики для решений типа Вейля, играющие, в свою очередь, важную роль при исследовании обратной задачи рассеяния.

Ключевые слова: дифференциальные системы, особенности, интегральные уравнения, асимптотические разложения.

Поступила в редакцию: 26.06.2019 / Принята: 01.07.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01193).

Образец для цитирования:

Ignatiev M. Yu. Asymptotics of Solutions of Some Integral Equations Connected with Differential Systems with a Singularity [Игнатьев М. Ю. Асимптотики решений некоторых интегральных уравнений, связанных с дифференциальными системами с особенностью] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 17–28. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-17-28>



УДК 514.765

О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. I

Н. П. Можей

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6, mozheynatalya@mail.ru

Одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологической структурой многообразия. В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе псевдоримановых многообразий, например, в классе однородных псевдоримановых многообразий. В статье определены основные понятия — изотропно-точная пара, псевдориманово однородное пространство, аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, связность Леви–Чевита, тензор Риччи, Риччи-плоское, Эйнштейново, Риччи-параллельное, локально-симметрическое, конформно-плоское пространства. В работе для трехмерных римановых однородных пространств определено, при каких условиях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим или конформно-плоским. Кроме этого, для всех указанных пространств выписаны в явном виде связности Леви–Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: группа преобразований, риманово многообразие, тензор Риччи, Эйнштейново пространство, конформно-плоское пространство.

Поступила в редакцию: 03.11.2018 / Принята: 31.01.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-29-41>

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании римановых (и псевдоримановых) многообразий важную роль играют операторы кривизны, а также тензор Риччи. Изучение их свойств представляет интерес для понимания геометрического и топологического строения однородного риманова пространства. Исследованию многообразий Эйнштейна, локально-симметрических, Риччи-параллельных и конформно-плоских многообразий посвящены работы многих математиков. Римановы локально симметрические пространства введены П. А. Широковым и Э. Картаном. В настоящее время их геометрия представляет собой обширную и богатую приложениями теорию. Естественные обобщения симметрических пространств привели к другим, не менее интересным классам римановых пространств, одним из которых является класс римановых пространств с параллельным тензором Риччи, теория которых сводится к теории Эйнштейновых пространств.



Эйнштейновы многообразия в последние десятилетия также стали объектом многочисленных исследований (в книге А. Бессе [1] собраны факты по эйнштейновым многообразиям, полученные различными авторами, см. также обзор М. Вана [2]). Многомерным обобщением двумерных многообразий с локально изотермической координатной системой [3] являются конформно-плоские многообразия (римановы многообразия, окрестность каждой точки которых может быть конформно отображена на область евклидова пространства). В трехмерном случае класс конформно-плоских многообразий — это класс римановых многообразий с нулевым тензором Коттона (если размерность многообразия выше трех — с нулевым тензором Вейля), он содержит многообразия Эйнштейна и их прямые произведения, локально симметричные пространства, Риччи-параллельные и конформно-плоские многообразия (см., например, [1]). В случае многообразий постоянной скалярной кривизны класс конформно-плоских многообразий содержится в классе эйнштейновоподобных многообразий в смысле А. Грея [4]. Исследованию многообразий указанных классов посвящены работы М. А. Акивиса, В. В. Гольдберга, Н. Кюйпера, Д. В. Алексеевского, Б. Н. Кимельфельда, Е. Д. Родионова, В. В. Славского, О. Ковальского, С. Никшевича и др. (см., например, [5–8]); задача описания многообразий каждого типа не решена в полном объеме, но для некоторых классов пространств получен ответ (подробнее см. обзор [9]). Задачи изучения пространств рассматриваемых классов представляют интерес и в приложениях, например, в задачах геофизики.

В данной работе исследуются геометрические свойства трехмерных римановых однородных пространств, приведены основные факты по указанным пространствам и их классификация, далее изучена геометрия каждого класса, а именно для всех трехмерных римановых однородных пространств выписаны в явном виде связности Леви – Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, тензоры Риччи и определено, в каких случаях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим либо конформно-плоским.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа \bar{G} , (M, \bar{G}) — однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, \bar{G}) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли (\bar{G}, G) , где $G \subset \bar{G}$, так как многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов \bar{G}/G (см., например, [10]). Изучая однородные пространства, важно рассматривать не саму группу \bar{G} , а ее образ в $\text{Diff}(M)$, другими словами, достаточно рассматривать только эффективные действия группы \bar{G} на многообразии M .

Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} — подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра \mathfrak{g} не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. В дальнейшем будем предполагать, что G — связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. *Изотропное действие* группы G на $T_x M$ — это фактордействие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s \cdot (x + \mathfrak{g}) = (\text{Ad } s)(x) + \mathfrak{g}$, для всех $s \in G, x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра Ли \mathfrak{g} действует на касательном пространстве $T_x M = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом: $x \cdot (y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-*



точной, если точно изотропное представление подалгебры \mathfrak{g} . С геометрической точки зрения это означает, что естественное действие стабилизатора \overline{G}_x произвольной точки $x \in M$ на $T_x M$ имеет нулевое ядро.

Псевдориманово однородное пространство задается тройкой $(\overline{G}, M, \mathfrak{g})$, где \overline{G} — связная группа Ли, M является связным гладким многообразием с транзитивным действием \overline{G} , а \mathfrak{g} — инвариантная псевдориманова метрика на M . Инвариантные псевдоримановы метрики \mathfrak{g} на M находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G -модуле $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ [11]. Билинейная форма B также является инвариантной билинейной формой на \mathfrak{g} -модуле $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$: $B(x.v_1, v_2) + B(v_1, x.v_2) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Каждое псевдориманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathfrak{g})$, $\text{codim}_{\overline{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} \leq 4$ описывается тройкой $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, где $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ — эффективная пара алгебр Ли, а B — инвариантная симметричная невырожденная билинейная форма на \mathfrak{g} модуле $\overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathfrak{g})$, соответствующее $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, такое, что M односвязно и G связна [12]. Будем называть тройку $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ локально псевдоримановым однородным пространством. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к \mathfrak{g} в $\overline{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

2. ТРЕХМЕРНЫЕ РИМАНОВЫ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Трехмерные римановы однородные пространства описываются в работе [12] (псевдоримановы — в работе [13]):

Теорема 1. Пусть $(\overline{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ — трехмерное локально риманово однородное пространство и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$. Оно эквивалентно только одной из следующих троек:

1.3.1 $\lambda = 0$ $\overline{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(2) \ltimes \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$

| | | | | |
|-------|--------|--------|-------|-------|
| | e_1 | u_1 | u_2 | u_3 |
| e_1 | 0 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| u_1 | u_2 | 0 | 0 | 0 |
| u_2 | $-u_1$ | 0 | 0 | 0 |
| u_3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1;$$

1.3.2 $\lambda = 0$

| | | | | |
|-------|--------|--------|--------|-------|
| | e_1 | u_1 | u_2 | u_3 |
| e_1 | 0 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| u_1 | u_2 | 0 | 0 | u_1 |
| u_2 | $-u_1$ | 0 | 0 | u_2 |
| u_3 | 0 | $-u_1$ | $-u_2$ | 0 |

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1, a \neq 0;$$

1.3.3 $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$

| | | | | |
|-------|--------|--------------|-------------|-------|
| | e_1 | u_1 | u_2 | u_3 |
| e_1 | 0 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| u_1 | u_2 | 0 | $e_1 + u_3$ | 0 |
| u_2 | $-u_1$ | $-e_1 - u_3$ | 0 | 0 |
| u_3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad ab \neq 0;$$



1.3.4 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}$

| | e_1 | u_1 | u_2 | u_3 |
|-------|--------|-------------|--------------|-------|
| e_1 | 0 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| u_1 | u_2 | 0 | $-e_1 + u_3$ | 0 |
| u_2 | $-u_1$ | $e_1 - u_3$ | 0 | 0 |
| u_3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad ab \neq 0;$$

1.3.5 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$

| | e_1 | u_1 | u_2 | u_3 |
|-------|--------|--------|-------|-------|
| e_1 | 0 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| u_1 | u_2 | 0 | e_1 | 0 |
| u_2 | $-u_1$ | $-e_1$ | 0 | 0 |
| u_3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \varepsilon = \pm 1;$$

1.3.6 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$

| | e_1 | u_1 | u_2 | u_3 |
|-------|--------|--------|--------|-------|
| e_1 | 0 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| u_1 | u_2 | 0 | $-e_1$ | 0 |
| u_2 | $-u_1$ | e_1 | 0 | 0 |
| u_3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, \varepsilon = \pm 1;$$

1.3.7

| | e_1 | u_1 | u_2 | u_3 |
|-------|--------|--------|-------|-------|
| e_1 | 0 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| u_1 | u_2 | 0 | u_3 | 0 |
| u_2 | $-u_1$ | $-u_3$ | 0 | 0 |
| u_3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1, a \neq 0;$$

3.5.1 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3) \ltimes \mathbb{R}^3, \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$

| | e_1 | e_2 | e_3 | u_1 | u_2 | u_3 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| e_1 | 0 | e_3 | $-e_2$ | $-u_3$ | 0 | u_1 |
| e_2 | $-e_3$ | 0 | e_1 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| e_3 | e_2 | $-e_1$ | 0 | 0 | $-u_3$ | u_2 |
| u_1 | u_3 | u_2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| u_2 | 0 | $-u_1$ | u_3 | 0 | 0 | 0 |
| u_3 | $-u_1$ | 0 | $-u_2$ | 0 | 0 | 0 |

$$B = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3.5.2 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2), \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$

| | e_1 | e_2 | e_3 | u_1 | u_2 | u_3 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| e_1 | 0 | e_3 | $-e_2$ | $-u_3$ | 0 | u_1 |
| e_2 | $-e_3$ | 0 | e_1 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| e_3 | e_2 | $-e_1$ | 0 | 0 | $-u_3$ | u_2 |
| u_1 | u_3 | u_2 | 0 | 0 | e_2 | e_1 |
| u_2 | 0 | $-u_1$ | u_3 | $-e_2$ | 0 | e_3 |
| u_3 | $-u_1$ | 0 | $-u_2$ | $-e_1$ | $-e_3$ | 0 |

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0;$$



3.5.3 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3, 1)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$

| | | | | | | |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | e_1 | e_2 | e_3 | u_1 | u_2 | u_3 |
| e_1 | 0 | e_3 | $-e_2$ | $-u_3$ | 0 | u_1 |
| e_2 | $-e_3$ | 0 | e_1 | $-u_2$ | u_1 | 0 |
| e_3 | e_2 | $-e_1$ | 0 | 0 | $-u_3$ | u_2 |
| u_1 | u_3 | u_2 | 0 | 0 | $-e_2$ | $-e_1$ |
| u_2 | 0 | $-u_1$ | u_3 | e_2 | 0 | $-e_3$ |
| u_3 | $-u_1$ | 0 | $-u_2$ | e_1 | e_3 | 0 |

$$, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Здесь e_i ($i = \overline{1, 3}$) – базис \mathfrak{g} , u_1, u_2, u_3 – базис \mathfrak{m} , нумерация пар соответствует приведенной в [14].

3. ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на \mathfrak{g} есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является \mathfrak{g} -инвариантным. Тензоры кручения $T \in \text{Inv } T_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in \text{Inv } T_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют, соответственно, вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$. Риманова связность, соответствующая форме B , находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{m}} + u(x, y),$$

где $2B(u(x, y), z) = B(x, [z, y]_{\mathfrak{m}}) + B([z, x]_{\mathfrak{m}}, y)$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{m}$. Существует единственная риманова связность без кручения, называемая *Леви – Чевита связностью*.

Тензор Риччи определяется через тензор кривизны следующим образом:

$$\text{Ric}(x, y) = \text{tr}\{z \rightarrow R(z, x)y\},$$

где x, y, z – произвольные касательные векторы на многообразии.

С тензором Риччи связано несколько геометрических свойств многообразия. Многообразии (M, \mathfrak{g}) называется *Риччи-плоским*, если тензор Риччи тождественно равен нулю. Более общее условие – многообразие является *Эйнштейновым*, если $\text{Ric} = \lambda \mathfrak{g}$ для некоторой константы λ . Условие *Риччи-параллельности* – ковариантная производная тензора Риччи равна нулю. Если ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, т. е. $\Lambda(R) = 0$, многообразие называется *локально симметрическим*.

Конформно-плоские многообразия – многообразия, окрестность каждой точки которых может быть конформно отображена на область евклидова пространства. Если размерность многообразия не менее четырех, то многообразие является конформно плоским при равенстве нулю тензора Вейля

$$W(x, y, z, v) = R(x, y, z, v) + R/2\{\mathfrak{g}(x, v)\mathfrak{g}(y, z) - \mathfrak{g}(x, z)\mathfrak{g}(y, v)\} - \{\mathfrak{g}(x, v) \text{Ric}(y, z) - \text{Ric}(x, z)\mathfrak{g}(y, v) + \text{Ric}(x, v)\mathfrak{g}(y, z) - \mathfrak{g}(x, z) \text{Ric}(y, v)\},$$

где x, y, z, v – произвольные касательные векторы на многообразии (а R – скалярная кривизна). В размерности три тензор Вейля всегда равен нулю, вместо



него применяется тензор Коттона (тензор Схоутена – Вейля), который на римановом многообразии задается как тензор 3-го ранга, определяемый с помощью метрики:

$$C(x, y, z) = \nabla_z \text{Ric}(x, y) - \nabla_y \text{Ric}(x, z) + \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_y Rg(x, z) - \nabla_z Rg(x, y)),$$

где $x, y, z \in \mathfrak{m}$. В размерности три равенство нулю тензора Коттона является необходимым и достаточным условием того, что многообразие *конформно-плоское* [15].

Риччи-плоские, Эйнштейновы, Риччи-параллельные, локально-симметрические и конформно-плоские пространства описываются в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть (\bar{g}, g, B) — одно из трехмерных локально римановых однородных пространств, представленных в теореме 1. Риччи-плоские, Эйнштейновы, Риччи-параллельные, локально-симметрические и конформно-плоские пространства выписаны в табл. 1 и 2.

Таблица 1 / Table 1

Риччи-плоские, Эйнштейновы и Риччи-параллельные пространства
Ricci-flat, Einstein and Ricci-parallel spaces

| Пара Pair | Риччи-плоское Ricci-flat | Эйнштейново Einstein | Риччи-параллельное Ricci-parallel |
|--------------|-----------------------------|--|--------------------------------------|
| 1.3.1. | да / yes | да / yes ($\lambda = 0$) | да / yes |
| 1.3.2 | нет / no | да / yes ($\lambda = -2/a$) | да / yes |
| 1.3.3 | нет / no | при / for $b = -a$ ($\lambda = -1/(2a)$) | при / for $b = -a$ |
| 1.3.4 | нет / no | при / for $b = a$ ($\lambda = 1/(2a)$) | при / for $b = a$ |
| 1.3.5 | нет / no | нет / no | да / yes |
| 1.3.6 | нет / no | нет / no | да / yes |
| 1.3.7 | нет / no | нет / no | нет / no |
| 3.5.1 | да / yes | да / yes ($\lambda = 0$) | да / yes |
| 3.5.2 | нет / no | да / yes ($\lambda = -2/a$) | да / yes |
| 3.5.3 | нет / no | да / yes ($\lambda = 2/a$) | да / yes |

Таблица 2 / Table 2

Локально-симметрические и конформно-плоские пространства
Locally symmetric and conformally flat spaces

| Пара Pair | Локально-симметрическое Locally-symmetric | Конформно-плоское Conformally-flat |
|--------------|--|---|
| 1.3.1. | да / yes | да / yes ($R = 0$) |
| 1.3.2 | да / yes | да / yes ($R = -6/a$) |
| 1.3.3 | при / for $b = -a$ | при / for $b = -a$ ($R = -(b + 4a)/(2a^2)$) |
| 1.3.4 | при / for $b = a$ | при / for $b = a$ ($R = (4a - b)/(2a^2)$) |
| 1.3.5 | да / yes | да / yes ($R = -2/a$) |
| 1.3.6 | да / yes | да / yes ($R = 2/a$) |
| 1.3.7 | нет / no | нет / no ($R = -a/2$) |
| 3.5.1 | да / yes | да / yes ($R = 0$) |
| 3.5.2 | да / yes | да / yes ($R = -6/a$) |
| 3.5.3 | да / yes | да / yes ($R = 6/a$) |



Доказательство. Поскольку ограничение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на \mathfrak{g} есть изотропное представление подалгебры, связность однозначно определяется своими значениями на \mathfrak{m} . Будем выписывать ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$, тензор кривизны R будем выписывать его значениями $R(u_1, u_2), R(u_1, u_3), R(u_2, u_3)$, а кручения T — его значениями $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3), T(u_2, u_3)$.

Рассмотрим, например, случай 1.3.3. Аффинная связность имеет вид [12] (по умолчанию все параметры принадлежат \mathbb{R})

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{23} \\ 0 & 0 & p_{13} \\ -p_{32} & p_{31} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ -r_{12} & r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Связность является связностью Леви-Чевита ($\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{m}} + u(x, y)$, где $2B(u(x, y), z) = B(x, [z, y]_{\mathfrak{m}}) + B([z, x]_{\mathfrak{m}}, y)$) при выполнении следующих условий:
 $2p_{31}b = 0, (2p_{32}-1)b = 0, 2p_{13}a = 0, 2p_{23}a+b = 0, -(2p_{32}-1)b = 0, 2p_{31}b = 0, -2p_{23}a-b = 0,$
 $2p_{13}a = 0, 2r_{11}a = 0, -2r_{12}a + b = 0, 2r_{12}a - b = 0, 2r_{11}a = 0, 2r_{33}b = 0.$

Тогда $p_{13} = 0, p_{23} = -b/(2a), p_{31} = 0, p_{32} = 1/2, r_{11} = 0, r_{12} = b/(2a), r_{33} = 0$, а связность имеет вид, представленный в табл. 3.

Таблица 3 / Table 3

Аффинные связности / Affine connections

| Пара / Pair | Аффинная связность / Affine connection |
|--------------|---|
| 1.3.1 | нулевая / zero |
| 1.3.2 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon/a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon/a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.3 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/(2a) \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & b/(2a) \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b/(2a) & 0 \\ -b/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.4 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/(2a) \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & b/(2a) \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b/(2a) & 0 \\ -b/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.5, 1.3.6 | нулевая / zero |
| 1.3.7 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a\varepsilon/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a\varepsilon/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a\varepsilon/2 & 0 \\ -a\varepsilon/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 3.5.1–3.5.3 | нулевая / zero |

Тензор кривизны $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ инвариантной аффинной связности:

$$R(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -p_{13}p_{32} + p_{23}p_{31} - r_{11} & p_{13}p_{31} + p_{23}p_{32} - 1 - r_{12} & 0 \\ -p_{23}p_{32} - p_{13}p_{31} + 1 + r_{12} & -p_{13}p_{32} + p_{23}p_{31} - r_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{23}p_{31} + 2p_{13}p_{32} - r_{33} \end{pmatrix},$$

$$R(u_1, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{13}r_{33} - r_{11}p_{13} - r_{12}p_{23} \\ 0 & 0 & p_{23}r_{33} + r_{12}p_{13} - r_{11}p_{23} \\ p_{31}r_{11} - p_{32}r_{12} - r_{33}p_{31} & p_{31}r_{12} + p_{32}r_{11} - r_{33}p_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{23}r_{33} - r_{12}p_{13} + r_{11}p_{23} \\ 0 & 0 & p_{13}r_{33} - r_{11}p_{13} - r_{12}p_{23} \\ -p_{32}r_{11} - p_{31}r_{12} + r_{33}p_{32} & p_{31}r_{11} - p_{32}r_{12} - r_{33}p_{31} & 0 \end{pmatrix}.$$



Тензор кручения $T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m$ имеет вид $T(u_1, u_2) = (0, 0, 2p_{32} - 1)$, $T(u_1, u_3) = (p_{13} - r_{11}, p_{23} + r_{12}, 0)$, $T(u_2, u_3) = (-p_{23} - r_{12}, p_{13} - r_{11}, 0)$. Для связности Леви – Чевита тензор кривизны примет вид, представленный в табл. 4, а тензор кручения нулевой.

Таблица 4 / Table 4

Тензоры кривизны / Curvature tensors

| Пара / Pair | Тензор кривизны / Curvature tensor |
|-------------|---|
| 1.3.1 | нулевой / zero |
| 1.3.2 | $\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon/a & 0 \\ \varepsilon/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon/a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \varepsilon/a & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.3 | $\begin{pmatrix} 0 & -(3b+4a)/(4a) & 0 \\ (3b+4a)/(4a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2/(4a^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -b/(4a) & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.4 | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2/(4a^2) \\ 0 & -b/(4a) & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & (-3b+4a)/(4a) & 0 \\ (3b-4a)/(4a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2/(4a^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -b/(4a) & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2/(4a^2) \\ 0 & -b/(4a) & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.5 | $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.6 | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 1.3.7 | $\begin{pmatrix} 0 & -3\varepsilon a/4 & 0 \\ 3\varepsilon a/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon a/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2/4 \\ 0 & -\varepsilon a/4 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 3.5.1 | нулевой / zero |
| 3.5.2 | $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ |
| 3.5.3 | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$ |

Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) | x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$.

Прямыми вычислениями получаем, что алгебра голономии имеет вид, представленный в табл. 5. Тогда тензор Риччи $\text{Ric}(x, y) = \text{tr}\{z \rightarrow R(z, x)y\}$ примет вид



$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} p_{23}p_{32} + p_{13}p_{31} - 1 - r_{12} - p_{31}r_{11} + p_{32}r_{12} + r_{33}p_{31} & p_{13}p_{32} - p_{23}p_{31} + r_{11} - p_{31}r_{12} - p_{32}r_{11} + r_{33}p_{32} & 0 \\ -p_{13}p_{32} + p_{23}p_{31} - r_{11} + p_{32}r_{11} + p_{31}r_{12} - r_{33}p_{32} & p_{23}p_{32} + p_{13}p_{31} - 1 - r_{12} - p_{31}r_{11} + p_{32}r_{12} + r_{33}p_{31} & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix},$$

где $H = 2p_{13}r_{33} - 2r_{11}p_{13} - 2r_{12}p_{23}$. Следовательно, при $p_{13} = 0$, $p_{23} = -b/(2a)$, $p_{31} = 0$, $p_{32} = 1/2$, $r_{11} = 0$, $r_{12} = b/(2a)$, $r_{33} = 0$ (для связности Леви – Чевита) тензор Риччи имеет вид, представленный в табл. 6, а пространство не является Риччи-плоским (так как тензор Риччи не равен нулю).

Таблица 5 / Table 5

Алгебры голономии / Holonomy algebras

| Пара Pair | Алгебра голономии Holonomy algebra | Пара Pair | Алгебра голономии Holonomy algebra |
|--------------|--|--------------|--|
| 1.3.1 | нулевая / zero | 3.5.1 | нулевая / zero |
| 1.3.3 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -(b/a)p_2 \\ p_1 & 0 & -(b/a)p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ | 1.3.4 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -(b/a)p_2 \\ p_1 & 0 & -(b/a)p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 1.3.5 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | 1.3.6 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 1.3.7 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -\varepsilon ap_2 \\ p_1 & 0 & -\varepsilon ap_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ | 1.3.2 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -\varepsilon ap_2 \\ p_1 & 0 & -\varepsilon ap_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 3.5.2 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & 0 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ | 3.5.3 | $\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & 0 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$ |

Таблица 6 / Table 6

Тензоры Риччи / Ricci tensors

| Пара Pair | Тензор Риччи Ricci tensor | Пара Pair | Тензор Риччи Ricci tensor |
|--------------|---|--------------|--|
| 1.3.1 | нулевой / zero | 3.5.1 | нулевой / zero |
| 1.3.3 | $\begin{pmatrix} -(b+2a)/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & -(b+2a)/(2a) & 0 \\ 0 & 0 & b^2/(2a^2) \end{pmatrix}$ | 1.3.5 | $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 1.3.4 | $\begin{pmatrix} -(b+2a)/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & -(b+2a)/(2a) & 0 \\ 0 & 0 & b^2/(2a^2) \end{pmatrix}$ | 1.3.6 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| 1.3.7 | $\begin{pmatrix} -\varepsilon a/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon a/2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2/2 \end{pmatrix}$ | 1.3.2 | $\begin{pmatrix} -2\varepsilon/a & 0 & 0 \\ 0 & -2\varepsilon/a & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ |
| 3.5.2 | $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ | 3.5.3 | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ |



Для связности Леви – Чевита

$$\text{Ric} - \lambda B = \begin{pmatrix} -(b + 2a + 2\lambda a^2)/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & -(b + 2a + 2\lambda a^2)/(2a) & 0 \\ 0 & 0 & -b(-b + 2\lambda a^2)/(2a^2) \end{pmatrix},$$

т. е. при $\lambda = -1/(2a)$ и $b = -a$ пространство Эйнштейново (поскольку $\text{Ric} = \lambda B$).

Пространство является Риччи-параллельным, если ковариантная производная тензора Риччи равна нулю, т.е. если $b(a + b)/(2a^2) = 0$, а локально симметрическим при $\Lambda(R) = 0$, т.е. при $b(a + b)/(2a) = 0$. Скалярная кривизна

$$R = -2(-bp_{23}p_{32} - bp_{13}p_{31} + b + br_{12} + bp_{31}r_{11} - bp_{32}r_{12} - p_{31}br_{33} - ap_{13}r_{33} + p_{13}ar_{11} + p_{23}ar_{12})/(ab),$$

для связности Леви – Чевита $R = -(b + 4a)/(2a^2)$. Пространство является конформно-плоским при равенстве нулю тензора Коттона, для связности Леви – Чевита получаем, что $b(a + b)/a^2 = 0$, т.е. $b = -a$.

Аналогично рассмотрим теперь, например, случай 3.5.2. Аффинная связность имеет вид [12]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & -p_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & p_{23} & 0 \\ -p_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Связность является связностью Леви – Чевита при $2p_{23}a = 0$, тогда $p_{23} = 0$, она имеет вид, представленный в табл. 3. Тензор кривизны инвариантной аффинной связности:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_{23}^2 - 1 & 0 \\ p_{23}^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{23}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{23}^2 + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{23}^2 - 1 \\ 0 & p_{23}^2 + 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения — $(0, 0, -2p_{23}), (0, 2p_{23}, 0), (-2p_{23}, 0, 0)$. Для связности Леви – Чевита тензор кривизны примет вид, представленный в табл. 4, тензор кручения нулевой, а алгебра голономии имеет вид, представленный в табл. 5. Тензор Риччи —

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -2p_{23}^2 - 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{23}^2 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{23}^2 - 2 \end{pmatrix},$$

т. е. пространство не является Риччи-плоским при $p_{23} = 0$ (поскольку тензор Риччи не равен нулю), тензор Риччи для связности Леви – Чевита выписан в табл. 6. Скалярная кривизна $R = 3/a(-2p_{23}^2 - 2)$. Находим $\text{Ric} - \lambda B$. Очевидно, что при $\lambda = -2/a$ (и $p_{23} = 0$) пространство Эйнштейново. Также получаем, что (для связности Леви – Чевита) пространство является Риччи-параллельным, локально симметрическим и конформно-плоским (скалярная кривизна $R = -3/(2a)$).

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Прямыми вычислениями для всех римановых однородных пространств получаем, что связности Леви – Чевита имеют вид, приведенный в табл. 3, а их тензоры кривизны — вид, приведенный в табл. 4 (тензоры кручения во всех случаях нулевые).

Алгебры голономии указанных связностей приведены в табл. 5.

Тензоры Риччи $\text{Ric}(x, y) = \text{tr}\{z \rightarrow R(z, x)y\}$ указанных связностей приведены в табл. 6, скалярные кривизны R — в табл. 2. \square



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для всех трехмерных римановых однородных пространств определено, при каких условиях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим или конформно-плоским. Кроме этого, для всех указанных пространств выписаны в явном виде связности Леви – Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Окончание следует.

Библиографический список

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна : в 2 т. М. : Мир, 1990. Т. 1, 318 с. ; Т. 2, 384 с.
2. *Wang M.* Einstein metrics from symmetry and Bundle Constructions // *Surveys in Differential Geometry. VI : Essays on Einstein Manifolds.* Boston, MA : International Press, 1999. P. 287–325.
3. *Решетняк Ю. Г.* Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны // *Сиб. матем. журн.* 1960. Т. 1, № 1. С. 88–116 ; Т. 1, № 2. С. 248–276.
4. *Gray A.* Einstein-like manifolds which are not Einstein // *Geom. Dedicata.* 1978. Vol. 7, iss. 3. P. 259–280. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00151525>
5. *Алексеевский Д. В., Кимельфельд Б. Н.* Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // *Матем. заметки.* 1978. Т. 24, № 1. С. 103–110.
6. *Kowalski O., Nikčević S.* On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // *Geom. Dedicata.* 1996. Vol. 1. P. 65–72. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00240002>
7. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // *Матем. тр.* 2006. Т. 9, № 1. С. 130–168.
8. *Родионов Е. Д.* Односвязные компактные стандартные однородные Эйнштейновы многообразия с группой голономии $SO(n)$ // *Изв. АлтГУ.* 1997. № 1 (3). С. 7–10.
9. *Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Геометрия однородных римановых многообразий // *Современная математика и ее приложения.* 2006. Т. 37. Геометрия. С. 1–78.
10. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований. М. : Физматлит, 1995. 384 с.
11. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry : in 2 vols. N.Y. : John Wiley and Sons, Vol. 1, 1963. 330 p. ; Vol. 2, 1969. 488 p.
12. *Можей Н. П.* Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах. I // *Изв. вузов. Матем.* 2013. № 12. С. 51–68.
13. *Можей Н. П.* Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах. II // *Изв. вузов. Матем.* 2014. № 6. С. 33–48.
14. *Можей Н. П.* Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.
15. *Garcia A., Hehl F. W., Heinicke C., Macias A.* The Cotton tensor in Riemannian spacetimes // *Classical and Quantum Gravity.* 2004. Vol. 21, № 4. P. 1099–1118.

Образец для цитирования:

Можей Н. П. О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. I // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2020. Т. 20, вып. 1. С. 29–41. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-29-41>



On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. I

N. P. Mozhey

Natalya P. Mozhey, <https://orcid.org/0000-0001-9237-7208>, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Brovki St., Minsk 220013, Belarus, mozheynatalya@mail.ru

The problem of establishing links between the curvature and the topological structure of a manifold is one of the important problems of geometry. In general, the purpose of the research of manifolds of various types is rather complicated. Therefore, it is natural to consider this problem for a narrower class of pseudo-Riemannian manifolds, for example, for the class of homogeneous pseudo-Riemannian manifolds. The basic notions – such as an isotropically-faithful pair, a pseudo-Riemannian homogeneous space, an affine connection, curvature and torsion tensors, Levi–Cevita connection, Ricci tensor, Ricci-flat space, Einstein space, Ricci-parallel space, locally-symmetric space, conformally-flat space – are defined. In this paper, for all three-dimensional Riemannian homogeneous spaces, it is determined under what conditions the space is Ricci-flat, Einstein, Ricci-parallel, locally-symmetric or conformally-flat. In addition, Levi–Cevita connections, curvature and torsion tensors, holonomy algebras, scalar curvatures, Ricci tensors are written out in explicit form for all these spaces. The results can be applied in mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are reduced to the study of invariant objects on homogeneous spaces.

Keywords: transformation group, Riemannian manifold, Ricci tensor, Einstein space, conformally-flat space.

Received: 03.11.2018 / Accepted: 31.01.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

The following part is to be published.

References

1. Besse A. *Mnogoobraziya Eynshteyna* [Einstein Manifolds: in 2 vols]. Moscow, Mir, 1990. Vol. 1, 318 p.; vol. 2, 384 p. (in Russian).
2. Wang M. Einstein metrics from symmetry and Bundle Constructions. In: *Surveys in Differential Geometry. VI: Essays on Einstein Manifolds*. Boston, MA, International Press, 1999, pp. 287–325.
3. Reshetnyak Yu. G. Isothermal coordinates in manifolds of bounded curvature. *Sib. Matem. Zhurn.*, 1960, vol. 1, no. 1, pp. 88–116; vol. 1, no. 2, pp. 248–276 (in Russian).
4. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein. *Geom. Dedicata*, 1978, vol. 7, iss. 3, pp. 259–280. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00151525>
5. Alekseevsky D. V., Kimelfeld B. N. Classification of homogeneous conformally flat Riemannian manifolds. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1, pp. 559–562
6. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds. *Geom. Dedicata*, 1996, vol. 62, pp. 65–72. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00240002>
7. Rodionov E. D., Slavsky V. V., Chibrikova L. N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces. *Sib. Adv. Math.*, 2007, vol. 17, pp. 186–212. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1055134407030030>
8. Rodionov E. D. Compact simply connected standard homogeneous Einstein manifolds with holonomy group $SO(n)$. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya of Altai State University], 1997, no. 1 (3), pp. 7–10 (in Russian).



9. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavsky V. V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds. *J. Math. Sci.*, 2007, vol. 146, pp. 6313–6390. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-007-0472-z>
10. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fizmatlit, 1995. 384 p. (in Russian).
11. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*: in 2 vols. New York, John Wiley and Sons, vol. 1, 1963. 330 p.; vol. 2, 1969. 448 p.
12. Mozhey N. P. Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. I. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, iss. 12, pp. 44–62. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13120050>
13. Mozhei N. P. Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. II. *Russ. Math.*, 2014, vol. 58, iss. 6, pp. 28–43. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X14060048>
14. Mozhey N. P. *Trekhmernye izotropno-tochnye odnorodnye prostranstva i svyaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropy-faithful homogeneous spaces and connections on them]. Kazan, KFU Publishing House, 2015. 394 p. (in Russian).
15. Garcia A., Hehl F. W., Heinicke C., Macias A. The Cotton tensor in Riemannian space-times. *Classical and Quantum Gravity*, 2004, vol. 21, no. 4, pp. 1099–1118.

Cite this article as:

Mozhey N. P. On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. I. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 29–41 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-29-41>



On Definability of Universal Graphic Automata by Their Input Symbol Semigroups

V. A. Molchanov, R. A. Farakhutdinov

Vladimir A. Molchanov, <https://orcid.org/0000-0001-6509-3090>, Saratov State University, 83 Ast-rakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, molchanovva@mail.ru

Renat A. Farakhutdinov, <https://orcid.org/0000-0002-2877-8557>, Saratov State University, 83 Ast-rakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, renatfara@mail.ru

Universal graphic automaton $Atm(G, G')$ is the universally attracting object in the category of automata, for which the set of states is equipped with the structure of a graph G and the set of output symbols is equipped with the structure of a graph G' preserved by transition and output functions of the automata. The input symbol semigroup of the automaton is $S(G, G') = \text{End } G \times \text{Hom}(G, G')$. It can be considered as a derivative algebraic system of the mathematical object $Atm(G, G')$ which contains useful information about the initial automaton. It is common knowledge that properties of the semigroup are interconnected with properties of the algebraic structure of the automaton. Hence, we can study universal graphic automata by researching their input symbol semigroups. For these semigroups it is interesting to study the problem of definability of universal graphic automata by their input symbol semigroups — under which conditions are the input symbol semigroups of universal graphic automata isomorphic. This is the subject we investigate in the present paper. The main result of our study states that the input symbol semigroups of universal graphic automata over reflexive graphs determine the initial automata up to isomorphism and duality of graphs if the state graphs of the automata contain an edge that does not belong to any cycle.

Keywords: generalized Galois theory, automaton, graph, semigroup, isomorphism.

Received: 28.02.2019 / Accepted: 24.03.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-42-50>

INTRODUCTION

One of the main trends of the modern algebra is the generalized Galois theory, the basis of which was laid in the research of E. Galois and which is devoted to the study of mathematical objects by means of some derivative algebraic systems connected with the objects in a special way. Various algebraic systems, topological spaces, formal languages and many others were considered as initial mathematical objects, and automorphism groups and endomorphism semigroups of algebraic systems, homeomorphism groups and semigroups of continuous transformations of topological spaces, syntactic monoids of formal languages and many others were considered as derivative algebraic systems. Such studies for automorphism groups of algebraic systems, endomorphism semigroups of graphs, endomorphism rings of modules, and other derivative algebraic systems were very successfully carried out by B. I. Plotkin [1], A. G. Pinus [2,3], L. M. Gluskin [4,5], Yu. M. Vazhenin [6,7], A. V. Mikhalev [8] and many other algebraists. S. Ulam in his well-known book [9] has mentioned the problem of characterization of mathematical objects by their endomorphisms and automorphisms.



The generalized Galois theory also includes studies of structured automata, in which the systems of states and output symbols are objects of some category \mathbf{K} (see, for example, review in [10]). In this case an automaton is considered as an initial mathematical object and the semigroup of input symbols is considered as a derivative algebraic system. For example, L. M. Gluskin, Yu. M. Vazhenin and other authors (see, review in [11]) investigated the endomorphism semigroups of graphs that can be considered as graphic semi-automata (i.e. automata without output symbols, for which the state systems are objects of the graph category \mathbf{Gr}). In particular, Yu. M. Vazhenin in his studies [7] considered graphic semi-automata for graphs that contain an edge which does not belong to any cycle. The main result of the paper states that such graphic semi-automata are completely determined (up to isomorphism and duality of graphs) by their semigroups of input symbols.

In this paper we generalize this result for graphic automata, in which the systems of states and output symbols are objects of the graph category \mathbf{Gr} . For any graphs G, G' , in the category of all graphic automata with the state graph G and the output symbol graph G' there exists the universally attracting object $\text{Atm}(G, G')$ which is called a universal graphic automata over the graphs G, G' . The main result of the paper — Theorem 1 — states that for a reflexive graph G that contains an edge which does not belong to any cycle and a reflexive graph G' the automaton $\text{Atm}(G, G')$ is completely determined (up to isomorphism and duality of graphs) by its input symbol semigroup.

The main result of this paper was announced in [12].

1. PRELIMINARIES

As a preliminary, we introduce some basic terminology from the theory of semi-groups, the theory of automata and the theory of graphs that will be used and state the necessary notation. The reader interested in further details may consult, for instance, A. H. Clifford and G. B. Preston [13], B. I. Plotkin [10], A. M. Bogomolov and V. N. Salii [14], F. Harary [15].

Let X, Y be arbitrary sets and let $\rho \subset X \times Y$ be a binary relation. We put $\text{dom } \rho = \{x \in X : (\exists y \in Y)(x, y) \in \rho\}$, $\rho^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in \rho\}$. By a *mapping* of a set X to a set Y , denoted $\varphi : X \rightarrow Y$ we mean a single-valued binary relation $\varphi \subset X \times Y$ such that $\text{dom } \varphi = X$. For an element $x \in X$, the image of x under φ is denoted by $\varphi(x)$. For a subset $A \subset X$, let us denote $\varphi(A) = \{\varphi(x) \mid x \in A\}$.

A mapping $\varphi : X \rightarrow \{x\}$ denoted c_x is called a *constant mapping* of a set X to an element x . A mapping of a set X to itself is called a *transformation* of X . The *identity transformation* of a set X is denoted by Δ_X . A one-to-one mapping $\varphi : X \rightarrow Y$ satisfying $\varphi(X) = Y$ is called a *bijection* of X onto Y . In this case the *inverse mapping* $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ is defined by the formula $\varphi^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \varphi(x) = y$.

For mappings $\varphi : X \rightarrow Y, \psi : Y \rightarrow Z$, the composition $\varphi\psi : X \rightarrow Z$ is defined by the formula $(\varphi\psi)(x) = \psi(\varphi(x))$ for $x \in X$. Denote the Cartesian product $\varphi \times \varphi = \varphi^2$, where $\varphi^2(x_1, x_2) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2))$ for $x_1, x_2 \in X$.

Following [14], by a *graph* we mean an algebraic structure $G = (X, \rho)$, where X is a non-empty set and ρ is a binary relation $\rho \subset X \times X$ that is called an *adjunct relation*. The elements of X and ρ are called *vertices* and *edges*, respectively. The edge $(x, x) \in \rho$ is called a *loop*. Vertices $x, y \in X$ are called *adjacent* if $(x, y) \in \rho$ or $(y, x) \in \rho$. If $e = (x, y)$ is an edge then e is said to join the vertex x with the vertex y . Edges $e_1 = (x_1, y_1), e_2 = (x_2, y_2)$ are called *adjacent* if $y_1 = x_2$. A sequence of adjacent edges



$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-2}, x_{n-1}), (x_{n-1}, x_n)$ is called a *path* from the vertex x_0 to the vertex x_n . In case of equality $x_0 = x_n$, the path is called a *cycle*.

A graph $G = (X, \rho)$ is called *reflexive* if its adjunct relation ρ is a reflexive binary relation, i.e. $(x, x) \in \rho$ for any $x \in X$. Further, only reflexive graphs are considered.

For a graph $G = (X, \rho)$ the graph $\tilde{G} = (X, \rho^{-1})$ is called *the dual graph* of G .

Let $G = (X, \rho), G' = (X', \rho')$ be graphs. A mapping $\varphi : X \rightarrow X'$ is called a *homomorphism* of G to G' , denoted $\varphi : G \rightarrow G'$, if the following condition holds:

$$(\forall x, y \in X)((x, y) \in \rho \Rightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in \rho').$$

We denote by $\text{Hom}(G, G')$ the set of all homomorphisms of G to G' . Obviously, for any vertex $x \in X'$, satisfying $(x, x) \in \rho'$, the constant mapping $c_x : X \rightarrow \{x\}$ is a homomorphism of G to G' .

A homomorphism $\varphi : G \rightarrow G'$ is called an *isomorphism* of G onto G' if φ is a bijection of X onto X' and the following condition holds:

$$(\forall x, y \in X)((x, y) \in \rho \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in \rho').$$

An isomorphism of G onto \tilde{G}' is called an *anti-isomorphism* of G onto G' . Graphs G, G' are called *isomorphic* (respectively, *anti-isomorphic*) if there is an isomorphism (respectively, an anti-isomorphism) of G onto G' .

A homomorphism of a graph $G = (X, \rho)$ to itself is called an *endomorphism* of G . We denote by $\text{End } G$ the semigroup of all endomorphisms of G under the composition. Obviously, the identity transformation Δ_X of the vertex set X is an endomorphism of G . Moreover, for any $x \in X$, the constant mapping $c_x : X \rightarrow \{x\}$ is an endomorphism of G .

For graphs $G, G', S(G, G')$ let us denote the semigroup $\text{End } G \times \text{Hom}(G, G')$ equipped with the following binary operation [10]

$$(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1),$$

where $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in \text{End } G \times \text{Hom}(G, G')$.

We denote by $Z(G, G')$ the set of all right zeros of the semigroup $S(G, G')$ and by $U(G, G')$ the set of all left identities of the semigroup $S(G, G')$. These sets are respectively defined in the semigroup $S(G, G')$ by the formulas of the semigroup theory $\Phi(x) = (\forall y)(yx = x)$ and $\Psi(x) = (\forall y)(xy = y)$. By analogy with the lemmas 2.1–2.3 [16], it is easy to prove the following results.

Lemma 1. *For any reflexive graphs $G = (X, \rho), G' = (X', \rho')$, the semigroup $S(G, G')$ satisfies the following conditions:*

- 1) *an element $s \in S(G, G')$ is a right zero of the semigroup $S(G, G')$ if and only if there exist $a \in X, b \in X'$ such that $s = (c_a, c_b)$ for the constant mappings $c_a : X \rightarrow \{a\}, c_b : X \rightarrow \{b\}$;*
- 2) *an element $s \in S(G, G')$ is a left identity of the semigroup $S(G, G')$ if and only if $s = (\Delta_X, \psi)$ for some $\psi \in \text{Hom}(G, G')$.*

Lemma 2. *Let $G = (X, \rho), G' = (X', \rho')$ be reflexive graphs. Then the formula of the semigroup theory*

$$\Sigma(x, y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y) \wedge (\forall e)(\Psi(e) \Rightarrow xe = ye)$$

defines the binary relation $\varepsilon_{(G, G')}$ on the semigroup $S(G, G')$, such that the following statements hold:



- 1) $\varepsilon_{(G,G')}$ is an equivalence on the set $Z(G,G')$ such that for any elements $s, s_1 \in Z(G,G')$, $s \equiv s_1(\varepsilon_{(G,G')})$ if and only if $s = (c_a, c_x)$, $s_1 = (c_a, c_y)$, for some $a \in X$ and $x, y \in X'$;
- 2) for any right zero $s = (c_a, c_b)$ of the semigroup $S(G,G')$ the equivalence class $\varepsilon_{(G,G')}(s)$ is $\{(c_a, c_x) \mid x \in X'\}$.

Following [10], by an automaton we mean a system $A = (X, S, X', \delta, \lambda)$ consisting of a set of states X , a semigroup of input symbols S , a set of output symbols X' , a transition function $\delta : X \times S \rightarrow X$ and an output function $\lambda : X \times S \rightarrow X'$ such that

$$\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t) \quad \text{and} \quad \lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t)$$

for any $x \in X$ and $s, t \in S$.

For every $s \in S$, we define the mappings $\delta_s : X \rightarrow X$, $\lambda_s : X \rightarrow X'$ by the formulas

$$\delta_s(x) = \delta(x, s), \quad \lambda_s(x) = \lambda(x, s),$$

where $x \in X$.

An automaton $A = (X, S, X', \delta, \lambda)$ is said to be *graphic* if its sets X and X' are equipped with structures of graphs $G = (X, \rho)$ and $G' = (X', \rho')$ such that for every $s \in S$ the transition function δ_s is an endomorphism of G and the output function λ_s is a homomorphism of G to G' respectively. In this case we denote the automaton by $A = (G, S, G', \delta, \lambda)$.

By a *homomorphism* of a graphic automaton $A = (G, S, G', \delta, \lambda)$ into a graphic automaton $A_1 = (G_1, S_1, G'_1, \delta_1, \lambda_1)$ we mean an ordered triplet $\gamma = (f, \pi, g)$, consisting of homomorphisms $f : G \rightarrow G_1$, $\pi : S \rightarrow S_1$, $g : G' \rightarrow G'_1$, such that, for any $x \in X$, $s, t \in S$, the following conditions hold

$$\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t), \quad f(\delta(x, s)) = \delta_1(f(x), \pi(s)), \quad g(\lambda(x, s)) = \lambda_1(f(x), \pi(s)).$$

A homomorphism $\gamma = (f, \pi, g)$ of A to A_1 is called an *isomorphism* of the automaton A onto the automaton A_1 if $f : G \rightarrow G_1$, $\pi : S \rightarrow S_1$, $g : G' \rightarrow G'_1$ are isomorphisms.

An important example of a graphic automaton is given by the following algebraic system

$$\text{Atm}(G, G') = (G, S(G, G'), G', \delta^\circ, \lambda^\circ),$$

where $G = (X, \rho)$, $G' = (X', \rho')$ are graphs and for every $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(G, G')$ the equalities $\delta^\circ(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x)$, $\lambda^\circ(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x)$ hold. It is easy to verify that the automaton $\text{Atm}(G, G')$ satisfies the following universal property: for any graphic automaton $A = (G, S, G', \delta, \lambda)$ there exists a homomorphism $\pi : S \rightarrow S(G, G')$ such that $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_{X'})$ is a homomorphism of A to $\text{Atm}(G, G')$. For this reason the automaton $\text{Atm}(G, G')$ is called [10] a *universal graphic automaton* over the graphs G, G' .

2. MAIN RESULT

The main result of this paper gives us the following solution of the problem of definability of universal graphic automata by their input symbol semigroups.

Theorem 1. *Let G, G', G_1, G'_1 be reflexive graphs, such that the graph G contains an edge which does not belong to any cycle, and $\text{Atm}(G, G'), \text{Atm}(G_1, G'_1)$ be the universal graphic automata over the graphs G, G' and G_1, G'_1 respectively. Then the following conditions are equivalent:*



- 1) the graphs G, G' are isomorphic to the graphs G_1, G'_1 or to the dual graphs $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}'_1$ respectively;
- 2) the semigroups of input symbols $S(G, G'), S(G_1, G'_1)$ of the automata $\text{Atm}(G, G'), \text{Atm}(G_1, G'_1)$ are isomorphic;
- 3) the automaton $\text{Atm}(G, G')$ is isomorphic to the automaton $\text{Atm}(G_1, G'_1)$ or to the automaton $\text{Atm}(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}'_1)$ over the dual graphs $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}'_1$.

Proof. Obviously, 3) implies 1), 2). On the other hand, any isomorphisms $f : G \rightarrow G_1, g : G' \rightarrow G'_1$ determine a mapping $\pi : S(G, G') \rightarrow S(G_1, G'_1)$ by the formula

$$\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)),$$

where $(\varphi, \psi) \in S(G, G')$. Indeed, by the definition, the image $f^2(\varphi) = f^{-1}\varphi f$ is an endomorphism of G_1 and the image $(f \times g)(\psi) = f^{-1}\psi g$ is a homomorphism of G_1 to G'_1 . It is easy to verify that π is an isomorphism of the semigroup $S(G, G')$ onto the semigroup $S(G_1, G'_1)$ such that the ordered triplet $\gamma = (f, \pi, g)$ is an isomorphism of the automaton $\text{Atm}(G, G')$ onto the automaton $\text{Atm}(G_1, G'_1)$.

Similarly, any isomorphisms f, g of the graphs G, G' onto the dual graphs $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}'_1$ determine an isomorphism $\pi : S(G, G') \rightarrow S(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}'_1)$ by the formula $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))$ (here $(\varphi, \psi) \in S(G, G')$) such that the ordered triplet $\gamma = (f, \pi, g)$ is an isomorphism of the automaton $\text{Atm}(G, G')$ onto the automaton $\text{Atm}(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}'_1)$. Hence, 1) implies 3).

Let us now verify that 2) implies 1). Let π be an isomorphism of the semigroup $S(G, G')$ onto the semigroup $S(G_1, G'_1)$. It is well-known that any isomorphism holds the true value of formulas of the semigroup theory. In particular, the isomorphism π preserves the true value of the formulas $\Phi(x), \Psi(x)$ and $\Sigma(x, y)$. It follows that π maps the set $Z(G, G')$ of right zeros of the semigroup $S(G, G')$ onto the set $Z(G_1, G'_1)$ of right zeros of the semigroup $S(G_1, G'_1)$ and the set $U(G, G')$ of left identities of the semigroup $S(G, G')$ onto the set $U(G_1, G'_1)$ of left identities of the semigroup $S(G_1, G'_1)$. Moreover, by lemma 2 the Cartesian product π^2 maps the equivalence $\varepsilon = \varepsilon_{(G, G')}$ on the semigroup $S(G, G')$ onto the equivalence $\varepsilon_1 = \varepsilon_{(G_1, G'_1)}$ on the semigroup $S(G_1, G'_1)$. In view of lemma 1, for any $a \in X, a' \in X'$, there exist $a_1 \in X_1, a'_1 \in X'_1$ such that $\pi(c_a, c_{a'}) = (c_{a_1}, c_{a'_1})$. Hence, π maps the equivalence class $\varepsilon(c_a, c_{a'})$ onto the equivalence class $\varepsilon_1(c_{a_1}, c_{a'_1})$. It follows that the formulas $f(a) = a_1$ and $g_a(a') = a'_1$ determine the mappings $f : X \rightarrow X_1$ and $g_a : X' \rightarrow X'_1$ ($a \in X$) such that the equality holds

$$\pi(c_a, c_{a'}) = (c_{f(a)}, c_{g_a(a')}). \tag{1}$$

It is easy to verify that f is a bijection of X onto X_1 and for every $a \in X, g_a$ is a bijection of X' onto X'_1 .

Consider $(\varphi, \psi) \in S(G, G')$ and for arbitrary $a \in X$ we denote

$$\varphi(a) = b, \psi(a) = d. \tag{2}$$

By definition of $S(G, G')$ for any $y \in X'$ the equalities hold

$$(c_a, c_y) \cdot (\varphi, \psi) = (c_a\varphi, c_a\psi) = (c_{\varphi(a)}, c_{\psi(a)}).$$

Then (2) is equivalent to the equality $(c_a, c_y) \cdot (\varphi, \psi) = (c_b, c_d)$.



By definition of the isomorphism π ,

$$\pi(c_a, c_y) \cdot \pi(\varphi, \psi) = \pi(c_b, c_d). \quad (3)$$

Let us denote $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi')$. By (1),

$$\pi(c_a, c_y) = (c_{f(a)}, c_{g_a(y)}), \quad \pi(c_b, c_d) = (c_{f(b)}, c_{g_b(d)}).$$

Then (3) implies

$$(c_{f(a)}, c_{g_a(y)}) \cdot (\varphi', \psi') = (c_{f(b)}, c_{g_b(d)}).$$

On the other hand,

$$(c_{f(a)}, c_{g_a(y)}) \cdot (\varphi', \psi') = (c_{f(a)}\varphi', c_{f(a)}\psi') = (c_{\varphi'(f(a))}, c_{\psi'(f(a))}).$$

Hence,

$$(c_{\varphi'(f(a))}, c_{\psi'(f(a))}) = (c_{f(b)}, c_{g_b(d)}),$$

which is equivalent to the following condition

$$\varphi'(f(a)) = f(b) = f(\varphi(a)), \quad \psi'(f(a)) = g_b(d) = g_{\varphi(a)}(\psi(a)). \quad (4)$$

Then (4) implies that $f\varphi' = \varphi f$, $\varphi' = f^{-1}\varphi f = f^2(\varphi)$ and $\psi' = \psi^\varphi$, where the mapping $\psi^\varphi : X_1 \rightarrow X'_1$ is defined by the formula

$$\psi^\varphi(f(a)) = g_{\varphi(a)}(\psi(a))$$

for every $a \in X$.

Thus, for any $(\varphi, \psi) \in S(G, G')$, the following equality holds

$$\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi). \quad (5)$$

It follows that the mapping $\pi_1 = f^2$ is a bijection of the set $\text{End } G$ onto the set $\text{End } G_1$. Moreover, it is obvious that f^2 preserves the composition. Hence, for any $\varphi, \varphi_1 \in \text{End } G$ the equality $\pi_1(\varphi\varphi_1) = \pi_1(\varphi)\pi_1(\varphi_1)$ holds. Then the mapping π_1 is an isomorphism of the semigroup $\text{End } G$ onto the semigroup $\text{End } G_1$. By the condition of the theorem G is a reflexive graph with an edge $(u_0, v_0) \in \rho$ which does not belong to any cycle. It follows from [7] that the mapping f is an isomorphism of the graph G onto the graph G_1 or onto the dual graphs \widetilde{G}_1 .

Suppose that f is an isomorphism of G onto G_1 . Hence $(f(u_0), f(v_0)) \in \rho_1$ is an edge of the graph G_1 , which does not belong to any cycle. Next we show that, for any point $a \in X$ the mapping g_a is an isomorphism of the graph G' onto the graph G'_1 . It is easy to verify that for vertices $x_0, y_0 \in X'$ the condition $(x_0, y_0) \in \rho'$ is equivalent to the condition $\psi^2(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$ for some homomorphism $\psi \in \text{Hom}(G, G')$. Indeed, if $\psi^2(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$ for some homomorphism $\psi : G \rightarrow G'$ then $(x_0, y_0) \in \rho'$ by the definition of graph homomorphism. On the other hand, let $(x_0, y_0) \in \rho'$. Define a mapping $\psi : X \rightarrow X'$ by the following formula:

$$\psi(u) = \begin{cases} y_0, & \text{if there exists a path from the vertex } v_0 \text{ to the vertex } u, \\ x_0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



We show that ψ is a homomorphism of the graph G to the graph G' . Let $(s, t) \in \rho$. If there exists a path from the vertex v_0 to the vertex s , then by the condition $(s, t) \in \rho$ there exists a path from the vertex v_0 to the vertex t . Then by our definition of ψ the conditions $\psi(s) = \psi(t) = y_0$ hold. Since the graph G is reflexive, the conditions $(\psi(s), \psi(t)) = (y_0, y_0) \in \rho'$ hold. If there is no a path from the vertex v_0 to the vertex s , then by our definition of ψ the condition $\psi(s) = x_0$ holds. Since $\psi(t) \in \{x_0, y_0\}$ and the graph G is reflexive, the condition $(\psi(s), \psi(t)) \in \rho'$ holds.

Thus, in any case the condition $(s, t) \in \rho$ implies $(\psi(s), \psi(t)) \in \rho'$. Hence $\psi \in \text{Hom}(G, G')$.

Since $(f(u_0), f(v_0)) \in \rho_1$ is an edge of the graph G_1 , which does not belong to any cycle, it is similar for vertices $x'_0, y'_0 \in X'_1$ that the condition $(x'_0, y'_0) \in \rho'_1$ is equivalent to the condition $\psi^2(f(u_0), f(v_0)) = (x'_0, y'_0)$ for some homomorphism $\psi \in \text{Hom}(G_1, G'_1)$.

Suppose that for vertices $x_0, y_0 \in X'$ the condition $(x_0, y_0) \in \rho'$ holds. It is equivalent to the condition $\psi^2(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$ for some $\psi \in \text{Hom}(G, G')$. Hence $(c_a, \psi) \in S(G, G')$ and, as it was proved before, $\pi((c_a, \psi)) = (c_{f(a)}, \psi^{c_a})$ for the homomorphism $\psi^{c_a} \in \text{Hom}(G_1, G'_1)$. By our definition of the mapping ψ^{c_a} for any $x \in X$ the following equalities hold:

$$\psi^{c_a}(f(x)) = g_{c_a(x)}(\psi(x)) = g_a(\psi(x)).$$

In particular, for $u_0, v_0 \in X$ the following equalities hold:

$$\psi^{c_a}(f(u_0)) = g_a(\psi(u_0)) = g_a(x_0), \quad \psi^{c_a}(f(v_0)) = g_a(\psi(v_0)) = g_a(y_0).$$

It follows that the homomorphism $\psi^{c_a} \in \text{Hom}(G_1, G'_1)$ maps the ordered pair $(f(u_0), f(v_0)) \in \rho_1$ to the ordered pair $(g_a(x_0), g_a(y_0))$ and the condition $(g_a(x_0), g_a(y_0)) \in \rho'_1$ holds.

Let us assume the converse case — for some vertices $x'_0, y'_0 \in X'_1$ the condition $(x'_0, y'_0) \in \rho'_1$ holds. It is equivalent to the condition $\psi_1^2(f(u_0), f(v_0)) = (x'_0, y'_0)$ for some homomorphism $\psi_1 \in \text{Hom}(G_1, G'_1)$. Hence, $(c_{f(a)}, \psi_1) \in S(G_1, G'_1)$ and by our definition of the isomorphism $\pi : S(G, G') \rightarrow S(G_1, G'_1)$ there exists $(\varphi, \psi) \in S(G, G')$ such that $\pi((\varphi, \psi)) = (c_{f(a)}, \psi_1)$. From the previously proven part follows that $c_{f(a)} = f^2(\varphi)$ and $\psi_1 = \psi^\varphi$. Since $c_{f(a)} = f^{-1}\varphi f$ the condition $\varphi = f c_{f(a)} f^{-1} = c_a$ holds. Hence

$$x'_0 = \psi_1(f(u_0)) = \psi^{c_a}(f(u_0)) = g_a(\psi(u_0)), \quad \psi(u_0) = g_a^{-1}(x'_0),$$

$$y'_0 = \psi_1(f(v_0)) = \psi^{c_a}(f(v_0)) = g_a(\psi(v_0)), \quad \psi(v_0) = g_a^{-1}(y'_0)$$

and the homomorphism $\psi \in \text{Hom}(G, G')$ maps the ordered pair $(u_0, v_0) \in \rho$ to the ordered pair $(g_a^{-1}(x'_0), g_a^{-1}(y'_0))$. Thus, $(g_a^{-1}(x'_0), g_a^{-1}(y'_0)) \in \rho'$ and g_a is an isomorphism of the graph G' onto the graph G'_1 .

Similarly, if f is an isomorphism of the graph G onto the dual graphs \widetilde{G}_1 , then all mappings g_a are isomorphisms of the graph G' onto the dual graphs \widetilde{G}'_1 , since in this case the condition $(u_0, v_0) \in \rho$ is equivalent to the condition $(f(v_0), f(u_0)) \in \rho_1$ and hence $(x_0, y_0) \in \rho'$ is equivalent to $(g_a(y_0), g_a(x_0)) \in \rho'_1$. Therefore, 2) implies 1). \square

CONCLUSION

The results obtained shows that universal graphic automata over the graphs from a wide class of graphs are completely determined (up to isomorphism and the duality of



graphs) by their input symbol semigroups. Consequently, on the one hand, the characteristics of the input symbol semigroups of universal graphic automata must be defined by the characteristics of the automata, and on the other hand, the characteristics of these semigroups must characterize the automata to same extent. This approach allows us to study the properties of such automata by studying properties of their input symbols semigroups.

References

1. Plotkin B. I. *Groups of Automorphisms of Algebraic Systems*. Groningen, The Netherlands, Wolters-Noordhoff Publ., 1972. 502 p.
2. Pinus A. G. On the elementary equivalence of derived structures of free lattices. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2002, vol. 46, no. 5, pp. 42–45.
3. Pinus A. G. Elementary Equivalence of Derived Structures of Free Semigroups. *Algebra and Logic*, 2004, vol. 43, no. 6, pp. 408–417. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:ALLO.0000048829.60182.48>
4. Gluskin L. M. Semigroups and rings of endomorphisms of linear spaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1959, vol. 23, iss. 6, pp. 841–870 (in Russian).
5. Gluskin L. M. Semi-groups of isotone transformations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1961, vol. 16, iss. 5 (101), pp. 157–162 (in Russian).
6. Vazhenin Yu. M. Ordered sets and their inf-endomorphisms. *Math. Notes*, 1970, vol. 7, iss. 3, pp. 204–208. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01093116>
7. Vazhenin Yu. M. The elementary definability and elementary characterizability of classes of reflexive graphs. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1972, no. 7, pp. 3–11 (in Russian).
8. Markov V. T., Mikhalev A. V., Skornyakov L. A., Tuganbaev A. A. Rings of endomorphisms of modules and lattices of submodules. *J. Soviet Math.*, 1985, vol. 31, iss. 3, pp. 3005–3051. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02106808>
9. Ulam S. M. *A Collection of Mathematical Problems*. New York, Interscience, 1960. 150 p.
10. Plotkin B. I., Greenglaz L. Ja., Gvaramija A. A. *Algebraic structures in automata and databases theory*. River Edge, NJ, World Scientific Publ. Co., 1992. 296 p.
11. Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs. *Semigroup Forum*, 1983, vol. 27, pp. 155–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02572738>
12. Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On universal graphic automata. In: *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii: materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii* [Computer Science and Information Technologies: Materials of the Int. Sci. Conf.]. Saratov, Izdatel'skii tsentr "Nauka", 2018, pp. 276–279 (in Russian).
13. Clifford A. H., G. B. Preston. *The algebraic theory of semigroups*. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1964. 224 p.
14. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997. 368 p. (in Russian).
15. Harary F. *Graph Theory*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1969. 274 p.
16. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols. *Semigroup Forum*, 2011, vol. 82, iss. 1, pp. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00233-010-9256-8>

Cite this article as:

Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On Definability of Universal Graphic Automata by Their Input Symbol Semigroups. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-42-50>



УДК 519.713.2

Об определяемости универсальных графических автоматов своими полугруппами входных сигналов

В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов

Молчанов Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, molchanovva@mail.ru

Фарахутдинов Ренат Абуханович, студент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, renatfara@mail.ru

Универсальный графический автомат $Atm(G, G')$ — это универсально притягивающий объект в категории автоматов, у которых множество состояний наделено структурой графа G и множество выходных сигналов — структурой графа G' , сохраняющимися функциями переходов и выходов автоматов. Полугруппа входных сигналов такого автомата имеет вид $S(G, G') = \text{End } G \times \text{Hom}(G, G')$. Она может рассматриваться как производная алгебраическая система математического объекта $Atm(G, G')$, которая содержит полезную информацию об исходном объекте. Хорошо известно, что свойства такой полугруппы взаимосвязаны со свойствами алгебраической структуры автомата. Следовательно, универсальные графические автоматы можно изучать путем исследования их полугрупп входных сигналов. Для таких полугрупп представляет интерес проблема определяемости универсальных графических автоматов своими полугруппами входных сигналов: при каких условиях полугруппы входных сигналов универсальных графических автоматов будут изоморфны. В данной работе мы исследовали эту проблему. Основным результатом нашей работы состоит в том, что универсальные графические автоматы над рефлексивными графами определяются полугруппами своих входных сигналов с точностью до изоморфизма и двойственности графов, если в графе состояний автомата найдется дуга, не входящая ни в один орцикл.

Ключевые слова: обобщенная теория Галуа, автомат, граф, полугруппа, изоморфизм.

Поступила в редакцию: 28.02.2019 / Принята: 24.03.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Образец для цитирования:

Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. On Definability of Universal Graphic Automata by Their Input Symbol Semigroups [Молчанов В. А., Фарахутдинов Р. А. Об определяемости универсальных графических автоматов своими полугруппами входных сигналов] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-42-50>



УДК 517.518.8

Принцип локализации на классе функций, интегрируемых по Риману, для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля

А. Ю. Трынин, Е. Д. Киреева

Трынин Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, tayu@rambler.ru

Киреева Екатерина Дмитриевна, студентка механико-математического факультета, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, ekateriha98@mail.ru

Будем говорить, что для интерполяционного процесса Лагранжа–Штурма–Лиувилля $L_n^{SL}(f, x)$ на классе функций F в точке $x_0 \in [0, \pi]$ имеет место принцип локализации, если из того, что для любых двух функций f и g , принадлежащих F , таких, что в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$, $\delta > 0$ выполняется условие $f(x) = g(x)$, следует соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n^{SL}(f, x_0) - L_n^{SL}(g, x_0)| = 0$. Доказано, что для интерполяционных процессов, построенных по собственным функциям регулярной задачи Штурма–Лиувилля с непрерывным потенциалом ограниченной вариации, имеет место принцип локализации на классе функций, интегрируемых в смысле Римана. Установлено, что для интерполяционных процессов, построенных по собственным функциям регулярной задачи Штурма–Лиувилля с необязательно непрерывным потенциалом ограниченной вариации, имеет место принцип локализации на классе непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций. Рассмотрен случай краевых условий третьего рода, из которых удалены граничные условия первого рода. Аппроксимативные свойства операторов Лагранжа–Штурма–Лиувилля в точке $x_0 \in [0, \pi]$ в обоих случаях зависят только от значений приближаемой функции лишь в окрестности этой точки $x_0 \in [0, \pi]$.

Ключевые слова: интерполяционный процесс, собственные функции, приближение функции, принцип локализации.

Поступила в редакцию: 31.10.2018 / Принята: 15.12.2018 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-51-63>

ВВЕДЕНИЕ

Г. И. Натансон в [1] установил, что для функций из класса Дини–Липшица имеет место равномерная сходимость внутри интервала $(0, \pi)$, т.е. равномерная на любом компакте, содержащемся в $(0, \pi)$, процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f, x) = \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} = \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}) l_{k,n}^{SL}(x), \quad (1)$$



где U_n есть n -я собственная функция регулярной задачи Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} U'' + [\lambda - q]U = 0, \\ U'(0) - hU(0) = 0, \\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0, \pi]$ и граничными условиями, гарантирующими, что главный член в асимптотических формулах для U_n будет косинусом, т.е. $h \neq \pm\infty$, $H \neq \pm\infty$. Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули функции U_n .

Свойства операторов интерполирования функций лагранжевого вида (1) тесно связаны с поведением синк-приближений

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin nx}{\sin' \left(n \frac{k\pi}{n}\right) \left(x - \frac{k\pi}{n}\right)} f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad (3)$$

используемых в теореме отсчетов Уиттекера – Котельникова – Шеннона (см. [2–5]). Наиболее полный обзор результатов, полученных в области исследования свойств синк-аппроксимаций (3) аналитических на действительной оси функции, экспоненциально убывающих на бесконечности, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти, например, в [4] и [6]. Синк-приближения нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной так и нескольких переменных [7–23] в теории квадратурных формул [4] и теории вейвлет-преобразований или всплесков [2, 3, 5]. В [20–22] и [23] предложены различные модификации синк-приближений (3), позволяющие аппроксимировать непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$.

Изучению аппроксимативных свойств самих операторов Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) посвящены также работы [24–34]. В работе [24] устанавливается существование непрерывной на $[0, \pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) которой неограниченно расходится почти всюду на $[0, \pi]$. Исследования, проведенные в [25, 34], показывают, что при сколь угодно малом изменении параметров задачи Штурма – Лиувилля (2) (потенциала q , или констант h, H) аппроксимативные свойства процессов (1) могут сильно измениться. В [31] и [32] получены различные признаки равномерной сходимости интерполяционных процессов (2).

В монографии [33] приведены более подробные доказательства и исправлены опечатки, обнаруженные в некоторых формулах более ранних публикаций.

В настоящей работе, используя концепции исследований в [35–41], установлено, что для интерполяционных процессов (1), построенных по решениям задачи Штурма – Лиувилля (2), имеет место принцип локализации на классе функций, интегрируемых по Риману.

На протяжении всей работы, если не оговорено иное, будем считать потенциал q задачи Штурма – Лиувилля (2) непрерывной функцией ограниченной вариации на $[0, \pi]$. Договоримся также, что собственная функция будет нормирована условием $U_n(0) = 1$. Рассматриваем краевые условия (2) третьего рода, из которых исключены условия типа Дирихле, т.е. $h \neq \pm\infty$, $H \neq \pm\infty$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Приведем некоторые вспомогательные утверждения, которые будут использованы при доказательстве основного результата работы.



Лемма 1 ([31, 32, 42]). Пусть U_n — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n , регулярной задачи Штурма – Лиувилля (2). Через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$ обозначим нули функции U_n . Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:

$$U_n(x) = \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx + O(n^{-2}), \tag{4}$$

$$U'_n(x) = -n \sin nx + \beta(x) \cos nx + O(n^{-1}), \tag{5}$$

$$U'_n(x_{k,n}) = (-1)^k n + O(n^{-1}), \tag{6}$$

$$x_{k,n} = \frac{2k-1}{2n} \pi + n^{-2} \beta\left(\frac{2k-1}{2n} \pi\right) + O(n^{-3}), \tag{7}$$

где $\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(\tau) d\tau$, $c = \frac{1}{\pi} \left(h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(\tau) d\tau \right)$, а оценка остаточного члена во всех формулах (4)–(7) равномерна по $x \in [0, \pi]$ или $1 \leq k \leq n$.

Замечание 1. Из асимптотической формулы (4) видно, что выбранная нормировка собственных функций U_n обеспечивает их ограниченность в совокупности. Обозначим

$$\mathbb{M} = \sup\{|U_n(x)|, x \in [0, \pi], n \in \mathbb{N}\} < \infty. \tag{8}$$

Будем называть групповым сегментом I объединение конечного числа отрезков, содержащихся в $[A, B]$, таких, что соответствующие им интервалы не пересекаются. Пусть $\{x_{k,n}\}_{k=1, n=1}^\infty$ — произвольная система точек в отрезке $[A, B]$: $A \leq x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} \leq B$. Каждому $x_{k,n}$ поставим в соответствие действительное число $A_{k,n}$.

Доказательство следующей леммы содержится в [43, с. 318–326].

Лемма 2. Пусть функция f интегрируема в смысле Римана на отрезке $[A, B]$, $x_0 \in [A, B]$, $\delta > 0$ и $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [A, B]$. Для того чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [A, B] \setminus O_\delta(x_0)} A_{k,n} f(x_{k,n}) = 0, \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы действительные коэффициенты удовлетворяли условиям:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [a, b]} A_{k,n} = 0$, где $[a, b]$ — произвольный отрезок, содержащийся в $[A, B] \setminus O_\delta(x_0)$;
- 2) $\max_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k: x_{k,n} \in [A, B] \setminus O_\delta(x_0)} |A_{k,n}| \leq M < \infty$;
- 3) для любой последовательности групповых сегментов $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ таких, что $[A, B] \setminus O_\delta(x_0) \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_j \supset \dots$, $\text{mes } I_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in I_j} |A_{k,n}| = 0.$$

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Будем говорить, что для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) на классе функций F в точке $x_0 \in [0, \pi]$ имеет место принцип локализации, если из того, что для любых двух функций f и g , принадлежащих F , таких, что в некоторой окрестности $O_\delta(x_0)$, $\delta > 0$ выполняется условие $f(x) = g(x)$, следует соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n^{SL}(f, x_0) - L_n^{SL}(g, x_0)| = 0$.



Теорема 1. В любой точке $x_0 \in [0, \pi]$ на классе непрерывных на $[0, \pi]$ функций для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) (в случае не обязательно непрерывного потенциала q ограниченной вариации в (2)) имеет место принцип локализации.

Доказательство. Для пространства непрерывных, исчезающих на концах отрезка, функций $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$ теорема 1 следует из [33, Предложение 19]. Действительно, положив в задаче Коши [33, формула (2.2)] $q_\lambda \equiv q$, $h(\lambda) \equiv h$ и рассматривая только собственные значения $\lambda = \lambda_n$ задачи Штурма – Лиувилля (2), получим, что оператор Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) является частным случаем оператора [33, формула (3.3)]. Так как в этом случае имеем $L_n^{SL}(f, \cdot) \equiv S_{\lambda_n}(f, \cdot)$.

Сделав замену неизвестной функции как в [33, Предложение 20], убеждаемся в справедливости принципа локализации на классе $C[0, \pi]$ для любой точки x_0 интервала $(0, \pi)$. Используя асимптотические формулы (4)–(7), непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости принципа локализации для интерполяционных процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) на классе непрерывных на $[0, \pi]$ функций в точках $x = 0$ и $x = \pi$. Теорема 1 доказана. \square

Замечание 2. Теорема 1 остается справедливой в случае не обязательно непрерывного потенциала q , так как предложения 19 и 20 в [33] доказываются в предположении ограниченности вариации потенциала q в задаче Коши [33, формула (2.2)].

В настоящей работе устанавливается справедливость принципа локализации для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля на более широком функциональном классе.

Теорема 2. В любой точке $x_0 \in [0, \pi]$ на классе интегрируемых в смысле Римана на $[0, \pi]$ функций для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) имеет место принцип локализации.

Доказательство. Пусть $x_0 \in [0, \pi]$. Зафиксируем любое положительное δ и возьмем произвольную интегрируемую по Риману на $[0, \pi]$ функцию f , равную нулю при $x \in O_\delta(x_0)$. В силу леммы 2, чтобы для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля (1) имел место принцип локализации, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^{SL}(f, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}) l_{k,n}^{SL}(x_0) = 0, \quad (10)$$

необходимо и достаточно, чтобы для значений фундаментальных функций $l_{k,n}^{SL}(x_0)$ выполнялось одновременно три условия:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in [a, b]} l_{k,n}^{SL}(x_0) = 0, \quad (11)$$

где $[a, b]$ — произвольный отрезок, содержащийся в $[0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)$;

$$\max_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k: x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \leq M < \infty; \quad (12)$$



для любой последовательности групповых сегментов $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ таких, что $[0, \pi] \setminus O_{\delta}(x_0) \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_j \supset \dots$, $\text{mes } I_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_{k,n} \in I_j} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| = 0. \quad (13)$$

С помощью формулы конечных приращений Лагранжа, (4), (5) и (6) оценим разность

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n l_{k,n}^{SL}(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k U_n(x)}{n(x - x_{k,n})} \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{U_n(x)}{(x - x_{k,n})} \right| \left| \frac{(-1)^k n - U'_n(x_{k,n})}{nU'_n(x_{k,n})} \right| = \\ &= \sum_{k=1}^n |U'_n(\xi_{k,n})| \left| \frac{(-1)^k n - U'_n(x_{k,n})}{nU'_n(x_{k,n})} \right| = O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда делаем вывод о справедливости асимптотической формулы

$$\left| \sum_{k=1}^n l_{k,n}^{SL}(x) \right| = \frac{|U_n(x)|}{n} \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(x - x_{k,n})} \right| + O(n^{-1}).$$

Если суммирование осуществлять только по индексам узлов, попадающих в произвольный отрезок $[a, b]$, содержащийся в $[0, \pi] \setminus O_{\delta}(x_0)$, то это неравенство может только усиливаться

$$\left| \sum_{k: x_{k,n} \in [a,b]} l_{k,n}^{SL}(x) \right| = \frac{|U_n(x)|}{n} \left| \sum_{k: x_{k,n} \in [a,b]} \frac{(-1)^k}{(x - x_{k,n})} \right| + O(n^{-1}). \quad (15)$$

Оценка остаточных членов в (14) и (15) равномерна по $x \in [0, \pi]$. Рассуждая так же, как при доказательстве соотношения (14), получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n |l_{k,n}^{SL}(x)| - \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^k U_n(x)}{n(x - x_{k,n})} \right| \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| l_{k,n}^{SL}(x) - \frac{(-1)^k U_n(x)}{n(x - x_{k,n})} \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{U_n(x)}{(x - x_{k,n})} \right| \left| \frac{(-1)^k n - U'_n(x_{k,n})}{nU'_n(x_{k,n})} \right| = \\ &= \sum_{k=1}^n |U'_n(\xi_{k,n})| \left| \frac{(-1)^k n - U'_n(x_{k,n})}{nU'_n(x_{k,n})} \right| = O(n^{-1}). \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть для определенности выбранная точка x_0 лежит слева от отрезка $[a, b]$. Тогда справедливы соотношения $0 \leq x_0 < x_0 + \delta \leq a < b \leq \pi$. Обозначим через k_0 номер ближайшего справа к x_0 узла интерполяции, а через k_1 и k_2 — номера наименьшего и наибольшего из узлов, попадающих в отрезок $[a, b]$. В силу (7) можно выбрать $n_1 \in \mathbb{N}$ таким образом, что для всех $n \geq n_1$ будут справедливы соотношения

$$k_1 - k_0 \geq \left\lceil \frac{\delta}{2\pi} n \right\rceil > 2, \quad (17)$$

$$\left| \frac{4\|\beta\|_{C[0,\pi]}}{n^2} + O(n^{-3}) \right| < \frac{\pi}{n} \text{ в асимптотической формуле (7)}. \quad (18)$$



Добавим к множеству нулей собственных функций задачи Штурма – Лиувилля точки $x_{0,n} = 0$ и $x_{n+1,n} = \pi$. Теперь, в силу выбора номера узла $x_{k_0,n}$, имеем представление $x_0 = x_{k_0,n} - \alpha_n(x_{k_0,n} - x_{k_0-1,n})$, где последовательность α_n принимает значения в сегменте $[0, 1)$. Отсюда и (7) для любых $1 \leq k \leq n$ получаем асимптотическую формулу

$$x_{k,n} - x_0 = \frac{2k-1}{2n}\pi - \frac{2k_0-1}{2n}\pi + \alpha_n \frac{\pi}{n} + O(n^{-2}) = \frac{\pi}{n} (k - k_0 + \alpha_n + O(n^{-1})). \quad (19)$$

Выбор $n_1 \in \mathbb{N}$ в (18) гарантирует в этой формуле оценку $|O(n^{-1})| < 1$.

Установим справедливость соотношения (11). Учитывая (17) и (18), оценим первое слагаемое в правой части (15)

$$\begin{aligned} \frac{|U_n(x_0)|}{n} \left| \sum_{k: x_{k,n} \in [a,b]} \frac{(-1)^k}{(x_0 - x_{k,n})} \right| &= \frac{|U_n(x_0)|}{n} \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k}{(x_0 - x_{k,n})} \right| = \\ &= \frac{|U_n(x_0)|}{\pi} \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k}{(k - k_0 + \alpha_n + O(n^{-1}))} \right| \leq \\ &\leq \frac{|U_n(x_0)|}{\pi} \left\{ \left| \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{(-1)^k}{(k - k_0)} \right| + \sum_{k=k_1}^{k_2} \left| \frac{\alpha_n + O(n^{-1})}{(k - k_0)(k - k_0 + \alpha_n + O(n^{-1}))} \right| \right\} \leq \\ &\leq \frac{|U_n(x_0)|}{\pi} \left\{ \left| \sum_{l=k_1-k_0}^{k_2-k_0} \frac{(-1)^{l+k_0}}{l} \right| + \sum_{l=k_1-k_0}^{k_2-k_0} \frac{2}{l(l-2)} \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Возьмем произвольное положительное ε и выберем $n_2 \geq n_1$ таким образом, чтобы для всех $n \geq n_2$ остаточный член $|O(n^{-1})|$ в асимптотической формуле (15) был меньше $\varepsilon/2$. В силу (7), (8), (17) и сходимости рядов $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+k_0}}{l}$, $\sum_{l=3}^{\infty} \frac{2}{l(l-2)}$ с помощью критерия Коши найдем такое $n_3 \geq n_2$, начиная с которого будут выполняться неравенства

$$\left| \sum_{l=\lceil \frac{\delta n}{2\pi} \rceil}^{k_2-k_0} \frac{(-1)^{l+k_0}}{l} \right| < \frac{\varepsilon\pi}{4M}, \quad \sum_{l=\lceil \frac{\delta n}{2\pi} \rceil}^{k_2-k_0} \frac{2}{l(l-2)} < \frac{\varepsilon\pi}{4M}.$$

Отсюда, из (15), (18) и (20) следует справедливость неравенства $\left| \sum_{k: x_{k,n} \in [a,b]} l_{k,n}^{SL}(x_0) \right| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_3$. Таким образом, соотношение (11) доказано.

Теперь оценим сумму $\sum_{k: x_{k,n} \in [a,b]} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| = \sum_{k=k_1}^{k_2} |l_{k,n}^{SL}(x_0)|$. Как и прежде, ограничимся рассмотрением случая $0 \leq x_0 < x_0 + \delta \leq a < b \leq \pi$. Опять подберем n_1 , как в случае (17), (18). В силу (16) существует константа $C_1 > 0$, для которой при $n \geq n_1$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \leq \frac{|U_n(x)|}{n} \sum_{k=k_1}^{k_2} \frac{1}{(x_0 - x_{k,n})} + \frac{C_1}{n}. \quad (21)$$

Но для всех $k_1 \leq k \leq k_2$ имеет место соотношение $|x_0 - x_{k,n}| \geq \delta$. Кроме того, в силу (7) существует константа $C_2 > 0$ такая, что для всех $n \geq n_1$ верны неравенства



$k_2 - k_1 \leq \frac{b-a}{\pi}n + 2 + \frac{C_2}{n}$. Поэтому найдется зависящий только от параметров задачи Штурма – Лиувилля (2) номер $n_4 \in \mathbb{N}$, начиная с которого $\frac{C_1}{n}$ в (21) будет меньше, чем $\text{mes}(a, b)$, и будет справедлива оценка $k_2 - k_1 \leq \frac{2\text{mes}[a, b]n}{\pi}$. Таким образом, из (18) и (21) следует существование константы C_3 такой, что для любого n , начиная с n_4 , справедлива оценка

$$\sum_{k: x_{k,n} \in [a, b]} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \leq \frac{2M\text{mes}[a, b]}{\pi\delta} + \text{mes}[a, b] \leq C_3\text{mes}[a, b].$$

Отсюда следуют (12) и (13). Действительно, (12) получаем из неравенств

$$\begin{aligned} \max_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k: x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| &= \max_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{k: x_{k,n} \in [0, x_0 - \delta]} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| + \sum_{k: x_{k,n} \in [x_0 + \delta, \pi]} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \right\} \leq \\ &\leq \max \left(C_3\text{mes} \{ [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0) \}, \max_{1 \leq n \leq n_4} \sum_{k: x_{k,n} \in [0, \pi] \setminus O_\delta(x_0)} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \right). \end{aligned}$$

Пусть $I_j = \cup_{l=1}^m \bar{\Delta}_{j,l}$, где $\bar{\Delta}_{j,l}$ – произвольные, не пересекающиеся с $O_\delta(x_0)$ отрезки такие, что соответствующие им интервалы $\Delta_{j,l}$ не имеют общих точек. Тогда по свойству полной аддитивности меры [44, с. 58] для любого n , начиная с n_4 , получаем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{k: x_{k,n} \in I_j} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| &= \sum_{l=1}^m \sum_{k: x_{k,n} \in \bar{\Delta}_{j,l}} |l_{k,n}^{SL}(x_0)| \leq \sum_{l=1}^m C_3\text{mes} \{ \bar{\Delta}_{j,l} \} = \\ &= \sum_{l=1}^m C_3\text{mes} \{ \Delta_{j,l} \} = C_3\text{mes} I_j. \end{aligned}$$

Откуда и следует (13). Случай, когда выбранная точка x_0 лежит справа от отрезка $[a, b]$, доказывается аналогично или с помощью замены $z = \pi - x$.

Теорема 2 доказана. □

Библиографический список

1. Натансон Г. И. Об одном интерполяционном процессе // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та. 1958. Т. 166. С. 213–219.
2. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 550 с.
3. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков // УМН. 1998. Т. 53, вып. 6 (324). С. 53–128. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm89>
4. Stenger F. Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. Springer Ser. Comput. Math. Vol. 20. N. Y. : Springer-Verlag, 1993. 565 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2706-9>
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
6. Butzer P. L. A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields // Journal of Approximation Theory. 2009. Vol. 160, iss. 1–2. P. 3–18. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jat.2009.05.004>
7. Шмуклер А. И., Шульман Т. А. О некоторых свойствах рядов Котельникова // Изв. вузов. Матем. 1974. № 3. С. 93–103.



8. *Livne O. E., Brandt A.* MuST: The Multilevel Sinc Transform // *SIAM J. Sci. Comput.* 2011. Vol. 33, iss. 4. P. 1726–1738. DOI: <https://doi.org/10.1137/100806904>
9. *Krivoshein A., Skopina M.* Multivariate sampling-type approximation // *Analysis and Applications.* 2017. Vol. 15, № 4. P. 521–542. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219530516500147>
10. *Kolomoitsev Yu., Skopina M.* Around Kotelnikov – Shannon formula // 2017 12th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA 2017). IEEE, 2017. P. 279–282. DOI: <https://doi.org/10.1109/SAMPSTA.2017.8024385>
11. *Maleknejad K., Rostami Ya., Shahi Kalalagh H.* Numerical solution for first kind Fredholm integral equations by using sinc collocation method // *IJAPM.* 2016. Vol. 6, № 3. P. 120–128. DOI: <https://doi.org/10.17706/ijapm.2016.6.3.120-128>
12. *Беличенко К. В., Соболев В. М.* Синк-аппроксимация данных RFID меток // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2017. Вып. 19. С. 7–9.*
13. *Шакиров И. А.* О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега // *Сиб. матем. журн.* 2014. Т. 55, № 6 (328). С. 1404–1423.
14. *Coroianu L., Gal S. G.* Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels // *Demonstratio Math.* 2016. Vol. 49, iss. 1. P. 38–49. DOI: <https://doi.org/10.1515/dema-2016-0005>
15. *Richardson M., Trefethen L.* A sinc function analogue of Chebfun // *SIAM J. Sci. Comput.* 2011. Vol. 33, iss. 5. P. 2519–2535. DOI: <https://doi.org/10.1137/110825947>
16. *Tharwat M. M.* Sinc approximation of eigenvalues of Sturm – Liouville problems with a Gaussian multiplier // *Calcolo.* 2014. Vol. 51, iss. 3. P. 465–484. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10092-013-0095-3>
17. *Alquran M. T., Al-Khaled K. M.* Numerical comparison of methods for solving systems of conservation laws of mixed type // *Int. Journal of Math. Analysis.* 2011. Vol. 5, № 1. P. 35–47.
18. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // *East J. Approx.* 2008. Vol. 14, № 2. P. 183–192.
19. *Mohsen A., El-Gamel M.* A sinc-collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations // *Z. Angew. Math. Phys.* 2007. Vol. 58, iss. 3. P. 380–390. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-006-5124-5>
20. *Умаханов А. Я., Шарпудинов И. И.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // *Владикавказ. матем. журн.* 2016. Т. 18, № 4. С. 61–70.
21. *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // *Уфим. матем. журн.* 2015. Т. 7, вып. 4. С. 116–132.
22. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // *Алгебра и анализ.* 2015. Т. 27, вып. 5. С. 170–194.
23. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // *Изв. вузов. Матем.* 2016. № 3. С. 72–81.
24. *Трынин А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // *Изв. вузов. Матем.* 2010. № 11. С. 74–85.
25. *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // *Изв. вузов. Матем.* 2000. № 9 (460). С. 60–73.
26. *Мосина К. Б.* Принцип Дини – Липшица для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля // *Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 56–59.*



27. Мосина К. Б. Формула Неваи для интерполяционного процесса Лагранжа – Штурма – Лиувилля // Труды Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. 2013. Т. 46. С. 316–318.
28. Турашвили К. Б. Асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений задачи Штурма – Лиувилля // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 73–76.
29. Турашвили К. Б. Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // Труды Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 44. С. 347–350.
30. Турашвили К. Б. Об интерполяционном аналоге интегрального признака Дини // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 94–98.
31. Трынин А. Ю. Равномерная сходимость процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля на одном функциональном классе // Уфимск. матем. журн. 2018. Т. 10, вып. 2. С. 93–108.
32. Трынин А. Ю. Признак сходимости процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля в терминах одностороннего модуля изменения // Изв. вузов. Матем. 2018. № 8. С. 61–74.
33. Трынин А. Ю. Теорема отсчетов на отрезке и ее обобщения: Теорема дискретизации для синк аппроксимаций и ее обобщение. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2016. 488 с.
34. Трынин А. Ю. Об одной обратной узловых задаче для оператора Штурма – Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, вып. 4. С. 116–129.
35. Привалов А. А. Теория интерполирования функций. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. 230 с.
36. Голубов Б. И. Сферический скачок функции и средние Бохнера – Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье // Матем. заметки. 2012. Т. 91, вып. 4. С. 506–514. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8739>
37. Голубов Б. И. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 1985. Т. 37, вып. 1. С. 13–24.
38. Дьяченко М. И. Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Матем. сб. 2013. Т. 204, № 3. С. 3–18. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8118>
39. Скопина М. А., Максименко И. Е. Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, вып. 2. С. 1–39.
40. Дьяченко М. И. Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 2004. Т. 76, вып. 5. С. 723–731. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm139>
41. Иванникова Т. А., Тимашова Е. В., Шабров С. А. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интегралом Стильтеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 1. С. 3–8. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-1-3-8>
42. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения : в 2 т. М. : Изд-во иностр. лит. Т. 1, 1953. 336 с. ; Т. 2, 1954. 428 с.
43. Егорова И. А. О принципе локализации в теории интерполирования // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та. 1949. Т. 86. С. 317–335.
44. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 480 с.

Образец для цитирования:

Трынин А. Ю., Киреева Е. Д. Принцип локализации на классе функций, интегрируемых по Риману, для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 51–63. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-51-63>



The Principle of Localization at the Class of Functions Integrable in the Riemann for the Processes of Lagrange – Sturm – Liouville

A. Yu. Trynin, E. D. Kireeva

Alexander Yu. Trynin, <https://orcid.org/0000-0002-0036-5435>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, tayu@rambler.ru

Ekaterina D. Kireeva, <https://orcid.org/0000-0002-4901-4660>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, ekateriha98@mail.ru

Let us say that the principle of localization holds at the class of functions F at point $x_0 \in [0, \pi]$ for the Lagrange – Sturm – Liouville interpolation process $L_n^{SL}(f, x)$ if $\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n^{SL}(f, x_0) - L_n^{SL}(g, x_0)| = 0$ follows from the fact that the condition $f(x) = g(x)$ is met for any two functions f and g belonging to F in some neighborhood $O_\delta(x_0)$, $\delta > 0$. It is proved that the principle of localization at the class of Riemann integrable functions holds for interpolation processes built on the eigenfunctions of the regular Sturm – Liouville problem with a continuous potential of bounded variation. It is established that the principle of localization at the class of continuous on the segment $[0, \pi]$ functions holds for interpolation processes built on the eigenfunctions of the regular Sturm – Liouville problem with an optional continuous potential of bounded variation. We consider the case of boundary conditions of the third kind, from which the boundary conditions of the first kind are removed. Approximative properties of Lagrange – Sturm – Liouville operators at point $x_0 \in [0, \pi]$ in both cases depend solely on the values of the approximate function just in the neighborhood of this point $x_0 \in [0, \pi]$.

Keywords: interpolation process, eigenfunctions, function approximation, localization principle.

Received: 31.10.2018 / Accepted: 15.12.2018 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

References

1. Natanson G. I. About one interpolation process. *Uchenye zapiski Leningradskogo pedagogicheskogo insituta* [Scientific notes of the Leningrad Pedagogical Institute], 1958, vol. 166, pp. 213–219 (in Russian).
2. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Ortogonal'nye ryady* [Orthogonal series]. Moscow, Izd-vo AFTs, 1999. 550 p. (in Russian).
3. Novikov I. Ya., Stechkin S. B. Basic wavelet theory. *Russian Math. Surveys*, 1998, vol. 53, iss. 6, pp. 1159–1231. DOI: <https://doi.org/10.1070/rm1998v053n06ABEH000089>
4. Stenger F. *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*. Springer Ser. Comput. Math., vol. 20, New York, Springer-Verlag, 1993. 565 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2706-9>
5. Dobeshi I. *Desyat' lektсий po veivioletam* [Ten Wavelet Lectures]. Izhevsk, NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, 2001. 464 p. (in Russian).
6. Butzer P. L. A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields. *Journal of Approximation Theory*, 2009, vol. 160, iss. 1–2, pp. 3–18. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jat.2009.05.004>
7. Shmukler A. I., Shulman T. A. Certain properties of Kotel'nikov series. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1974, vol. 18, iss. 3, pp. 81–90.
8. Livne O. E., Brandt A. E. MuST: The multilevel sinc transform. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2011, vol. 33, iss. 4, pp. 1726–1738. DOI: <https://doi.org/10.1137/100806904>



9. Krivoshein A., Skopina M. Multivariate Sampling-Type Approximation. *Analysis and Applications*, 2017, vol. 15, no. 4, pp. 521–542. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219530516500147>
10. Kolomoitsev Yu., Skopina M. Around Kotelnikov – Shannon Formula. *2017 12th International Conference on Sampling Theory and Applications (SampTA 2017)*. IEEE, 2017, pp. 279–282. DOI: <https://doi.org/10.1109/SAMPTA.2017.8024385>
11. Maleknejad K., Rostami Ya., Shahi Kalalagh H. Numerical solution for first kind Fredholm integral equations by using sinc collocation method. *IJAPM*, 2016, vol. 6, no. 3, pp. 120–128. DOI: <https://doi.org/10.17706/ijapm.2016.6.3.120-128>
12. Belichenko K. V., Sobolev V. M. Sinc approximation of data RFID methods. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2017, iss. 19, pp. 7–9 (in Russian).
13. Shakirov I. A. Influence of the choice of Lagrange interpolation nodes on the exact and approximate values of the Lebesgue constants. *Siberian Math. J.*, 2014, vol. 55, iss. 6, pp. 1144–1160. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446614060184>
14. Coroianu L., Gal G. S. Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels. *Demonstratio Math.*, 2016, vol. 49, iss. 1, pp. 38–49. DOI: <https://doi.org/10.1515/dema-2016-0005>
15. Richardson M., Trefethen L. A sinc function analogue of Chebfun. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2011, vol. 33, iss. 5, pp. 2519–2535. DOI: <https://doi.org/10.1137/110825947>
16. Tharwat M. M. Sinc approximation of eigenvalues of Sturm–Liouville problems with a Gaussian multiplier. *Calcolo*, 2014, vol. 51, iss. 3, pp. 465–484. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10092-013-0095-3>
17. Alquran M. T., Al-Khaled K. Numerical comparison of methods for solving systems of conservation laws of mixed type. *Int. Journal of Math. Analysis*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 35–47.
18. Sklyarov V. P. On the best uniform sinc-approximation on a finite interval. *East J. Approx.*, 2008, vol. 14, iss. 2, pp. 183–192.
19. Mohsen A., El-Gamel M. A Sinc-collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2007, vol. 58, iss. 3, p. 380–390. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-006-5124-5>
20. Umakhanov A. Ya., Sharapudinov I. I. Interpolation of functions by the Whittaker sums and their modifications: conditions for uniform convergence. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2016, vol. 18, no. 4, pp. 61–70 (in Russian).
21. Trynin A. Yu. On some properties of sinc approximations of continuous functions on the interval. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, iss. 4, pp. 111–126. DOI: <https://doi.org/10.13108/2015-7-4-111>
22. Trynin A. Yu. On necessary and sufficient conditions for convergence of sinc approximations. *St. Petersburg Math. J.*, 2016, vol. 27, iss. 5, pp. 825–840. DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1419>
23. Trynin A. Yu. Approximation of continuous on a segment functions with the help of linear combinations of sines. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, iss. 3, pp. 63–71. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X16030087>
24. Trynin A. Yu. The divergence of Lagrange interpolation processes in eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, iss. 11, pp. 66–76. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X10110071>
25. Trynin A. Yu. On the absence of stability of interpolation in eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2000, vol. 44, iss. 9, pp. 58–71.



26. Mosina K. B. The Dini – Lipschitz principle for the Lagrange – Sturm – Liouville interpolation process. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2013, iss. 15, pp. 56–59 (in Russian).
27. Mosina K. B. Nevai formula for the Lagrange – Sturm – Liouville interpolation process. *Trudy Matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo* [Works of the N. I. Lobachevsky Mathematical Center], 2013, vol. 46, pp. 316–318 (in Russian).
28. Turashvili K. B. Asymptotic formulas for the eigenfunctions and eigenvalues of the Sturm – Liouville problem. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2012, iss. 14, pp. 73–76 (in Russian).
29. Turashvili K. B. On the lack of stability of interpolation with respect to the eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem. *Trudy Matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo* [Works of the N. I. Lobachevsky Mathematical Center], 2011, vol. 44, pp. 347–350 (in Russian).
30. Turashvili K. B. On the interpolation analogue of the integral sign of Dini. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2010, iss. 12, pp. 94–98 (in Russian).
31. Trynin A. Yu. Uniform convergence of Lagrange – Sturm – Liouville processes on one functional class. *Ufa Math. J.*, 2018, vol. 10, iss. 2, pp. 93–108. DOI: <https://doi.org/10.13108/2018-10-2-93>
32. Trynin A. Yu. A criterion of convergence of Lagrange – Sturm – Liouville processes in terms of one-sided modulus of variation. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2018, vol. 62, iss. 8, pp. 51–63. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X1808008X>
33. Trynin A. Yu. *Teorema otschetov na otrezke i ee obobshcheniya: Teorema diskretizatsii dlia sink approksimatsii i ee obobshchenie* [Sample theorem on a segment and its generalization: Discretization theorem for sinc approximation and its generalization]. LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2016. 488 p. (in Russian).
34. Trynin A. Yu. On inverse nodal problem for Sturm – Liouville operator. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, iss. 4, pp. 112–124. DOI: <https://doi.org/10.13108/2013-5-4-112>
35. Privalov A. A. *Teoriya interpolirovaniya funktsii* [Function Interpolation Theory]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 1990. 230 p. (in Russian).
36. Golubov B. I. Spherical Jump of a Function and the Bochner – Riesz Means of Conjugate Multiple Fourier Series and Fourier Integrals. *Math. Notes*, 2012, vol. 91, iss. 4, pp. 479–486. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434612030212>
37. Golubov B. I. Absolute convergence of multiple Fourier series. *Math. Notes*, 1985, vol. 31, iss. 1, pp. 8–15. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01652507>
38. Dyachenko M. I. On a class of summability methods for multiple Fourier series. *Sb. Math.*, 2013, vol. 204, iss. 3, pp. 307–322. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2013v204n03ABEH004302>
39. Skopina M. A., Maksimenko I. E. Multidimensional periodic wavelets. *St. Petersburg Math. J.*, 2004, vol. 15, iss. 2, pp. 165–190. DOI: <https://doi.org/10.1090/S1061-0022-04-00808-8>
40. Dyachenko M. I. Uniform Convergence of Hyperbolic Partial Sums of Multiple Fourier Series. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, iss. 5, pp. 673–681. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000049666.00784.9d>
41. Ivannikova T. A., Timashova E. V., Shabrov S. A. On necessary conditions for a minimum of a quadratic functional with a Stieltjes integral and zero coefficient of the highest derivative on the part of the interval. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 1, pp. 3–8 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-2-1-3-8>



42. Sansone Dzh. *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations: in 2 vols.]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, vol. 1, 1953, 336 p.; vol. 2, 1954, 428 p. (in Russian).
43. Egorova I. A. On the principle of localization in the theory of interpolation. *Uchenye zapiski Leningradskogo pedagogicheskogo insituta* [Scientific notes of the Leningrad Pedagogical Institute], 1949, vol. 86, pp. 317–335 (in Russian).
44. Natanson I. P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of functions of a real variable]. Moscow, Nauka, 1974. 480 p. (in Russian).

Cite this article as:

Trynin A. Yu., Kireeva E. D. The Principle of Localization at the Class of Functions Integrable in the Riemann for the Processes of Lagrange – Sturm – Liouville. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 51–63 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-51-63>



МЕХАНИКА

УДК 532.5

Термокапиллярное движение тонкой пленки бинарного спиртосодержащего раствора

Н. А. Иванова, К. А. Бородина

Иванова Наталья Анатольевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры технической и экспериментальной физики, Тюменский государственный университет, Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Семакова, д. 10, n.ivanova@utmn.ru

Бородина Ксения Алексеевна, аспирант кафедры фундаментальной математики и механики, Тюменский государственный университет, Россия, 625003, г. Тюмень, ул. Семакова, д. 10, k.a.borodina@mail.ru

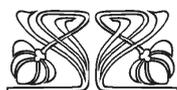
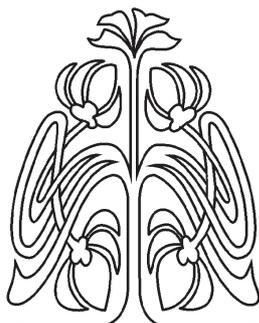
Межфазная конвекция — широко распространенное явление, встречающееся в различных отраслях техники, включая химические технологии. Наибольший интерес в случае тонких пленок жидкости представляет конвекция Марангони. Фазовые переходы существенно влияют на конвективное течение, изменяя коэффициент поверхностного натяжения. В данной работе аналитически исследуется поведение тонкой пленки спиртосодержащего раствора при ее нагреве. Изменение температуры свободной поверхности вместе с уходом летучей компоненты приводит, как правило, к двум противоположным эффектам по направленности градиента поверхностного натяжения. Показано, что в рассматриваемой нестационарной задаче деформации пленки можно выделить четыре масштаба времени, связанных с развитием полей скорости, температуры и концентрации, а также с изменением высоты слоя. В зависимости от первоначальной толщины деформация пленки может как опережать развитие поля концентрации, так и отставать от него. В линейном приближении получены формулы для полей основных величин и деформации пленки.

Ключевые слова: термокапиллярное течение, конвекция Марангони, жидкая пленка.

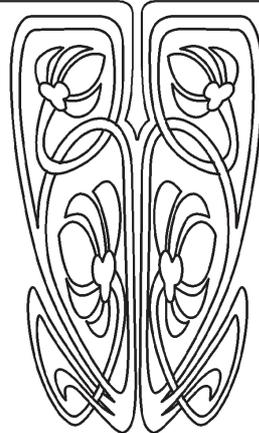
Поступила в редакцию: 26.02.2019 / Принята: 05.05.2019 /
Опубликована: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-64-78>



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





ВВЕДЕНИЕ

Широкий обзор работ по межфазной конвекции приведен в [1, 2]. Движение тонких пленок рассматривается, как правило, в рамках длинноволнового приближения [3, 4]. Балансовые соотношения на границе раздела сред с учетом фазовых переходов приведены в [5, 6]. Изучению конвекции Марангони с учетом испарения посвящены работы [7, 8]. Движение бинарной смеси в плоских и цилиндрических слоях подробно рассмотрено в [9]. В монографии также описаны свойства инвариантных решений уравнений термодиффузии. В настоящей работе исследуется поведение тонкой пленки спиртосодержащего раствора при ее нагреве с учетом ухода летучей компоненты в разных масштабах времени. Эксперименты с подобными системами при воздействии лазерного излучения описаны в [10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основные уравнения

Пусть тонкий слой однородного раствора расположен на плоской горизонтальной поверхности $z = 0$. Газ над пленкой содержит пары летучей компоненты, находящиеся в термодинамическом равновесии с жидкостью. В некоторый момент времени подложка мгновенно нагревается, что приводит к деформации пленки. Будем считать изменения температуры и концентрации раствора незначительными настолько, что к таким отклонениям чувствителен только коэффициент поверхностного натяжения. Параметры же, характеризующие саму жидкость, а также объем раствора, полагаем постоянными. На свободной поверхности $z = h(x, y, t)$ пренебрежем конвективным теплообменом с окружающей средой, сохранив затраты тепла на испарение. Имеем следующую систему уравнений и граничных условий [1, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C &= D \nabla^2 C, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \chi \nabla^2 T, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$z = 0$:

$$\mathbf{v} = 0, \quad T = T_s, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

$z = h$:

$$\begin{aligned} -(p - p_a) + 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + 2k_R \gamma &= 0, \\ 2\mu \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \nabla \gamma \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ -k \mathbf{n} \cdot \nabla T &= J L_v, \\ \rho D \mathbf{n} \cdot \nabla C &= -J(1 - C). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v} , p , ρ , T — скорость, давление, плотность и температура жидкости соответственно; C — массовая концентрация летучей компоненты в растворе; D , k и χ — коэффициенты диффузии, теплопроводности и температуропроводности; μ , $\nu = \mu/\rho$ — динамическая и кинематическая вязкости; γ — коэффициент



поверхностного натяжения, L_v — скрытая теплота парообразования, p_a — внешнее атмосферное давление, k_R — кривизна свободной поверхности, \mathbf{D} — тензор скоростей деформаций; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — нормальный и тангенциальный единичные векторы к свободной поверхности; \mathbf{g} — ускорение свободного падения, J — интенсивность массообмена.

В силу принятых допущений о незначительном изменении объема жидкости вследствие ухода летучей компоненты кинематическое условие на свободной поверхности примем в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (-z + h) = 0. \quad (3)$$

Начальные условия соответствуют однородной жидкости в состоянии покоя $t = 0$:

$$h = h_0,$$

$$0 < z < h: \mathbf{v} = 0, \quad T = T_0, \quad C = C_0.$$

Температуру подложки для определенности зададим в виде осесимметричного пятна с центром в начале координат:

$$T_s = T_s(r) = T_0 + \theta e^{-r^2/a^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

Замыкающие соотношения

Коэффициент поверхностного натяжения запишем в линеаризованном виде

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_T (T_I - T_0) + \gamma_C (C_I - C_0), \\ \gamma_T &= \frac{\partial \gamma}{\partial T} (T = T_0, C = C_0), \quad \gamma_C = \frac{\partial \gamma}{\partial C} (T = T_0, C = C_0). \end{aligned}$$

Аналогично представим интенсивность массообмена. Согласно [1] имеем

$$J = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_I} \right)^{1/2} [p_{vs}(T_I, C_I) - p_{vI}].$$

Давление насыщенных паров летучего вещества p_{vs} определим как

$$p_{vs}(T, C) = x(C) p_{v0} \exp \left[\frac{L_v}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right],$$

мольная доля растворенной компоненты

$$x(C) = \frac{CM_w}{CM_w + (1 - C)M_v}.$$

Парциальное давление паров над свободной поверхностью p_{vI} будем считать равным первоначальному значению, соответствующему давлению насыщения

$$p_{vI} = p_{vs}(T_0, C_0).$$

Диффузию паров в данной задаче не рассматриваем. Разложив функцию J по степеням в окрестности (T_0, C_0) , получим в первом приближении

$$J = j_T (T_I - T_0) + j_C (C_I - C_0),$$



$$j_T = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_0} \right)^{1/2} \frac{C_0 M_w}{C_0 M_w + (1 - C_0) M_v} \frac{p_{v0} L_v}{RT_0^2},$$

$$j_C = \alpha_{com} \left(\frac{M_v}{2\pi RT_0} \right)^{1/2} \frac{M_w M_v}{[C_0 M_w + (1 - C_0) M_v]^2 p_{v0}}.$$

В приведенных формулах T_I и C_I — температура и концентрация на свободной поверхности; α_{com} — коэффициент коммодации; M_v, M_w — молярные массы летучей и основной компоненты раствора; R — универсальная газовая постоянная, p_{v0} — давление насыщенного пара чистой компоненты.

Представленные ниже иллюстрации поведения жидкой пленки будут соответствовать водному раствору изопропанола (IPA), параметры которого примем как в [10]. Начальная температура $T_0 = 293$ К, начальная массовая концентрация IPA $C_0 = 0.35$, молярная масса летучей компоненты $M_{IPA} = M_v = 60$ г/моль, воды — $M_w = 18$ г/моль, плотность раствора $\rho = 860$ кг/м³, коэффициент вязкости $\mu = 3$ мПа · с, теплопроводности — $k = 0.6$ Вт/(м · К), диффузии — $D = 10^{-9}$ м²/с, теплота парообразования $L_v = 756$ кДж/кг, давление насыщенных паров $p_{v0} = 4.1$ кПа, коэффициент коммодации $\alpha_{com} = 1$, характерный размер зоны нагрева $a = 10^{-3}$ м, повышение температуры $\theta = 1$ К. Для коэффициента поверхностного натяжения имеем $\gamma_T = -10^{-4}$ Н/(м · К), $\gamma_C = -0.017$ Н/м. Так как в работе рассматриваются только малые деформации тонкого слоя, то лапласовским скачком давления в данном исследовании будем пренебрегать.

Характерные времена

Проведем анализ уравнений движения, вводя малый параметр в виде отношения поперечной и продольной характерных длин. Для этой цели запишем уравнения в проекциях, выделив вертикальную координату z

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + w \mathbf{e}_z, \quad \nabla = \nabla_\perp + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad \nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y.$$

Пусть l — продольная, d — поперечная характерные длины, причем $l \gg d$, так что $\varepsilon = d/l$ представляет собой малый параметр системы. Характерные продольная и поперечная скорости u_0 и w_0 связаны между собой соотношением $w_0 = \varepsilon u_0$, которое вытекает из уравнения непрерывности. Характерное давление определим выражением $p_0 = (\mu u_0 l)/d^2$. Характерное время процесса обозначим как τ , θ — перепад температуры, соответствующий постановке задачи.

В уравнениях (1) с граничными условиями (2), (3) перейдем к безразмерным переменным

$$\nabla_\perp^* = l \nabla_\perp, \quad x_* = \frac{x}{l}, \quad y_* = \frac{y}{l}, \quad z_* = \frac{z}{d}, \quad t_* = \frac{t}{\tau},$$

$$\mathbf{v}_\perp^* = \frac{\mathbf{v}_\perp}{u_0}, \quad w_* = \frac{w}{w_0}, \quad p_* = \frac{p}{p_0}, \quad T_* = \frac{T - T_0}{\theta}, \quad h_* = \frac{h}{d}.$$

В целях поэтапного анализа выделим явно характерное время процесса движения τ по аналогии с [11]:

$$\frac{d^2}{v\tau} \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^*}{\partial t_*} + Re \varepsilon^2 \left((\mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^*) \mathbf{v}_\perp^* + w_* \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*} \right) - \varepsilon^2 \nabla_\perp^{*2} \mathbf{v}_\perp^* = -\nabla_\perp^* p_* + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*^2},$$



$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d^2}{\nu \tau} \frac{\partial w_*}{\partial t_*} + Re \varepsilon^4 \left((\mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^*) w_* + w_* \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \right) - \varepsilon^4 \nabla_\perp^{*2} w_* - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w_*}{\partial z_*^2} = \\ = -\frac{\partial p_*}{\partial z_*} - \frac{Ga}{Re}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{Pr}{Le} \frac{d^2}{\nu \tau} \frac{\partial C}{\partial t_*} + \frac{Re Pr}{Le} \varepsilon^2 \left(\mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* C + w_* \frac{\partial C}{\partial z_*} \right) - \varepsilon^2 \nabla_\perp^{*2} C = \frac{\partial^2 C}{\partial z_*^2}, \\ Pr \frac{d^2}{\nu \tau} \frac{\partial T_*}{\partial t_*} + Re Pr \varepsilon^2 \left(\mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* T_* + w_* \frac{\partial T_*}{\partial z_*} \right) - \varepsilon^2 \nabla_\perp^{*2} T_* = \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2}, \\ \nabla_\perp^* \cdot \mathbf{v}_\perp^* + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

$$z_* = 0: \quad \mathbf{v}_\perp^* = 0, \quad w_* = 0, \quad T_* = T_s^*, \quad \partial C / \partial z_* = 0, \\ z_* = h_*:$$

$$\begin{aligned} & - (p_* - p_a^*) + \\ & + 2 \frac{\varepsilon^4 \nabla_\perp^* \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \varepsilon^4 \nabla_\perp^* w_* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \varepsilon^2 \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \varepsilon^2 \partial w_* / \partial z_*}{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2} = 0, \\ & Re Pr \frac{-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \mathbf{e}_z \varepsilon \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \varepsilon^2 \nabla_\perp^* w_* + \varepsilon \partial w_* / \partial z_* \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} + \\ & + Re Pr \frac{-\varepsilon^2 (\nabla_\perp^* \mathbf{v}_\perp^*)^T \cdot \nabla_\perp^* h_* - \mathbf{e}_z \varepsilon^3 \nabla_\perp^* w_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* + \varepsilon \partial w_* / \partial z_* \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} - \quad (7) \\ & - 2 Re Pr \frac{\varepsilon^3 \nabla_\perp^* \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \varepsilon^3 \nabla_\perp^* w_* \cdot \nabla_\perp^* h_* - \varepsilon \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \varepsilon \partial w_* / \partial z_*}{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2} \times \\ & \quad \times \frac{-\varepsilon \nabla_\perp^* h_* + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} = \\ & = Ma \left(\varepsilon \nabla_\perp^* T_* + \frac{\partial T_*}{\partial z_*} \mathbf{e}_z - \left(-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* T_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \frac{\partial T_*}{\partial z_*} \right) \frac{-\varepsilon \nabla_\perp^* h_* + \mathbf{e}_z}{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2} \right) + \\ & + Ma \frac{1}{\theta} \frac{\gamma_C}{\gamma_T} \left(\varepsilon \nabla_\perp^* C + \frac{\partial C}{\partial z_*} \mathbf{e}_z - \left(-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* C \cdot \nabla_\perp^* h_* + \frac{\partial C}{\partial z_*} \right) \frac{-\varepsilon \nabla_\perp^* h_* + \mathbf{e}_z}{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2} \right), \\ & \quad - \frac{-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* T_* \cdot \nabla_\perp^* h_* + \partial T_* / \partial z_*}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} = \frac{J L_v d}{k \theta}, \\ & \quad \frac{-\varepsilon^2 \nabla_\perp^* C \cdot \nabla_\perp^* h_* + \partial C / \partial z_*}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\nabla_\perp^* h_*)^2}} = - \frac{J (1 - C) d}{\rho D}, \\ & \quad \frac{l}{u_0 \tau} \frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* - w_* = 0. \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения для безразмерных комплексов:

$$Re = \frac{u_0 l}{\nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Ga = \frac{g d^3}{\nu^2}, \quad Le = \frac{D}{\chi}, \quad Ma = \frac{\gamma_T \theta l}{\mu \chi},$$

и величин: $T_s^* = (T_s - T_0) / \theta$, $p_a^* = p_a / p_0$.



Как следует из (5), (7), при деформации пленки раствора можно выделить четыре масштаба времени, связанных с развитием полей скорости, температуры и концентрации, а также с изменением толщины слоя. Введем следующие характерные времена:

$$\tau_1 = \frac{d^2}{\nu}, \quad \tau_2 = Pr \frac{d^2}{\nu}, \quad \tau_3 = \frac{Pr d^2}{Le \nu}, \quad \tau_4 = \frac{l}{u_0}, \quad (8)$$

при этом

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \sim 1, \quad \frac{\tau_1}{\tau_3} = \frac{Le}{Pr}, \quad \frac{\tau_1}{\tau_4} = \varepsilon^2 Re.$$

Рассмотрим два предельных случая соотношений характерных времен: деформация пленки опережает развитие поля концентрации растворенной компоненты

$$\frac{\tau_4}{\tau_3} \sim \varepsilon \iff \varepsilon \sim \sqrt[3]{\frac{Le}{Pr Re}} = \varepsilon_1,$$

развитие поля концентрации опережает процесс деформации пленки

$$\frac{\tau_3}{\tau_4} \sim \varepsilon \iff \varepsilon \sim \frac{Le}{Pr Re} = \varepsilon_2.$$

Соотношения характерных времен будет соответственно

$$\tau_1 \sim \tau_2 < \tau_4 < \tau_3, \quad \tau_1 \sim \tau_2 < \tau_3 < \tau_4.$$

При $\varepsilon \gtrsim \varepsilon_1$ жидкую пленку условно назовем «термической», а при $\varepsilon \lesssim \varepsilon_2$ — «диффузионной»; временной интервал, предшествующий видимой деформации, — «малыми временами». Для термической пленки малые времена $t \sim \tau_1$, для диффузионной — $t \sim \tau_3$.

Характерные скорости

Скорость u_0 для термической и диффузионной пленок обозначим соответственно u_T и u_D . Примем также $d = h_0$, $l = a$. Характерные скорости u_T и u_D определим при больших временах $t \sim \tau_4$, когда деформации становятся существенными. В этом случае можно считать температуру однородной по высоте, и, как следствие,

$$T_I = T_s(r) = T_0 + \theta e^{-r^2/a^2}.$$

В случае термической пленки концентрация еще не изменилась значительно $C_I = C = C_0$. Коэффициент поверхностного натяжения

$$\gamma - \gamma_0 = \gamma_T (T_I - T_0) + \gamma_C (C_I - C_0) = \gamma_T \theta e^{-r^2/a^2}.$$

Характерная скорость термокапиллярного течения $u_0 \sim \frac{d \Delta \gamma}{\mu l}$, так что можно принять

$$u_T = \frac{|\gamma_T| \theta d}{\mu a}.$$

Процесс деформации диффузионной пленки будем считать равновесным, что достигается уменьшением ее первоначальной толщины. В этом случае имеет место условие насыщения

$$J = j_T (T_I - T_0) + j_C (C_I - C_0) = 0,$$



$$\gamma - \gamma_0 = \gamma_T (T_I - T_0) + \gamma_C (C_I - C_0) = \left(\gamma_T - \frac{j_T}{j_C} \gamma_C \right) \theta e^{-r^2/a^2}.$$

В силу преобладания концентрационного эффекта характерная скорость

$$u_D = |\gamma_C| \frac{j_T \theta d}{j_C \mu a}.$$

Величины u_T и u_D определены для каждой из пленок, но только одна из них будет соответствовать характерной скорости.

Теперь можно конкретизировать введенные выше понятия. Пленка раствора проявляет термический эффект, если ее первоначальная толщина

$$d \gtrsim \sqrt[4]{\frac{D\mu a^3}{|\gamma_T| \theta}},$$

и концентрационный (диффузионная пленка) — при

$$d \lesssim \sqrt{\frac{D\mu a}{|\gamma_C| (j_T/j_C) \theta}}.$$

В нашем случае $d \gtrsim 10^{-4}$ м и $d \lesssim 10^{-6}$ м соответственно. Далее рассматриваются жидкие пленки с начальной толщиной $d = d_T$ и $d = d_D$, где $d_T = 10^{-4}$ м, $d_D = 10^{-6}$ м.

2. РАЗВИТИЕ ПОЛЯ СКОРОСТИ. МАЛЫЕ ВРЕМЕНА

Рассмотрим процесс формирования поля скорости при нагреве слоя жидкости. Положим в уравнениях (5), (7) характерное время $\tau = \tau_1$ из (8). Пренебрегая членами порядка ε и выше, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^*}{\partial t_*} &= -\nabla_\perp^* p_* + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*^2}, & \frac{\partial p_*}{\partial z_*} + \frac{Ga}{Re} &= 0, & \frac{\partial C}{\partial t_*} &= 0, \\ \frac{\partial T_*}{\partial t_*} &= \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2}, & \nabla_\perp^* \cdot \mathbf{v}_\perp^* + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} z_* = 0 : \mathbf{v}_\perp^* &= 0, & w_* &= 0, & T_* &= T_s^*, \\ z_* = h_* : p_* &= p_a^*, \\ RePr \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* &= \varepsilon Ma (\nabla_\perp^* T_* + \gamma_C / (\gamma_T \theta) \nabla_\perp^* C), \\ \partial T_* / \partial z_* &= 0, & \partial h_* / \partial t_* &= 0. \end{aligned}$$

Начальные условия $t_* = 0$:

$$h_* = 1, \quad (10)$$

$$0 < z_* < h_* : \mathbf{v}_\perp^* = 0, \quad w_* = 0, \quad T_* = 0, \quad C = C_0.$$

Затраты тепла на испарение на данном временном интервале не учитываем.



Решение задачи ($u_0 = u_T$)

Из кинематического условия на свободной поверхности следует постоянство толщины пленки

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} = 0 \Rightarrow h_* = 1,$$

концентрация также неизменна

$$\frac{\partial C}{\partial t_*} = 0 \Rightarrow C = C_0 = \text{const},$$

продольный градиент давления отсутствует

$$p_* = (Ga/Re)(1 - z_*) + p_a^*.$$

Далее, решая задачу (9), (10) методом Фурье, находим поле температуры

$$T_*(x_*, y_*, z_*, t_*) = T_s^* - 2T_s^* \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*} \sin(\eta_n z_*), \quad \eta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

на свободной поверхности ($z_* = h_* = 1$)

$$T_I^*(x_*, y_*, t_*) = T_s^* - 2T_s^* \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*}(z_* = h_*) = -\nabla_\perp^* T_I^*.$$

Продольная составляющая скорости

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\perp^*(x_*, y_*, z_*, t_*) = & \left\{ -4 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq n)}}^{+\infty} (-1)^{n+k} \frac{\eta_k (e^{-\eta_k^2 t_*} - e^{-\eta_n^2 t_*})}{\eta_n^2 (\eta_k^2 - \eta_n^2)} \sin(\eta_n z_*) + \right. \\ & \left. + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_*}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*} \sin(\eta_n z_*) + \left(2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*} - 1 \right) z_* \right\} \nabla_\perp^* T_s^*, \end{aligned} \quad (11)$$

вертикальная компонента

$$\begin{aligned} w_*(x_*, y_*, z_*, t_*) = & \left\{ 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ (k \neq n)}}^{+\infty} (-1)^{n+k} \frac{\eta_k (e^{-\eta_k^2 t_*} - e^{-\eta_n^2 t_*})}{\eta_n^3 (\eta_k^2 - \eta_n^2)} (1 - \cos(\eta_n z_*)) - \right. \\ & \left. - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_*}{\eta_n^2} e^{-\eta_n^2 t_*} (1 - \cos(\eta_n z_*)) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\eta_n} e^{-\eta_n^2 t_*} - \frac{1}{2} \right) z_*^2 \right\} \nabla_\perp^{*2} T_s^*. \end{aligned} \quad (12)$$

При нагреве подложки по закону (4) в формулах (11), (12)

$$\begin{aligned} T_s^* &= e^{-r_*^2}, \quad r_* = \sqrt{x_*^2 + y_*^2}, \\ \nabla_\perp^* T_s^* &= \frac{\partial T_s^*}{\partial r_*} \mathbf{e}_r = -2r_* e^{-r_*^2} \mathbf{e}_r, \quad \nabla_\perp^{*2} T_s^* = \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} \left(r_* \frac{\partial T_s^*}{\partial r_*} \right) = 4(r_*^2 - 1) e^{-r_*^2}, \end{aligned}$$

поле скорости обладает осевой симметрией

$$\mathbf{v}_\perp^* = \frac{\mathbf{v}_\perp}{u_0} = v_r^* \mathbf{e}_r, \quad v_r^* = v_r^*(r_*, z_*, t_*).$$

На рис. 1 представлен процесс прогрева слоя жидкости и формирование поля скорости.

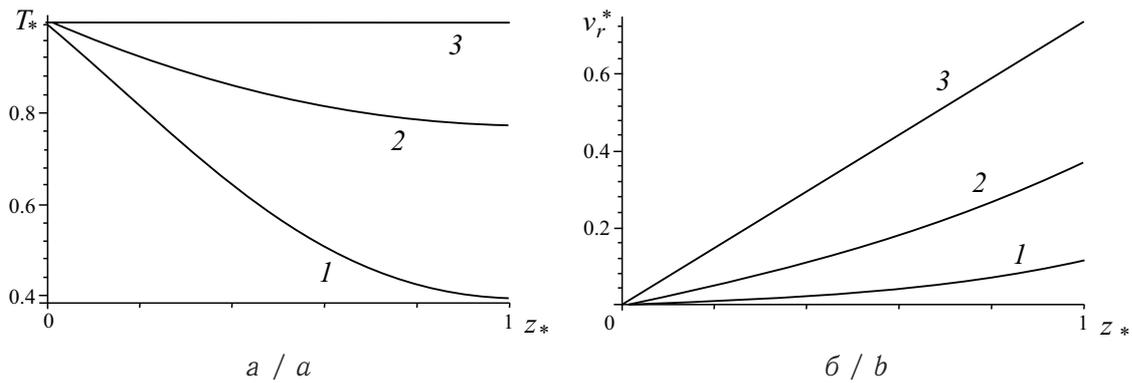


Рис. 1. Температура T_* ($r_* = 0$) и радиальная компонента скорости v_r^* ($r_* = 1$) по высоте. Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_* = 0.3, 0.7, 3$

Fig. 1. The temperature T_* ($r_* = 0$) and the radial velocity component v_r^* ($r_* = 1$) in height. Curves 1–3 correspond to time instants $t_* = 0.3, 0.7, 3$

Приведены зависимости температуры T_* и радиальной компоненты скорости v_r^* от вертикальной координаты z_* . Температура указана на вертикальной оси $r_* = 0$, а профили скорости — на некотором удалении от нее ($r_* = 1$). Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_* = 0.3, 0.7, 3$. При построении графиков ряды были заменены конечными суммами с достаточным числом слагаемых, так что при дальнейшем их увеличении визуального изменения не наблюдалось.

За период характерного времени устанавливается однородное распределение температуры по вертикали и линейный профиль скорости, как при течении Куэтта. Поведение термической и диффузионной пленок при временах $t \sim \tau_1$ одинаково. Далее для термической пленки начинается процесс деформации, а для диффузионной малые времена продолжаются до $t \sim \tau_3$, происходят изменение концентрации и перестраивание поля скорости.

Определим дальнейшее развитие поля скорости для диффузионной пленки, связанное с испарением летучей компоненты. Полагая в уравнениях (5), (7) характерное время $\tau = \tau_3$ из (8), будем иметь

$$\begin{aligned}
 -\nabla_{\perp}^* p_* + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{\perp}^*}{\partial z_*^2} = 0, \quad \frac{\partial p_*}{\partial z_*} + \frac{Ga}{Re} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t_*} = \frac{\partial^2 C}{\partial z_*^2}, \\
 \frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2} = 0, \quad \nabla_{\perp}^* \cdot \mathbf{v}_{\perp}^* + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Граничные условия (линеаризованные)

$$\begin{aligned}
 z_* = 0 : \quad \mathbf{v}_{\perp}^* = 0, \quad w_* = 0, \quad \partial C / \partial z_* = 0, \quad T_* = T_s^*, \\
 z_* = h_* : \quad p_* = p_a^*, \\
 RePr \partial \mathbf{v}_{\perp}^* / \partial z_* = \varepsilon Ma (\nabla_{\perp}^* T_* + \gamma C / (\gamma_T \theta) \nabla_{\perp}^* C), \\
 \rho D / (j_C (1 - C_0) d) \partial C / \partial z_* = -[(j_T \theta / j_C) T_* + (C - C_0)], \\
 -k \theta / (j_C L_v d) \partial T_* / \partial z_* = (j_T \theta / j_C) T_* + (C - C_0), \quad \partial h_* / \partial t_* = 0.
 \end{aligned}$$

Начальные условия $t_* = 0$:

$$\begin{aligned}
 h_* = 1, \\
 0 < z_* < h_* : \quad C = C_0.
 \end{aligned} \tag{14}$$



Решение задачи ($u_0 = u_D, d = d_D$)

Толщина пленки неизменна

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} = 0 \Rightarrow h_* = 1.$$

Интегрирование уравнения для температуры в (13) дает

$$\frac{\partial^2 T_*}{\partial z_*^2} = 0 \Rightarrow T_* = (T_I^* - T_s^*) z_* + T_s^* \Rightarrow \frac{\partial T_*}{\partial z_*} = T_I^* - T_s^*.$$

Здесь $T_I^* = T_*(z_* = h_*)$ пока неизвестная функция. Подставив это выражение в граничное условие

$$-\frac{k\theta}{j_C L_v d} (T_I^* - T_s^*) = \frac{j_T \theta}{j_C} T_I^* + (C_I - C_0),$$

находим связь переменных T_I^* и $C_I = C(z_* = h_*)$ на внешней поверхности пленки

$$T_I^* = \frac{k\theta T_s^* - j_C L_v (C_I - C_0) d}{(k + j_T L_v d) \theta}. \quad (15)$$

Используя (15) в граничном условии для C из (14), можно исключить температуру T_I^*

$$\begin{aligned} \frac{\rho D}{j_C (1 - C_0) d} \frac{\partial C}{\partial z_*} (z_* = 1) &= - \left[\frac{j_T \theta}{j_C} T_I^* + (C_I - C_0) \right] = \\ &= - \frac{k}{k + j_T L_v d} \left[\frac{j_T \theta}{j_C} T_s^* + (C_I - C_0) \right], \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial (C - C_0)}{\partial z_*} (z_* = 1) + H [(C_I - C_0) - U] = 0,$$

где

$$H = \frac{j_C (1 - C_0) d}{\rho D} \frac{k}{k + j_T L_v d}, \quad U = - \frac{j_T \theta}{j_C} T_s^*. \quad (16)$$

Таким образом, задача для концентрации из (13), (14) отделяется

$$\begin{aligned} \frac{\partial (C - C_0)}{\partial t_*} &= \frac{\partial^2 (C - C_0)}{\partial z_*^2}, \quad 0 < z_* < 1, \quad t_* > 0, \\ t_* = 0 : (C - C_0) &= 0, \\ z_* = 0 : \partial (C - C_0) / \partial z_* &= 0, \\ z_* = 1 : \partial (C - C_0) / \partial z_* + H [(C - C_0) - U] &= 0. \end{aligned}$$

Поле концентрации имеет вид

$$C(x_*, y_*, z_*, t_*) = C_0 + U \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{H \sqrt{H^2 + \mu_n^2}}{\mu_n [H^2 + H + \mu_n^2]} e^{-\mu_n^2 t_*} \cos(\mu_n z_*) \right].$$



Здесь U и H определены формулой (16), μ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg} \mu = \mu/H$. На свободной поверхности ($z_* = 1$)

$$C_I = C_0 - \frac{j_T \theta}{j_C} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{H \sqrt{H^2 + \mu_n^2}}{\mu_n [H^2 + H + \mu_n^2]} e^{-\mu_n^2 t_*} \cos \mu_n \right] T_s^*. \quad (17)$$

Остальные неизвестные находятся с помощью (15) и (17)

$$h_* = \operatorname{const} \Rightarrow \nabla_{\perp}^* p_* = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{\perp}^*}{\partial z_*^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\perp}^*}{\partial z_*} (z_* = h_*) = -\frac{u_T}{u_D} \left(\nabla_{\perp}^* T_I^* + \frac{\gamma_C}{\gamma_T \theta} \nabla_{\perp}^* C_I \right).$$

Профиль продольной составляющей скорости линейный по высоте

$$\mathbf{v}_{\perp}^* (x_*, y_*, z_*, t_*) = -\frac{u_T}{u_D} \left(\nabla_{\perp}^* T_I^* + \frac{\gamma_C}{\gamma_T \theta} \nabla_{\perp}^* C_I \right) z_*,$$

вертикальная компонента скорости

$$w_* (x_*, y_*, z_*, t_*) = \frac{u_T}{u_D} \left(\nabla_{\perp}^* T_I^* + \frac{\gamma_C}{\gamma_T \theta} \nabla_{\perp}^* C_I \right) \frac{z_*^2}{2},$$

поле температуры

$$T_* (x_*, y_*, z_*, t_*) = (T_I^* - T_s^*) z_* + T_s^*.$$

Как видно из (17), термодинамическое равновесие наступает за время

$$t_* = \frac{\tau_s}{\tau_3} \sim \frac{1}{\mu_1^2} \Rightarrow \tau_s \sim \frac{d^2}{\mu_1^2 D}.$$

Процесс деформации диффузионной пленки равновесный при условии $\tau_s < \tau_4$. Данное требование выполняется.

На рис. 2 показаны динамика изменения концентрации и температуры на поверхности пленки, а также перестраивание ранее сформированного поля скорости.

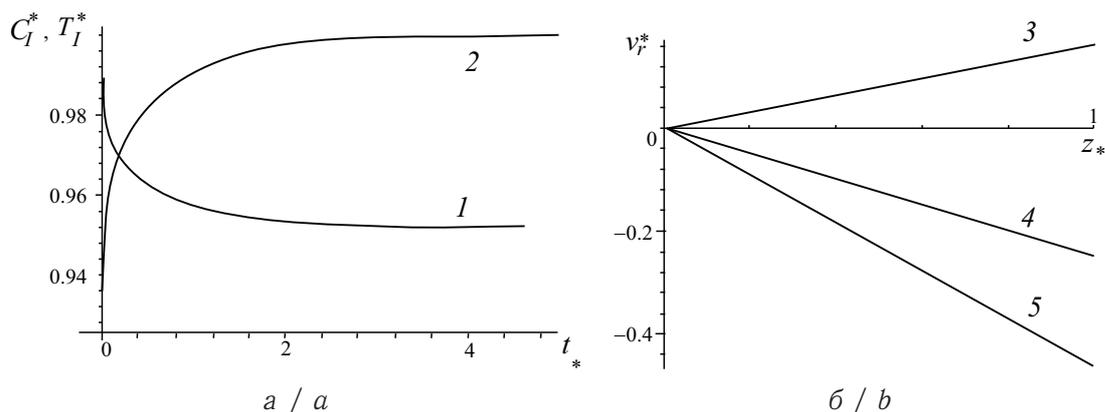


Рис. 2. Концентрация $C_I^* = C_I/C_0$ и температура T_I^* при $r_* = 0$ в зависимости от времени — кривые 1 и 2; радиальная компонента скорости v_r^* ($r_* = 1$) по высоте — кривые 3–5 соответствуют моментам времени $t_* = 0.001, 0.3, 3$

Fig. 2. Concentration $C_I^* = C_I/C_0$ and temperature T_I^* at $r_* = 0$ depending on time are the curves 1 and 2; the radial velocity component v_r^* ($r_* = 1$) in height is the curves 3–5 which correspond to time instants $t_* = 0.001, 0.3, 3$



Приведены зависимости $C_I^* = C_I/C_0$ и T_I^* от времени t_* в центре $r_* = 0$ — кривые 1 и 2 соответственно. Показано распределение радиальной компоненты скорости v_r^* по вертикали при $r_* = 1$; кривые 3–5 соответствуют моментам времени $t_* = 0.001, 0.3, 3$. Как и ранее, сходимость рядов контролировалась визуально. Концентрация убывает со временем и стремится к новому равновесному значению. При этом температура поверхности пленки несколько понижена вследствие затрат тепла на испарение летучей компоненты. Горизонтальная составляющая скорости v_\perp^* меняет свое направление на противоположное.

3. ДЕФОРМАЦИЯ ПЛЕНКИ РАСТВОРА

Рассмотрим динамику жидкой пленки. При $\tau = \tau_4$ из (5), (7) следует

$$-\nabla_\perp^* p_* + \frac{\partial^2 \mathbf{v}_\perp^*}{\partial z_*^2} = 0, \quad \frac{\partial p_*}{\partial z_*} + \frac{Ga}{Re} = 0, \quad \nabla_\perp^* \cdot \mathbf{v}_\perp^* + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} z_* = 0 : \mathbf{v}_\perp^* = 0, \quad w_* = 0, \quad z_* = h_* : p_* = p_a^*, \\ RePr \partial \mathbf{v}_\perp^* / \partial z_* = \varepsilon Ma (\nabla_\perp^* T_* + \gamma_C / (\gamma_T \theta) \nabla_\perp^* C), \\ \partial h_* / \partial t_* + \mathbf{v}_\perp^* \cdot \nabla_\perp^* h_* - w_* = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Вводя в (18), (19) среднюю по толщине продольную скорость \mathbf{u}_* , приходим к известным соотношениям

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \nabla_\perp^* \cdot (h_* \mathbf{u}_*) = 0, \quad \mathbf{u}_* = -\frac{Ga}{3Re} h_*^2 \nabla_\perp^* h_* + \frac{\varepsilon Ma}{2RePr} h_* \left(\nabla_\perp^* T_* + \frac{\gamma_C}{\gamma_T \theta} \nabla_\perp^* C_I \right).$$

Для рассмотренных примеров линеаризованное уравнение эволюции принимает единую форму

$$\frac{\partial h_*}{\partial t_*} = A (r_*^2 - 1) e^{-r_*^2} + B \left(\frac{\partial^2 h_*}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial h_*}{\partial r_*} \right),$$

но с различными значениями коэффициентов. Для пленки с начальной толщиной $d = d_T$: $A = 2$, $B = \rho g d_T^3 / (3\mu a u_T)$, $t_* = u_T t / a$; для пленки с $d = d_D$: $A = 2(u_T - u_D) / u_D$, $B = \rho g d_D^3 / (3\mu a u_D)$, $t_* = u_D t / a$. Приходим к следующей постановке:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_*}{\partial t_*} = A f(r_*) + B \Delta_{r_*} h_*, \quad f(r_*) = (r_*^2 - 1) e^{-r_*^2}, \quad \Delta_{r_*} h_* = \frac{\partial^2 h_*}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial h_*}{\partial r_*}, \\ h_* = h_*(r_*, t_*); \quad r_* > 0, \quad t_* > 0; \\ h_*(r_*, 0) = 1, \quad h_*(+\infty, t_*) = 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Решая задачу (20) с помощью преобразования Ханкеля нулевого порядка, устанавливаем динамику изменения толщины пленки

$$h_*(r_*, t_*) = 1 - \frac{A}{4B} \left(\exp\{-r_*^2\} - \frac{1}{1 + 4Bt_*} \exp\left\{-\frac{r_*^2}{1 + 4Bt_*}\right\} \right).$$

На рис. 3 представлена деформация пленки. Изображены зависимости толщины слоя жидкости $h_* = h/d$ от радиальной координаты r_* .

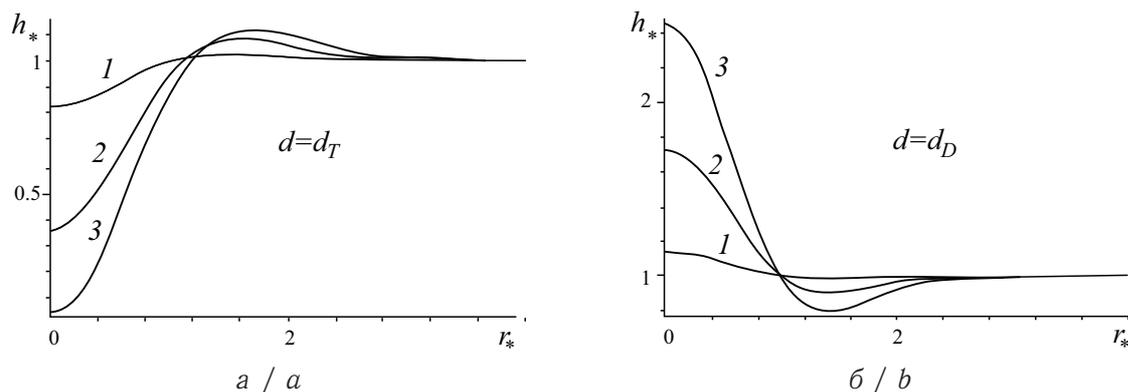


Рис. 3. Зависимость толщины пленки h_* от продольной координаты r_* . Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_* = 0.1, 0.5, 1$; $d = d_T$ (а), $d = d_D$ (б)

Fig. 3. Dependence of the film thickness h_* on the longitudinal coordinate r_* . Curves 1–3 correspond to points in time $t_* = 0.1, 0.5, 1$; $d = d_T$ (a), $d = d_D$ (b)

Кривые 1–3 соответствуют моментам времени $t_* = 0.1, 0.5, 1$. Для термической $d = d_T$ и диффузионной $d = d_D$ пленок наблюдается разнонаправленное движение свободной поверхности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучено поведение тонкой пленки жидкости, содержащей летучую компоненту, при ее нагреве. Выделено четыре масштаба времени, связанных с развитием полей скорости, температуры и концентрации, а также с изменением высоты слоя. Определен характерный период, в течение которого устанавливается термодинамическое равновесие раствора с насыщенным паром. В зависимости от первоначальной высоты жидкого слоя прогиб поверхности пленки может как опережать развитие поля концентрации, так и отставать от него. В последнем случае наблюдается перестроение течения в пленке с изменением направления радиальной составляющей скорости до момента видимой деформации.

Библиографический список

1. *Simanovskii I. B., Nepomnyashchy A. A.* Convective Instabilities in Systems with Interface. L. : Gordon and Breach, 1993. 279 p.
2. *Colinet P., Legros J. C., Velarde M. G.* Nonlinear Dynamics of Surface – Tension Driven Instabilities. Berlin : Wiley-VCH, 2001. 522 p.
3. *Oron A.* Nonlinear dynamics of irradiated thin volatile liquid films // *Physics of Fluids*. 2000. Vol. 12, iss. 1. P. 29–41. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.870282>
4. *Matar O. K., Craster R. V., Warner M. R. E.* Surfactant transport on highly viscous surface films // *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. Vol. 466. P. 85–111. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112002001106>
5. *Холпанов Л. П., Шкадов В. Я.* Гидродинамика и теплообмен с поверхностью раздела. М. : Наука, 1990. 271 с.
6. *Merkt D., Bestehorn M.* Bénard – Marangoni convection in a strongly evaporating fluid // *Physica D : Nonlinear Phenomena*. 2003. Vol. 185, iss. 3–4. P. 196–208. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(03\)00234-3](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(03)00234-3)
7. *Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Шефер И. А.* Устойчивость двухслойных течений жидкости с испарением на границе раздела // *Изв. РАН. МЖГ*. 2017. № 2. С. 23–35. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0568528117020062>



8. *Souche M., Clarke N.* Interfacial instability in bilayer films due to solvent evaporation // *The European Physical Journal E.* 2009. Vol. 28, iss. 1. P. 47–55. DOI: <https://doi.org/10.1140/epje/i2008-10399-x>
9. *Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А.* Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск : Наука, 2000. 278 с.
10. *Tatosova K. A., Malyuk A. Yu., Ivanova N. A.* Droplet formation caused by laser-induced surface-tension-driven flows in binary liquid mixtures // *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects.* 2017. Vol. 521. P. 22–29. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2016.07.004>
11. *Индейкина А. Е., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М.* Нестационарная термокапиллярная конвекция в слое неравномерно нагретой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 1991. № 3. С. 17–25.

Образец для цитирования:

Иванова Н. А., Бородин К. А. Термокапиллярное движение тонкой пленки бинарного спиртосодержащего раствора // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2020. Т. 20, вып. 1. С. 64–78. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-64-78>

Thin Film Thermocapillary Motion of Binary Alcohol-Containing Solution

N. A. Ivanova, K. A. Borodina

Natalia A. Ivanova, <https://orcid.org/0000-0002-4121-8765>, Tyumen State University, 10 Semakova St., Tyumen 625003, Russia, n.ivanova@utmn.ru

Kseniia A. Borodina, <https://orcid.org/0000-0002-3847-0636>, Tyumen State University, 10 Semakova St., Tyumen 625003, Russia, k.a.borodina@mail.ru

Interphase convection is a widespread phenomenon that occurs in various branches of technology, including chemical technologies. The greatest interest in the case of thin liquid films is the Marangoni convection. Phase transitions significantly affect the convective flow, changing the coefficient of surface tension. In this paper, the behavior of a thin film of an alcohol-containing solution when it is heated is analytically studied. The change in the temperature of the free surface together with the escape of the volatile component leads, as a rule, to two opposite effects with respect to the directionality of the surface tension gradient. It is shown that four time scales associated with the development of velocity, temperature and concentration fields, as well as the change in layer height, can be distinguished in the considered non-stationary problem of a film deformation. Depending on the initial thickness deformation of the film can both advance the development of the concentration field, and lag behind it. In the linear approximation formulas for the fields of the basic quantities, and also for the asymptotics of the film deformation process are obtained.

Keywords: thermocapillary flow, Marangoni convection, deformation of a liquid film.

Received: 26.02.2019 / Accepted: 05.05.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



References

1. Simanovskii I. B., Nepomnyashchy A. A. *Convective Instabilities in Systems with Interface*. London, Gordon and Breach, 1993. 279 p.
2. Colinet P., Legros J. C., Velarde M. G. *Nonlinear Dynamics of Surface-Tension Driven Instabilities*. Berlin, Wiley-VCH, 2001. 522 p.
3. Oron A. Nonlinear dynamics of irradiated thin volatile liquid films. *Physics of Fluids*, 2000, vol. 12, iss. 1, pp. 29–41. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.870282>
4. Matar O. K., Craster R. V., Warner M. R. E. Surfactant transport on highly viscous surface films. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, vol. 466, pp. 85–111. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112002001106>
5. Holpanov L. P., Shkadov V. Y. *Gidrodinamika i teploobmen s poverhnost'yu razdela* [Hydrodynamics and heat transfer with the interface]. Moscow, Nauka, 1990. 271 p. (in Russian).
6. Merkt D., Bestehorn M. Bénard-Marangoni convection in a strongly evaporating fluid. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2003, vol. 185, iss. 3–4, pp. 196–208. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(03\)00234-3](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(03)00234-3)
7. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Rezanova E. V., Shefer I. A. Stability of two-layer fluid flows with evaporation at the interface. *Fluid Dynamics*, 2017, vol. 52, iss. 2, pp. 189–200. DOI: <https://doi.org/10.1134/S001546281702003X>
8. Souche M., Clarke N. Interfacial instability in bilayer films due to solvent evaporation. *The European Physical Journal E*, 2009, vol. 28, iss. 1, pp. 47–55. DOI: <https://doi.org/10.1140/epje/i2008-10399-x>
9. Andreev V. K., Zahvataev V. E., Ryabickij E. *Termokapillyarnaya neustojchivost'* [Thermocapillary instability]. Novosibirsk, Nauka, 2000. 278 p. (in Russian).
10. Tatosova K. A., Malyuk A. Yu., Ivanova N. A. Droplet formation caused by laser-induced surface-tension-driven flows in binary liquid mixtures. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2017, vol. 521, pp. 22–29. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.colsurfa.2016.07.004>
11. Indeikina A. E., Ryazantsev Yu. S., Shevtsova V. M. Unsteady thermocapillary convection in a nonuniformly heated fluid layer. *Fluid Dynamics*, 1991, vol. 26, iss. 3, pp. 331–337. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01059000>

Cite this article as:

Ivanova N. A., Borodina K. A. Thin Film Thermocapillary Motion of Binary Alcohol-Containing Solution. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 64–78 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-64-78>



УДК 539.3

Исследование прочности и устойчивости ортотропных конических оболочек и конических панелей

Е. О. Лапина, А. А. Семенов

Лапина Елена Олеговна, магистрант кафедры информационных технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4, lapina.eo@mail.ru

Семенов Алексей Александрович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4, sw.semenov@gmail.com

В строительстве тонкостенные оболочечные конструкции используются для покрытия помещений больших площадей, таких как стадионы, ангары, цирки, аэропорты. В данной работе приводится исследование прочности и устойчивости замкнутых конических оболочек, а также их панелей. Учитывается геометрическая нелинейность и поперечные сдвиги. Используется математическая модель в виде функционала полной потенциальной энергии деформации. Также приводятся выражения для деформаций, усилий и моментов. Расчетная программа реализована в среде MatLab. Алгоритм построен на методе Рунге и методе Ньютона для решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Показаны варианты аппроксимирующих функций для замкнутой оболочки и для ее панели. Найдены значения критических нагрузок, получена зависимость прогиба от нагрузки, напряжений от нагрузки, показано поле прогибов в докритический и в закритический моменты. Приводятся поля различных компонент напряжений в момент начала невыполнения условий прочности. Учитывается ортотропия материала.

Ключевые слова: оболочки, конические панели, устойчивость, прочность, ортотропия, геометрическая нелинейность.

Поступила в редакцию: 23.02.2019 / Принята: 29.03.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-79-92>

ВВЕДЕНИЕ

В строительстве тонкостенные оболочечные конструкции имеют широкое применение [1–3]. Они используются для покрытия помещений больших площадей, таких как стадионы, ангары, цирки, аэропорты, при этом толщина оболочки достаточно мала, поэтому такие конструкции, особенно при использовании современных материалов, будут легкими.

В архитектурной практике используются оболочки конические, сферические, цилиндрические, пологие, торообразные и др. Как правило, конструкции данного типа подвергаются воздействию различных нагрузок, поэтому возникает необходимость исследования их устойчивости. Исследованию оболочечных конструкций на устойчивость посвящено множество публикаций [4–7], в том числе исследованию конических оболочек и их панелей [8–12]. Процесс деформирования



при действии осевой нагрузки рассматривается в статьях [13–17], колебания — в [18–21], ламинированные конструкции — в работах [22–24]. Другие задачи, связанные с анализом процесса деформирования конических конструкций, можно найти в работах [25–28]. Так, в работе [10] проводится исследование процесса разрушения многослойных цилиндрических и конических панелей при сжатии с учетом геометрической нелинейности. Система нелинейных уравнений решается с использованием итерационного метода Ньютона–Рафсона. В работе [28] анализируется влияние геометрических параметров на устойчивость конических панелей при различных условиях нагружения.

Методика исследования прочности и устойчивости оболочечных конструкций сводится к разработке математической модели их деформирования, разработке алгоритма и программы для ЭВМ, а также проведению вычислительного эксперимента.

В данной работе для исследования прочности и устойчивости были выбраны конические оболочки и их панели, так как, несмотря на свое широкое практическое применение, исследований таких конструкций проводилось сравнительно мало.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

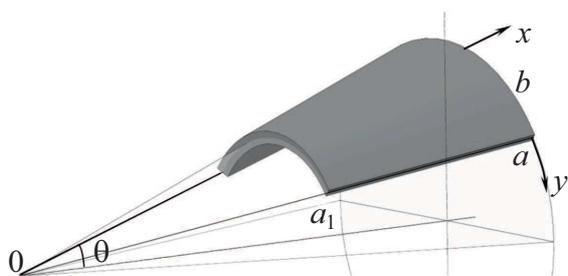


Рис. 1. Панель конической оболочки с локальной системой координат

Fig. 1. Conical shell panel with local coordinate system

Будем рассматривать оболочки и панели конической формы (рис. 1). Геометрический вид данных конструкций будет характеризоваться параметрами Ляме и главными кривизнами вдоль координат x, y , которые примут вид $A = 1, B = x \sin \theta, k_x = 0, k_y = ctg \theta / x$.

Будем использовать математическую модель типа Тимошенко (Миндлина–Рейснера), которая учитывает поперечные сдвиги, ортотропию материала и геометрическую нелинейность [29].

Согласно этой модели, неизвестными функциями будут три функции перемещений точек координатной поверхности $U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскости xOz, yOz : $\Psi_x = \Psi_x(x, y), \Psi_y = \Psi_y(x, y)$. Учет геометрической нелинейности в данном случае дает возможность исследовать не только напряженно-деформированное состояние оболочки, но и ее устойчивость.

В основе данной модели лежит функционал полной потенциальной энергии деформации, который будет иметь следующий вид:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left(N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - qW \right) AB dx dy,$$

где N_x, N_y — нормальные усилия в направлении осей x, y ; N_{xy}, N_{yx} — сдвиговые усилия в соответствующей плоскости xOy ; M_x, M_y — изгибающие моменты; M_{xy} — крутящий момент; Q_x, Q_y — поперечные силы в плоскостях xOz и yOz , которые



определяются соотношениями:

$$N_x = \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y), \quad N_y = \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x), \quad N_{xy} = N_{yx} = G_{12} h \gamma_{xy},$$

$$M_x = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \quad M_y = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{G_{12} h^3}{6} \chi_{12}, \quad Q_x = G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2).$$

Здесь E_1, E_2 — модули упругости в направлениях x, y ; $k = 5/6$; G_{12}, G_{13}, G_{23} — модули сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно; μ_{12}, μ_{21} — коэффициенты Пуассона; $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ — деформации удлинения; γ_{xy} — деформации сдвига в плоскости xOy :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2,$$

$$\theta_1 = - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right).$$

Для решения задачи анализа устойчивости необходимо найти минимум функционала. Полученные в результате значения могут соответствовать либо критическим нагрузкам потери устойчивости (верхним или нижним), либо точкам бифуркации.

Применим к функционалу метод Ритца, что позволит свести вариационную задачу о поиске минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. В таком случае неизвестные функции $U(x, y), V(x, y), W(x, y), \Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$ представим в виде

$$U = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n U_{kl} X1(k) Y1(l), \quad V = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n V_{kl} X2(k) Y2(l),$$

$$W = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n W_{kl} X3(k) Y3(l),$$

$$\Psi_x = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{xkl} X4(k) Y4(l), \quad \Psi_y = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \Psi_{ykl} X5(k) Y5(l),$$

где $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$ — неизвестные числовые параметры; $X1(k) - X5(k), Y1(l) - Y5(l)$ — известные аппроксимирующие функции, которые удовлетворяют краевым условиям. Краевые условия для каждой конструкции выбираются исходя из способа закрепления контура оболочки.

В качестве аппроксимирующих функций при шарнирно-неподвижном закреплении конической панели будем использовать следующие тригонометрические функции:

$$X1(k) = \sin \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right), \quad X2(k) = \sin \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right), \quad X3(k) = \sin \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right),$$

$$X4(k) = \cos \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right), \quad X5(k) = \sin \left(\frac{k\pi(x - a_1)}{a - a_1} \right),$$



$$Y1(l) = \sin\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right), \quad Y2(l) = \sin\left(\frac{2l\pi y}{b}\right), \quad Y3(l) = \sin\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right),$$

$$Y4(l) = \sin\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right), \quad Y5(l) = \cos\left(\frac{(2l-1)\pi y}{b}\right).$$

Данные функции применимы только для панелей, поскольку они не подразумевают выполнения условия периодичности вдоль оси y . Для замкнутых оболочек аппроксимирующие функции можно принять в следующем виде:

$$X1(k) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right), \quad X2(k) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right), \quad X3(k) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right),$$

$$X4(k) = \cos\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right), \quad X5(k) = \sin\left(\frac{k\pi(x-a_1)}{a-a_1}\right),$$

$$Y1(l) = \cos\left(\frac{2(l-1)\pi y}{b}\right), \quad Y2(l) = \sin\left(\frac{2l\pi y}{b}\right), \quad Y3(l) = \cos\left(\frac{2(l-1)\pi y}{b}\right),$$

$$Y4(l) = \sin\left(\frac{2l\pi y}{b}\right), \quad Y5(l) = \cos\left(\frac{2(l-1)\pi y}{b}\right).$$

Согласно методу Рунге, аппроксимирующие функции подставляются в функционал и находятся производные по неизвестным параметрам. Полученные выражения приравниваются к нулю. В результате получается система нелинейных алгебраических уравнений.

Для нахождения неизвестных коэффициентов будем решать данную систему методом Ньютона:

$$X_{i+1} = X_i - H^{-1}(X_i) \nabla E_p(X_i), \quad X = (U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl})^T, \quad k = 1..n, \quad l = 1..n,$$

где матрица Гессе H и градиент ∇E_p имеют вид

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{11}^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{11} \partial U_{12}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{11} \partial U_{13}} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{11} \partial \Psi_{y_{nn}}} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12} \partial U_{11}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12}^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12} \partial U_{13}} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{12} \partial \Psi_{y_{nn}}} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{13} \partial U_{11}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{13} \partial U_{12}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{13}^2} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial U_{13} \partial \Psi_{y_{nn}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}} \partial U_{11}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}} \partial U_{12}} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}} \partial U_{13}} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}}^2} \end{bmatrix}, \quad \nabla E_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_p}{\partial U_{11}} \\ \frac{\partial E_p}{\partial U_{12}} \\ \frac{\partial E_p}{\partial U_{13}} \\ \dots \\ \frac{\partial E_p}{\partial \Psi_{y_{nn}}} \end{bmatrix}.$$

В качестве начального приближения $U_{kl}^0, V_{kl}^0, W_{kl}^0, \Psi_{xkl}^0, \Psi_{ykl}^0$ ($k = 1..n, l = 1..n$) выбираем нулевые значения коэффициентов. Выполняя итерационный процесс, находятся коэффициенты $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$, через которые можно получить значения неизвестных функций $U(x, y), V(x, y), W(x, y), \Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$ для текущего значения параметра нагрузки. Далее параметр нагрузки увеличивается и решение системы повторяется. В качестве начального приближения уже выбирается решение с предыдущего шага по нагрузке.

Для анализа прочности материала конструкции может быть использован критерий максимальных напряжений, который имеет следующий вид:

$$\sigma_x^- \leq \sigma_x \leq \sigma_x^+, \quad \sigma_y^- \leq \sigma_y \leq \sigma_y^+, \quad |\tau_{xy}| \leq \tau_{xy}^\pm.$$

Компоненты напряжений анализируются по всему полю конструкции, что позволяет таким образом выявить точки начального невыполнения условий прочности [30].



На данный момент все больше вычислений производится с помощью различных математических систем, таких как Maple, MatLab, WolframAlpha и Mathcad. Они позволяют реализовывать различные подходы к решению задачи, проводить более детальные исследования и создавать базу для дальнейшей разработки программного обеспечения с применением уже традиционных языков программирования.

Предложенный в данной работе алгоритм был реализован в математическом пакете MatLab. MatLab представляет собой высокоуровневый язык и одновременно интерактивную среду для программирования, численных расчетов и визуализации результатов. Он представляет собой множество методов для анализа данных, разработки алгоритмов и создания моделей, включает математические функции для инженерных и научных операций.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе рассматривались конические панели и оболочки, выполненные из нескольких вариантов ортотропных материалов [31, 32], параметры которых приводятся в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Характеристики ортотропных материалов
Characteristics of orthotropic materials

| Материал / Material | T300/976 | ЛУ-П/ЭНФБ | T300/Ероху |
|---|----------|-----------|------------|
| E_1 , ГПа / GPa | 140 | 140 | 125 |
| E_2 , ГПа / GPa | 9.7 | 9.6 | 7.8 |
| μ_{12} | 0.29 | 0.3 | 0.34 |
| G_{12} , ГПа / GPa | 5.5 | 4.6 | 4.4 |
| G_{13} , ГПа / GPa | 5.5 | 4.6 | 4.5 |
| G_{23} , ГПа / GPa | 3.3 | 4.6 | 4.5 |
| Предел при растяжении σ_x^+ , МПа Tensile strength σ_x^+ , МПа | 1517 | 700 | 1760 |
| Предел при растяжении σ_y^+ , МПа Tensile strength σ_y^+ , МПа | 46 | 27 | 80 |
| Предел при сжатии σ_x^- , МПа Compression limit σ_x^- , МПа | -1599 | -600 | -1570 |
| Предел при сжатии σ_y^- , МПа Compression limit σ_y^- , МПа | -253 | -184 | -168 |
| Предел при сдвиге τ_{xy}^\pm , МПа Shear limit τ_{xy}^\pm , МПа | 41.4 | 55 | 98 |

Геометрические параметры рассматриваемых вариантов конструкций представлены в табл. 2. На все конструкции действовала равномерно распределенная поперечная нагрузка q , направленная по нормали к поверхности. Расчеты проводились при удержании $N = n^2 = 9$ членов разложения искомым функций в методе Рунге.

Для начала рассмотрим пример, когда оболочечная конструкция незамкнутая (вариант 1). На рис. 2, а, б показаны графики зависимостей «нагрузка – прогиб» и «нагрузка – напряжение в центре конструкции» для панели из углепластика T300/976. Как видно из графика на рис. 2, а, панель теряет устойчивость при нагрузке $q_{cr} = 0.1$ МПа. Поле прогибов до потери устойчивости и после нее показано на рис. 2, в, г.



Таблица 2 / Table 2

Входные параметры рассматриваемых конструкций
Input parameters of the considered structures

| Параметры Parameters | Вариант 1 Variant 1 | Вариант 2 Variant 2 |
|--|------------------------|------------------------|
| Линейный размер a_1 , м Linear size a_1 , m | 5 | 5 |
| Линейный размер a , м Linear size a , m | 25 | 25 |
| Толщина оболочки h , м Shell thickness h , m | 0.01 | 0.01 |
| Угол разворота оболочки b , рад Shell turning angle b , rad | π | 2π |
| Угол конусности θ , рад Taper angle θ , m | 0.78 | |

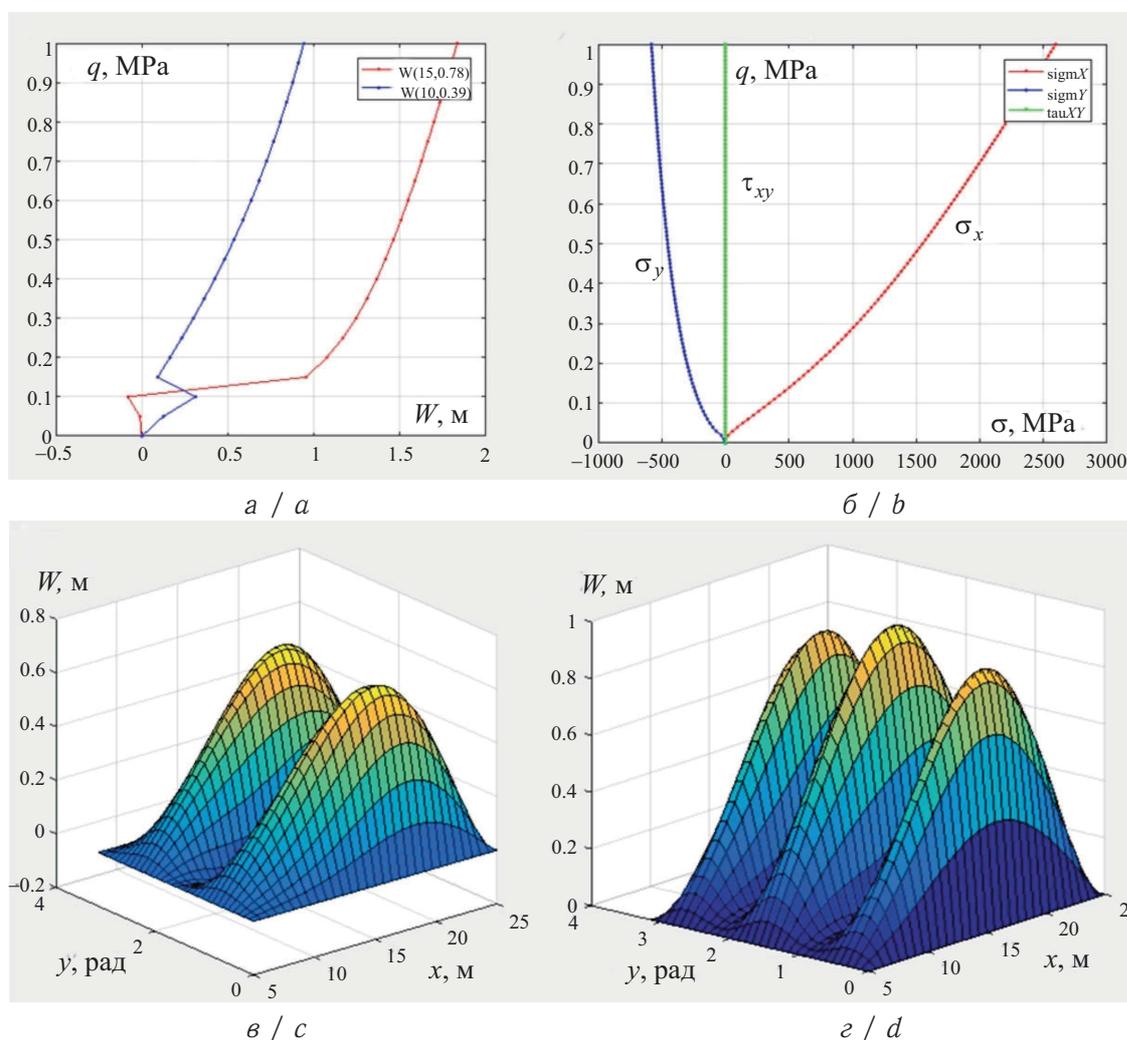
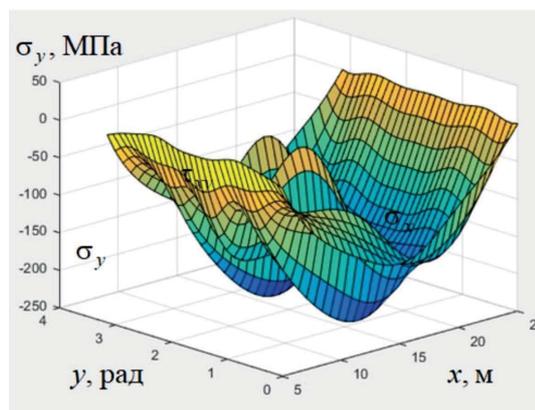


Рис. 2. Результаты расчета конструкции варианта 1 из углепластика Т300/976 (цвет online)
Fig. 2. The results of the calculation of the design of option 1 of carbon fiber Т300/976 (color online)

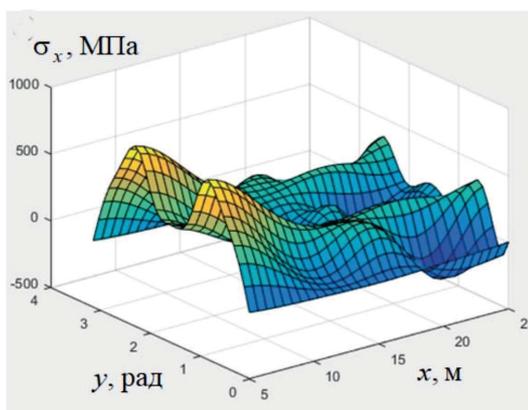
Здесь и далее на графиках «нагрузка – прогиб» красным цветом показаны значения в центре конструкции $((a_1 + a)/2, b/2)$; синим цветом — в четвертой части $(a_1 + (a - a_1)/4, b/4)$.



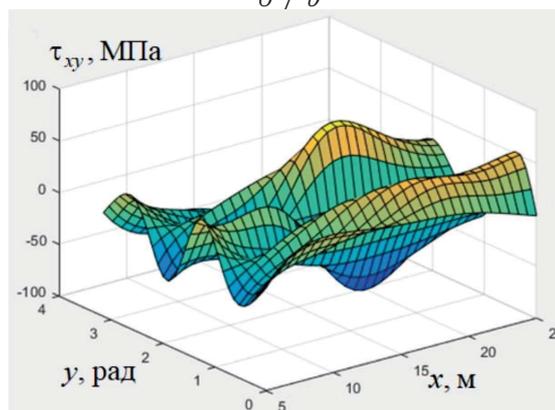
Также необходимо проводить контроль прочности материала оболочки, поскольку, находясь вблизи критической нагрузки, при превышении уровня допустимых напряжений это может повлечь за собой разрушение конструкции. Поля компонент напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в момент начала невыполнения условий прочности для данной конструкции приводятся на рис. 3.



б / б



а / а

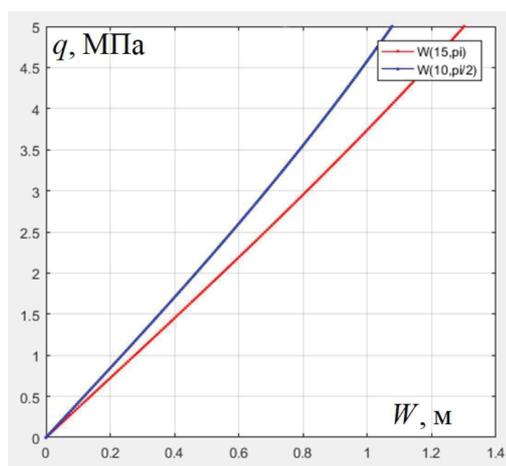


в / с

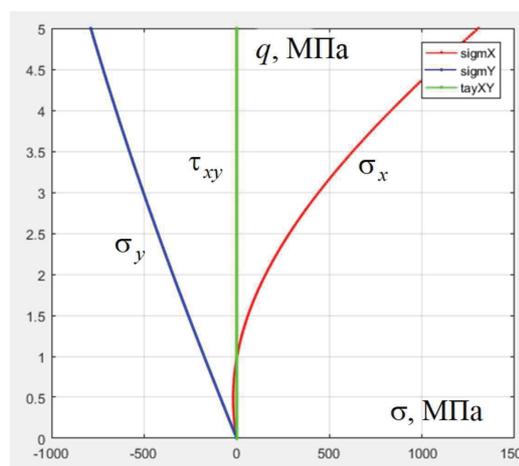
Рис. 3. Поля компонент напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в момент начала невыполнения условий прочности для конструкции варианта 1 из углепластика Т300/976 (цвет online)

Fig. 3. Fields of stress components σ_x , σ_y , τ_{xy} at the moment of the beginning of non-fulfillment of the strength conditions for the construction of option 1 from carbon fiber Т300/976 (color online)

Далее рассмотрим результаты расчета конструкции варианта 2, когда оболочка замкнутая. Графики зависимостей «нагрузка – прогиб» и «нагрузка – напряжение в центре конструкции» представлены на рис. 4.



а / а



б / б

Рис. 4. Результаты расчета конструкции варианта 2 из углепластика Т300/976 (цвет online)

Fig. 4. The results of the calculation of the design of option 2 from carbon fiber Т300/976 (color online)



Потеря устойчивости для данного варианта оболочки не наблюдается, что достаточно часто является характерным для замкнутых конструкций.

На рис. 5 изображены поле прогибов и поля напряжений в момент начала невыполнения условий прочности (при нагрузке, близкой к 1.5 МПа).

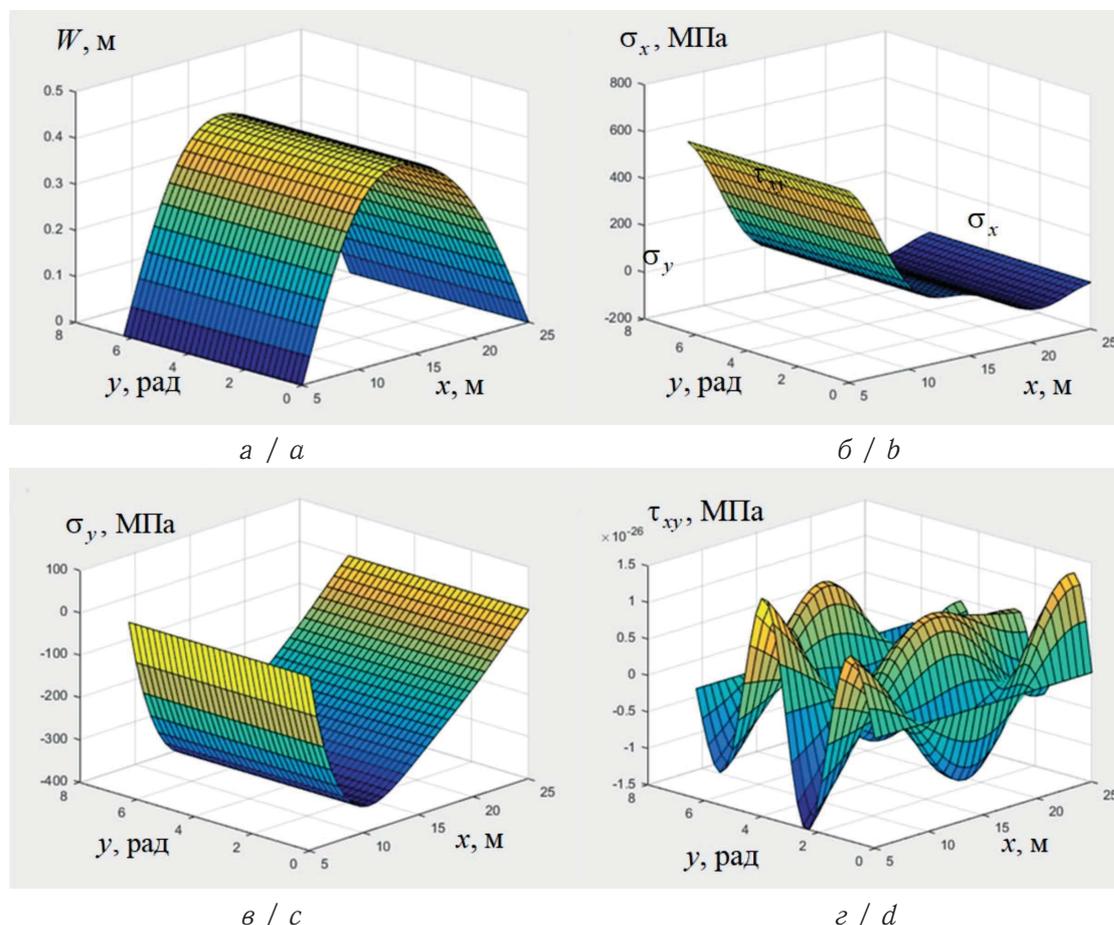


Рис. 5. Поле прогибов и поля компонент напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в момент начала невыполнения условий прочности для конструкции варианта 2 из углепластика Т300/976 (цвет online)

Fig. 5. The field of deflections and the field of stress components σ_x , σ_y , τ_{xy} at the moment of the beginning of the failure to fulfill the strength conditions for the construction of option 2 from carbon fiber T300/976 (color online)

В табл. 3 приводятся значения прогибов при некоторых значениях нагрузки для замкнутых оболочек из материалов ЛУ-П/ЭНФБ и Т300/Ероху. Для данных конструкций условие прочности перестает выполняться при нагрузках, близких к значению 1 МПа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены тонкостенные конические оболочечные конструкции, состоящие из различных ортотропных материалов и имеющие шарнирно-неподвижное закрепление. Рассматриваемые конструкции находились под воздействием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Проводилось комплексное исследование оболочек на устойчивость и прочность. Была разработана расчетная программа в среде MatLab, которая позволяет проводить исследования устойчивости оболочечных конструкций.



Таблица 3 / Table 3

Значения прогиба в центре и четверти замкнутых конструкций из материалов ЛУ-П/ЭНФБ и Т300/Ероху
Deflection values in the center and a quarter of closed structures made of materials LU-P/ENFB and T300/Eroxy

| q , МПа q , МРа | $W((a_1 + a)/2, b/2)$, м | | $W(a_1 + (a - a_1)/4, b/4)$, м | |
|------------------------|---------------------------|------------|---------------------------------|------------|
| | ЛУ-П/ЭНФБ | Т300/Ероху | ЛУ-П/ЭНФБ | Т300/Ероху |
| 0.5 | 0.1618 | 0.1693 | 0.1381 | 0.1453 |
| 1 | 0.3230 | 0.3379 | 0.2816 | 0.2962 |
| 1.5 | 0.4823 | 0.5040 | 0.4217 | 0.4436 |
| 2 | 0.6385 | 0.6675 | 0.5571 | 0.5858 |
| 2.5 | 0.7908 | 0.8420 | 0.6868 | 0.7220 |

Для панели оболочки, выполненной из ортотропного материала Т300/976, была найдена критическая нагрузка потери устойчивости, показана зависимость прогиба от нагрузки, докритическое и закритическое состояние конструкции, а также зависимость напряжения материала от действующей нагрузки.

Для замкнутых оболочек, выполненных из материалов Т300/976, ЛУ-П/ЭНФБ и Т300/Ероху, показаны поля прогибов и напряжений, а также некоторые числовые значения.

Таким образом, было проведено комплексное исследование на устойчивость и прочность оболочечных конструкций, состоящих из ортотропных материалов.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-19-00474).

Библиографический список

1. Hagihara S., Miyazaki N. Bifurcation Buckling Analysis of Conical Roof Shell Subjected to Dynamic Internal Pressure by the Finite Element Method // Journal of Pressure Vessel Technology. 2003. Vol. 125, iss. 1. P. 78–84. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1533801>
2. Krivoschapko S. N. Research on General and Axisymmetric Ellipsoidal Shells Used as Domes, Pressure Vessels, and Tanks // Applied Mechanics Reviews. 2007. Vol. 60, iss. 6. P. 336–355. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2806278>
3. Sosa E. M., Godoy L. A. Challenges in the computation of lower-bound buckling loads for tanks under wind pressures // Thin-Walled Structures. 2010. Vol. 48, iss. 12. P. 935–945. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.06.004>
4. Gavryushin S. S., Nikolaeva A. S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures // Mechanics of Solids. 2016. Vol. 51, iss 3. P. 339–348. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416030110>
5. Solovei N. A., Krivenko O. P., Malygina O. A. Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities // Magazine of Civil Engineering. 2015. Vol. 53, iss. 1. P. 56–69. DOI: <https://doi.org/10.5862/MCE.53.6>
6. Баранова Д. А., Волынин А. Л., Карпов В. В. Сравнительный анализ расчета прочности и устойчивости подкрепленных оболочек на основе ПК оболочка и ПК ANSYS // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 23–27. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-23-27>
7. Karpov V. V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 146. P. 117–135. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024>



8. *Trach V. M.* Stability of conical shells made of composites with one plane of elastic symmetry // *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43, iss. 6. P. 662–669. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0065-z>
9. *Shadmehri F., Hoa S. V., Hojjati M.* Buckling of conical composite shells // *Composite Structures*. 2012. Vol. 94, iss. 2. P. 787–792. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.016>
10. *Gupta A. K., Patel B. P., Nath Y.* Progressive damage of laminated cylindrical/conical panels under meridional compression // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015. Vol. 53. P. 329–341. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.05.013>
11. *Dung D. V., Chan D. Q.* Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT // *Composite Structures*. 2017. Vol. 159. P. 827–841. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.006>
12. *Dung D. V., Hoa L. Kh., Nga N. T., Anh L. T. N.* Instability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells under mechanical loads // *Composite Structures*. 2013. Vol. 106. P. 104–113. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.05.050>
13. *Dai Q., Cao Q.* Parametric instability analysis of truncated conical shells using the Haar wavelet method // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2018. Vol. 105. P. 200–213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.12.004>
14. *Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M. A.* Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded truncated conical curved panels subjected to axial compression // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 318. P. 957–980. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.02.020>
15. *Najafov A. M., Mammadov Z., Kadioglu F., Zerin Z., Sofiyeva A. H., Tekin G.* Nonlinear Behavior of Composite Truncated Conical Shells Subjected to the Dynamic Loading // *Acta Physica Polonica A*. 2015. Vol. 127, № 4. P. 904–906. DOI: <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.127.904>
16. *Sofiyev A. H., Kuruoglu N.* Domains of dynamic instability of FGM conical shells under time dependent periodic loads // *Composite Structures*. 2016. Vol. 136. P. 139–148. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.060>
17. *Sofiyev A. H., Pancar E. B.* The effect of heterogeneity on the parametric instability of axially excited orthotropic conical shells // *Thin-Walled Structures*. 2017. Vol. 115. P. 240–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.02.023>
18. *Krysko V. A., Awrejcewicz J., Shchekaturova T. V.* Chaotic vibrations of spherical and conical axially symmetric shells // *Archive of Applied Mechanics*. 2005. Vol. 74, iss. 5–6. P. 338–358. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02637035>
19. *Patel B. P., Khan K., Nath Y.* A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels // *Composite Structures*. 2014. Vol. 110. P. 183–191. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.008>
20. *Qu Y., Chen Y., Long X., Hua H., Meng G.* A modified variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical shell combinations // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2013. Vol. 37. P. 200–215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.06.006>
21. *Shul'ga N. A., Bogdanov S. Yu.* Forced Axisymmetric Nonlinear Vibrations of Reinforced Conical Shells // *International Applied Mechanics*. 2003. Vol. 39, iss. 12. P. 1447–1451. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000020829.56530.22>
22. *Demir Ç., Mercan K., Civalek Ö.* Determination of critical buckling loads of isotropic, FGM and laminated truncated conical panel // *Composites Part B : Engineering*. 2016. Vol. 94. P. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.03.031>
23. *Khan A. H., Patel B. P.* On the nonlinear dynamics of bimodular laminated composite conical panels // *Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 79, iss. 2. P. 1495–1509. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1756-8>



24. *Zerin Z.* The effect of non-homogeneity on the stability of laminated orthotropic conical shells subjected to hydrostatic pressure // *Structural Engineering and Mechanics*. 2012. Vol. 43, № 1. P. 89–103. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2012.43.1.089>
25. *Hao Y. X., Yang S. W., Zhang W., Yao M. H., Wang A. W.* Flutter of high-dimension nonlinear system for a FGM truncated conical shell // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2018. Vol. 25, iss. 1. P. 47–61. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1255815>
26. *Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S.* Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // *International Applied Mechanics*. 2012. Vol. 48, iss. 6. P. 613–687. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8>
27. *Sankar A., Natarajan S., Merzouki T., Ganapathi M.* Nonlinear Dynamic Thermal Buckling of Sandwich Spherical and Conical Shells with CNT Reinforced Facesheets // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016. P. 1750100. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455417501000>
28. *Watts G., Singha M. K., Pradyumna S.* Nonlinear bending and snap-through instability analyses of conical shell panels using element free Galerkin method // *Thin-Walled Structures*. 2018. Vol. 122. P. 452–462. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.10.027>
29. *Semenov A. A.* Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // *Thin-Walled Structures*. 2016. Vol. 106. P. 428–436. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
30. *Семенов А. А.* Анализ прочности оболочечных конструкций из современных материалов в соответствии с различными критериями прочности // *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. 2018. № 1. P. 16–33. DOI: <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2018.1.016-033>
31. *Смердов А. А., Буянов И. А., Чуднов И. В.* Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // *Изв. вузов. Машиностроение*. 2012. № 8. С. 70–77. DOI: <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2012-8-70-77>
32. *Цепенников М. В., Повышев И. А., Сметанников О. Ю.* Верификация численной методики расчета разрушения конструкций из композиционных материалов // *Вестн. ПНИПУ. Прикладная математика и механика*. 2012. № 10. P. 225–241.

Образец для цитирования:

Лапина Е. О., Семенов А. А. Исследование прочности и устойчивости ортотропных конических оболочек и конических панелей // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 79–92. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-79-92>

Investigation of Strength and Buckling of Orthotropic Conical Shells and Conical Panels

E. O. Lapina, A. A. Semenov

Elena O. Lapina, <https://orcid.org/0000-0002-2835-7728>, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4 Vtoraya Krasnoarmeiskaya St., Saint Petersburg 190005, Russia, lapina.eo@mail.ru

Alexey A. Semenov, <https://orcid.org/0000-0001-9490-7364>, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 4 Vtoraya Krasnoarmeiskaya St., Saint Petersburg 190005, Russia, sw.semenov@gmail.com



In the construction, thin-walled shell structures are used to cover the buildings of large areas, such as stadiums, hangars, circuses, airports. In this paper, the strength and buckling of closed conical shells as well as their panels are studied. The geometric nonlinearity and transverse shifts are taken into account. A mathematical model is used in the form of a functional of the total potential energy of deformation. Also expressions for deformations, forces and moments are given. The calculation program is implemented in the MatLab environment. The algorithm is based on the Ritz method and Newton's method for solving a system of nonlinear algebraic equations. Variants of approximating functions for a closed shell and for its panel are shown. The values of critical loads are found, the dependence of the deflection on the load, the dependence of the stresses on the load is obtained, and the deflection field is shown at the subcritical and at the supercritical moment. The fields of various stress components are given at the moment when the strength conditions begin to fail. The orthotropy of the material is taken into account.

Keywords: shells, conical panels, buckling, strength, orthotropy, geometric nonlinearity.

Received: 23.02.2019 / Accepted: 29.03.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 18-19-00474).

References

1. Hagihara S., Miyazaki N. Bifurcation Buckling Analysis of Conical Roof Shell Subjected to Dynamic Internal Pressure by the Finite Element Method. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2003, vol. 125, iss. 1, pp. 78–84. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1533801>
2. Krivoshapko S. N. Research on General and Axisymmetric Ellipsoidal Shells Used as Domes, Pressure Vessels, and Tanks. *Applied Mechanics Reviews*, 2007, vol. 60, iss. 6, pp. 336–355. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2806278>
3. Sosa E. M., Godoy L. A. Challenges in the computation of lower-bound buckling loads for tanks under wind pressures. *Thin-Walled Structures*, 2010, vol. 48, iss. 12, pp. 935–945. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.06.004>
4. Gavryushin S. S., Nikolaeva A. S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, iss. 3, pp. 339–348. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416030110>
5. Solovei N. A., Krivenko O. P., Malygina O. A. Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities. *Magazine of Civil Engineering*, 2015, vol. 53, iss. 1, pp. 56–69. DOI: <https://doi.org/10.5862/MCE.53.6>
6. Baranova D. A., Volynin A. L., Karpov V. V. The Comparative Analysis of Calculation of Durability and Stability of the Supported Shells on the Basis of the PC OBOLOCHKA and PC ANSYS. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 4, pp. 23–27 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-4-23-27>
7. Karpov V. V. Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 146, pp. 117–135. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.03.024>
8. Trach V. M. Stability of conical shells made of composites with one plane of elastic symmetry. *International Applied Mechanics*, 2007, vol. 43, iss. 6, pp. 662–669. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-007-0065-z>
9. Shadmehri F., Hoa S. V., Hojjati M. Buckling of conical composite shells. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, iss. 2, pp. 787–792. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.09.016>
10. Gupta A. K., Patel B. P., Nath Y. Progressive damage of laminated cylindrical/conical



- panels under meridional compression. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2015, vol. 53, pp. 329–341. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.05.013>
11. Dung D. V., Chan D. Q. Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT. *Composite Structures*, 2017, vol. 159, pp. 827–841. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.006>
 12. Dung D. V., Hoa L. Kh, Nga N. T., Anh L. T. N. Instability of eccentrically stiffened functionally graded truncated conical shells under mechanical loads. *Composite Structures*, 2013, vol. 106, pp. 104–113. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.05.050>
 13. Dai Q., Cao Q. Parametric instability analysis of truncated conical shells using the Haar wavelet method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, vol. 105, pp. 200–213. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.12.004>
 14. Mehri M., Asadi H., Kouchakzadeh M. A. Computationally efficient model for flow-induced instability of CNT reinforced functionally graded truncated conical curved panels subjected to axial compression. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, vol. 318, pp. 957–980. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.02.020>
 15. Najafov A. M., Mammadov Z., Kadioglu F., Zerin Z., Sofiyev A. H., Tekin G. Nonlinear Behavior of Composite Truncated Conical Shells Subjected to the Dynamic Loading. *Acta Physica Polonica A*, 2015, vol. 127, no. 4, pp. 904–906. DOI: <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.127.904>
 16. Sofiyev A. H., Kuruoglu N. Domains of dynamic instability of FGM conical shells under time dependent periodic loads. *Composite Structures*, 2016, vol. 136, pp. 139–148. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.060>
 17. Sofiyev A. H., Pancar E. B. The effect of heterogeneity on the parametric instability of axially excited orthotropic conical shells. *Thin-Walled Structures*, 2017, vol. 115, pp. 240–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.02.023>
 18. Krysko V. A., Awrejcewicz J., Shchekaturova T. V. Chaotic vibrations of spherical and conical axially symmetric shells. *Archive of Applied Mechanics*, 2005, vol. 74, iss. 5–6, pp. 338–358. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02637035>
 19. Patel B. P., Khan K., Nath Y. A new constitutive model for bimodular laminated structures: Application to free vibrations of conical/cylindrical panels. *Composite Structures*, 2014, vol. 110, pp. 183–191. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.11.008>
 20. Qu Y., Chen Y., Long X., Hua H., Meng G. A modified variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical shell combinations. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2013, vol. 37, pp. 200–215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2012.06.006>
 21. Shul'ga N. A., Bogdanov S. Yu. Forced Axisymmetric Nonlinear Vibrations of Reinforced Conical Shells. *International Applied Mechanics*, 2003, vol. 39, iss. 12, pp. 1447–1451. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000020829.56530.22>
 22. Demir Ç., Mercan K., Civalek Ö. Determination of critical buckling loads of isotropic, FGM and laminated truncated conical panel. *Composites Part B: Engineering*, 2016, vol. 94, pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.03.031>
 23. Khan A. H., Patel B. P. On the nonlinear dynamics of bimodular laminated composite conical panels. *Nonlinear Dynamics*, 2015, vol. 79, iss. 2, pp. 1495–1509. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1756-8>
 24. Zerin Z. The effect of non-homogeneity on the stability of laminated orthotropic conical shells subjected to hydrostatic pressure. *Structural Engineering and Mechanics*, 2012, vol. 43, no. 1, pp. 89–103. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2012.43.1.089>
 25. Hao Y. X., Yang S. W., Zhang W., Yao M. H., Wang A. W. Flutter of high-dimension nonlinear system for a FGM truncated conical shell. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2018, vol. 25, iss. 1, pp. 47–61. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1255815>
 26. Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Variational finite-difference me-



- thods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). *International Applied Mechanics*, 2012, vol. 48, iss. 6, pp. 613–687. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0544-8>
27. Sankar A., Natarajan S., Merzouki T., Ganapathi M. Nonlinear Dynamic Thermal Buckling of Sandwich Spherical and Conical Shells with CNT Reinforced Facesheets. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2016, pp. 1750100. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455417501000>
 28. Watts G., Singha M. K., Pradyumna S. Nonlinear bending and snap-through instability analyses of conical shell panels using element free Galerkin method. *Thin-Walled Structures*, 2018, vol. 122, pp. 452–462. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.10.027>
 29. Semenov A. A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures. *Thin-Walled Structures*, 2016, vol. 106, pp. 428–436. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.05.018>
 30. Semenov A. A. Analysis of the strength of shell structures, made from modern materials, according to various strength criteria. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2018, iss. 1, pp. 16–33. DOI: <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2018.1.016-033>
 31. Smerdov A. A., Buyanov I. A., Chudnov I. V. Analysis of optimal combinations of requirements to developed CFRP for large space-rocket designs. *Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2012, no. 8, pp. 70–77 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2012-8-70-77>
 32. Tsepennikov M. V., Povyshev I. A., Smetannikov O. Yu. Verification of numerical technique for composite structures failure modeling. *Vestnik PNIPU. Prikladnaia matematika i mekhanika* [Perm National Research Polytechnic University Bulletin. Applied Mathematics and Mechanics], 2012, no. 10, pp. 225–241 (in Russian).

Cite this article as:

Lapina E. O., Semenov A. A. Investigation of Strength and Buckling of Orthotropic Conical Shells and Conical Panels. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 79–92 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-79-92>



УДК 629.78,519.6

Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата

И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков

Панкратов Илья Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83; научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24, PankratovIA@info.sgu.ru

Сапунков Яков Григорьевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24, SapunkovYaG@gmail.com

Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики, навигации и управления движением, Институт проблем точной механики и управления РАН, Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24, ChelnokovYuN@gmail.com

В кватернионной постановке рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор ускорения от реактивной тяги) является ограниченным по модулю. В ходе решения задачи требуется определить оптимальную ориентацию этого вектора в пространстве. При этом необходимо минимизировать длительность процесса переориентации орбиты КА. Для описания движения центра масс КА использовано кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА. Поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. Учет известного частного решения уравнения для переменной, сопряженной к истинной аномалии, позволил упростить уравнения задачи. Задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений 15-го порядка. Для численного решения полученной краевой задачи был осуществлен переход к безразмерным переменным. При этом в фазовых и сопряженных уравнениях появился характерный безразмерный параметр задачи. Построен оригинальный численный алгоритм нахождения неизвестных начальных значений сопряженных переменных, являющийся комбинацией методов Рунге – Кутты 4-го порядка точности, модифицированного метода Ньютона и градиентного спуска. Использование двух методов решения краевых задач позволило повысить точность решения рассматриваемой краевой задачи оптимального управления. Приведены примеры численного решения задачи для случая, когда отличие между начальной и конечной ориентациями орбиты КА составляет единицы (или десятки) градусов в угловой мере. Построены графики изменения компонент кватерниона ориентации орбиты КА; переменных, характеризующих форму и размеры орбиты КА; оптимального управления. Приведен анализ полученных решений. Установлены особенности и закономерности процесса оптимальной переориентации орбиты КА.



Ключевые слова: космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион.

Поступила в редакцию: 05.03.2019 / Принята: 24.05.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-93-104>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что космический аппарат (КА) движется в пространстве под действием тяги реактивного двигателя, сообщающего КА вектор ускорения \mathbf{p} . Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА меняет свою форму и свои размеры, т. е. является деформируемой фигурой. Рассмотрим следующую задачу: требуется определить ограниченное по модулю управление \mathbf{p} :

$$0 \leq p \leq p_{\max} < \infty, \quad p = |\mathbf{p}|, \quad (1)$$

переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = v_1, \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{fM}{r^2} + p_1, \quad \frac{dc}{dt} = rp_2, \quad 2\frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \circ \Omega_\xi, \\ \Omega_\xi = \frac{p_3 r}{c} (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2) - \frac{r}{c^2 - fMr} \cos \varphi \cdot \\ \cdot \left(cp_1 \cos \varphi - \left(c + \frac{fMr}{c} p_2 \sin \varphi \right) \mathbf{i}_3 \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} - \frac{r}{c^2 - fMr} \cos \varphi \cdot \left(cp_1 \cos \varphi - \left(c + \frac{fMr}{c} p_2 \sin \varphi \right) \right),$$

из заданного начального состояния

$$t = 0, \quad r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \quad c(0) = c^0, \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad \Lambda(0) = \Lambda^0 \quad (3)$$

в конечное состояние

$$t = t^* = ?, \quad c(t^*) = c(0) = c^0, \quad e_{or}(t^*) = e_{or}(0), \quad \Lambda(t^*) = \pm \Lambda^* \quad (4)$$

за минимальное время.

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор КА, проводимый из центра притяжения, $r = |\mathbf{r}|$; v_1 — проекция вектора скорости КА на направление его радиус-вектора; c — модуль момента орбитальной скорости КА; f — гравитационная постоянная, M — масса притягивающего тела (Земли); p_k , $k = \overline{1, 3}$ — компоненты вектора ускорения от тяги реактивного двигателя; $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3$ — нормированный кватернион ориентации орбиты КА, \mathbf{i}_k , $k = \overline{1, 3}$ — векторные мнимые единицы Гамильтона; φ — истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите.

В поставленной задаче заданы начальные значения фазовых координат КА r , v_1 , c , φ , Λ и эксцентриситета орбиты КА e_{or} , вычисляемого либо по формуле [2, 3]

$$e_{or} = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2} \left(v_1^2 + \frac{c^2}{\mu^2} - 2\frac{\mu}{r} \right)}, \quad \mu = fM,$$



либо по формуле

$$e_{or} = \frac{r \cdot v_1}{c \sin \varphi - r v_1 \cos \varphi},$$

также заданы значения компонент кватерниона Λ^* .

Конечные значения фазовых координат принадлежат многообразию (4). Конечное значение момента времени t^* не фиксируется и подлежит определению в результате решения задачи. Поэтому эта задача — задача с подвижным правым концом. Отметим, что в отличие от работ [4, 5] величины больших полуосей начальной и конечной орбит в общем случае не совпадают, т.е. размер конечной орбиты КА может отличаться от размера его начальной орбиты. Отметим также, что ввиду своей сложности задача о быстродействии другими авторами решалась редко (можно отметить работы [6–9]). В основном минимизировались затраты рабочего тела или характеристическая скорость.

Известно, что задача межорбитального перелета КА значительно упрощается, если начальная и конечная орбиты лежат в одной плоскости. Становится возможным аналитически (точно или приближенно) найти оптимальные траектории перехода. Этим обусловлено значительное количество публикаций в данной области. Чаще всего минимизировался расход рабочего тела. Отметим работы И. С. Григорьева, К. Г. Григорьева [10–13], С. Н. Кирпичникова с соавторами [14, 15]. Задачи оптимального управления решаются на основе принципа максимума. Краевые задачи принципа максимума решаются численно методом стрельбы. В настоящей статье рассмотрена общая задача переориентации орбиты КА. На форму и размеры начальной и конечной орбит дополнительных ограничений не наложено.

В отличие от управления угловым движением твердого тела, где уже довольно давно применяются кватернионные модели, в подавляющем большинстве работ, посвященных переориентации орбиты КА, используются уравнения движения в традиционных угловых элементах орбиты. Отметим также, что некоторые авторы [16, 17] применяют кватернионный подход для построения аналитического решения уравнений невозмущенной пространственной задачи двух тел во вращающейся системе координат. В большинстве работ задача сводится к численному решению нелинейных краевых задач высокой размерности, полученных с помощью применения принципа максимума Л. С. Понтрягина. Аналитическое исследование дифференциальных уравнений ориентации орбиты в классических угловых элементах (и получающихся краевых задач) — достаточно сложная задача. Отметим работы С. А. Ишкова, В. В. Салмина и др. [18, 19]. Повышение эффективности численного решения задач в этой области, по-видимому, может быть получено при использовании кватернионных моделей орбитального движения КА. В настоящей работе развиваются исследования изучаемой задачи, начатые в [20].

Четыре компоненты Λ_j кватерниона Λ удовлетворяют условию $\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \Lambda_3^2 = 1$, поэтому краевое кватернионное условие в (4), эквивалентное четырем скалярным, заменим на условие

$$\text{vect} \left[\tilde{\Lambda}(t^*) \circ \Lambda^* \right] = \mathbf{0}, \quad (5)$$

эквивалентное трем скалярным (в (5) и далее верхняя волна означает сопряженный кватернион). Такая замена повышает эффективность численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.



2. ЗАКОН ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума [21]. Для этого введем дополнительные переменные ρ , s_1 , e , χ и $\mathbf{M} = M_0 + M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2 + M_3 \mathbf{i}_3$, сопряженные по отношению к фазовым переменным r , v_1 , c , φ и $\mathbf{\Lambda}$. Известно [20], что уравнение для переменной χ имеет частное решение

$$\chi = N_3/2. \quad (6)$$

В этом случае функция Гамильтона – Понтрягина примет вид

$$H = -1 + \rho v_1 + s_1 \left(\frac{c^2}{r^3} - \frac{fM}{r^2} + p_1 \right) + e r p_2 + \chi \frac{c}{r^2} + p_3 \frac{r}{2c} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi),$$

где N_j , $j = \overline{1,3}$ – компоненты кватерниона $\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{\Lambda}} \circ \mathbf{M}$.

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{dt} &= -\rho, \\ \frac{d\rho}{dt} &= 3s_1 \frac{c^2}{r^4} - 2 \frac{s_1 f M - \chi c}{r^3} - e p_2 - \frac{p_3}{2c} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi), \\ \frac{de}{dt} &= -2c \frac{s_1}{r^3} - \frac{\chi}{r^2} + p_3 \frac{r}{2c^2} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi), \\ 2 \frac{d\mathbf{M}}{dt} &= \mathbf{M} \circ \mathbf{\Omega}_\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Закон оптимального в смысле быстродействия управления (т. е. закон управления, удовлетворяющий необходимому условию оптимальности) находится из условий максимума функции H по переменной \mathbf{p} с учетом наложенного ограничения (1) и имеет вид

$$\mathbf{p}^o = p_{\max} \mathbf{n} / |\mathbf{n}|, \quad \mathbf{n} = s_1 \mathbf{i}_1 + e r \mathbf{i}_2 + \frac{r}{2c} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi) \mathbf{i}_3. \quad (8)$$

Условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа, имеют вид:

$$t = t^*, \quad \rho - \frac{s_1}{v_1 \cdot r^2} \left(1 - \frac{r}{c^2} \right) = 0, \quad \Lambda_0^* M_0 + \Lambda_1^* M_1 + \Lambda_2^* M_2 + \Lambda_3^* M_3 = 0. \quad (9)$$

Таким образом, задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (2), (7), (8) 15-го порядка и тринадцатью краевыми условиями (3), (4), (5), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (9) и равенством

$$H^o |_{t^*} = 0,$$

имеющим место для оптимального управления \mathbf{p}^o и оптимальной траектории.



3. УРАВНЕНИЯ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для численного решения краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА запишем уравнения этой задачи в безразмерных переменных. Фазовые Λ_j и сопряженные M_j переменные являются безразмерными. Безразмерные переменные r^b , t^b и компоненты управления p_k^b связаны с размерными переменными r , t и управлениями p_k соотношениями: $r = Rr^b$, $t = Tt^b$, $p_k = p_{\max}p_k^b$, $k = \overline{1,3}$, где R — характерное расстояние (в его качестве принималась величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); V , T — характерные скорость и время соответственно, определяемые соотношениями: $V = C/R$, $T = R^2/C$. Здесь C — характерная секторная скорость.

Отметим, что при переходе к безразмерным переменным в уравнениях для фазовых и сопряженных переменных появляется характерный безразмерный параметр $N = p_{\max}R^3/C^2$.

Таким образом, система фазовых уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид (здесь и далее верхние индексы у безразмерных переменных опускаются):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_1, & \frac{dv_1}{dt} &= \frac{c^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} + N \cdot p_1, & \frac{dc}{dt} &= N \cdot r \cdot p_2, & 2 \frac{d\Lambda}{dt} &= \Lambda \circ \Omega_\xi, \\ \Omega_\xi &= N \cdot \frac{p_3 \cdot r}{c} (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2) - N \cdot \frac{r}{c^2 - r} \cos \varphi \times \\ &\times \left(cp_1 \cos \varphi - \left(c + \frac{r}{c} p_2 \sin \varphi \right) \mathbf{i}_3 \right), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2} - N \cdot \frac{r}{c^2 - r} \cos \varphi \cdot \left(cp_1 \cos \varphi - \left(c + \frac{r}{c} p_2 \sin \varphi \right) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Начальные условия интегрирования этой системы

$$t = 0, \quad r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \quad c(0) = c^0, \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad \Lambda(0) = \Lambda^0 \quad (11)$$

являются заданными.

Для правого конца траектории КА имеем условия

$$t = t^* = ?, \quad c(t^*) = c(0) = c^0, \quad e_{or}(t^*) = e_{or}(0), \quad \text{vect} \left[\tilde{\Lambda}(t^*) \circ \Lambda^* \right] = 0, \quad (12)$$

где Λ^* — заданная кватернионная величина.

Ограничение по управлению в безразмерном виде: $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \leq 1$.

Система сопряженных уравнений в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{dt} &= -\rho, \\ \frac{d\rho}{dt} &= 3s_1 \frac{c^2}{r^4} - 2 \frac{s_1 - \chi c}{r^3} - N e p_2 - N \frac{p_3}{2c} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi), \\ \frac{de}{dt} &= -2c \frac{s_1}{r^3} - \frac{\chi}{r^2} + N \cdot p_3 \frac{r}{2c^2} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi), \\ 2 \frac{d\mathbf{M}}{dt} &= \mathbf{M} \circ \Omega_\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что безразмерное дифференциальное уравнение для переменной χ было заменено частным решением (6).



Условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа, в безразмерных переменных имеют вид

$$t = t^*, \quad \rho - \frac{s_1}{v_1 \cdot r^2} \left(1 - \frac{r}{c^2}\right) = 0, \quad (14)$$

$$\Lambda_0^* M_0 + \Lambda_1^* M_1 + \Lambda_2^* M_2 + \Lambda_3^* M_3 = 0.$$

Таким образом, в безразмерных переменных задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (10), (13) 15-го порядка и тринадцатью краевыми условиями (11), (12), которые необходимо дополнить двумя условиями трансверсальности (14) и равенством гамильтониана нулю в конце движения. При этом закон оптимального управления аналогичен (8).

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Алгоритм численного решения задач реализует комбинацию метода Рунге – Кутты 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска [22].

Величины, характеризующие форму, размеры орбиты КА, начальное и конечное положения КА на орбите, начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными [23] (a_{or} — большая полуось орбиты):

$$e_{or} = 0.8257, \quad a_{or} = 37936238.7597 \text{ м},$$

$$\varphi_0 = 2.954779 \text{ рад.}, \quad p_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N = 0.35;$$

для начального положения КА

$$\Lambda_0^0 = 0.679417, \quad \Lambda_1^0 = -0.245862, \quad \Lambda_2^0 = -0.539909, \quad \Lambda_3^0 = -0.353860;$$

для конечного положения КА

вариант 1 (малое отличие в ориентациях орбит КА):

$$\Lambda_0^* = 0.678275, \quad \Lambda_1^* = -0.268667, \quad \Lambda_2^* = -0.577802, \quad \Lambda_3^* = -0.366116;$$

вариант 2 (большое отличие в ориентациях орбит КА):

$$\Lambda_0^* = -0.440542, \quad \Lambda_1^* = -0.522476, \quad \Lambda_2^* = -0.125336, \quad \Lambda_3^* = -0.719189.$$

Значения выбранных масштабирующих множителей равны: $R = 37000000.0 \text{ м}$, $V = 3282.220738 \text{ м/с}$, $C = 121442167306.088539 \text{ м/с}^2$, $T = 11272.855470 \text{ с}$. Указанные значения этих величин отвечают значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведенным в [24].

Ориентации начальной и конечной орбит КА характеризуются параметрами Эйлера Λ_j^0 и Λ_j^* , $j = \overline{0,3}$. Если в варианте 1 эти значения близки (отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перицентра от узла составляет единицы градусов: $\Delta\Omega_u = \Omega_u(t_0) - \Omega_u(t^*) = -3.30^\circ$, $\Delta I = I(t_0) - I(t^*) = -1.51^\circ$, $\Delta\omega_\pi = \omega_\pi(t_0) - \omega_\pi(t^*) = -1.59^\circ$), то в варианте 2 они существенно отличаются (отличие ориентаций орбит в угловой мере составляет десятки градусов: $\Delta\Omega_u = -32.00^\circ$, $\Delta I = -117.57^\circ$, $\Delta\omega_\pi = 39.96^\circ$).

На рис. 1, 2 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для обоих вариантов исходных данных.

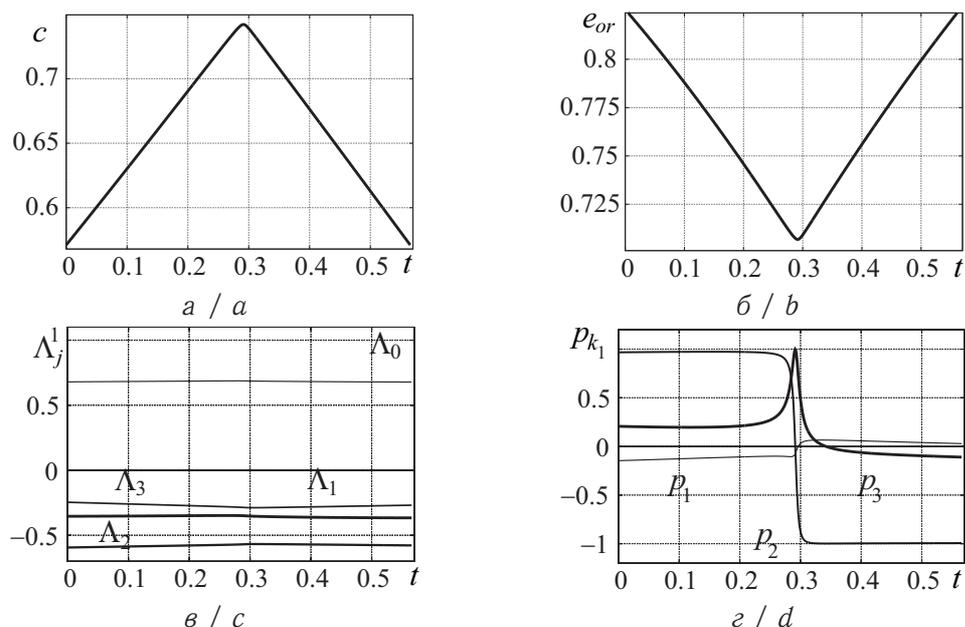


Рис. 1. Эллиптическая орбита, вариант 1: a — модуль момента орбитальной скорости КА; b — эксцентриситет орбиты КА; c — компоненты кватерниона ориентации орбиты КА; d — оптимальное управление

Fig. 1. Elliptical orbit, variant 1: a — modulus of the moment of the spacecraft orbital velocity; b — eccentricity of the spacecraft orbit; c — components of quaternion of the spacecraft orbit orientation; d — optimal control

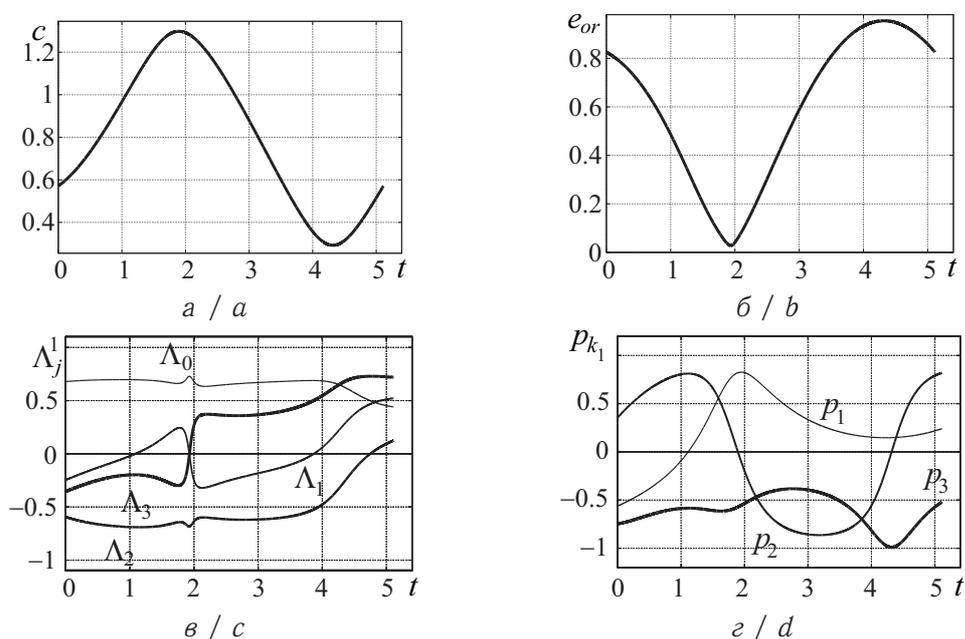


Рис. 2. Эллиптическая орбита, вариант 2: a — модуль момента орбитальной скорости КА; b — эксцентриситет орбиты КА; c — компоненты кватерниона ориентации орбиты КА; d — оптимальное управление

Fig. 2. Elliptical orbit, variant 2: a — modulus of the moment of the spacecraft orbital velocity; b — eccentricity of the spacecraft orbit; c — components of quaternion of the spacecraft orbit orientation; d — optimal control



При малом отличии в ориентациях начальной и конечной орбит КА (вариант 1) длительность процесса переориентации орбиты КА составила 0.565439 безразмерных единиц, или 1.771 ч. Заметим, что при $t = 0.296730$ резко меняются законы изменения компонент оптимального управления (со сменой знака). До этого времени модуль момента орбитальной скорости КА практически линейно увеличивался, а затем он начинает уменьшаться. И, напротив, эксцентриситет орбиты КА вначале линейно уменьшается, а после $t = 0.296730$ начинает увеличиваться, достигая своего первоначального значения в конце движения. Компоненты кватерниона ориентации орбиты КА являются медленно изменяющимися переменными.

При большом отличии в ориентациях начальной и конечной орбит КА (вариант 2) длительность процесса переориентации орбиты КА составила 5.112605 безразмерных единиц, или 16.009 ч. Заметим, что при $t = 1.933729$ орбита КА близка к круговой. Затем эксцентриситет орбиты начинает увеличиваться. Максимальное значение эксцентриситета (близкое к единице) больше его начального значения. Также при $t = 1.933729$ модуль момента орбитальной скорости КА достигает своего максимального значения. В этой же точке фазовые переменные Λ_0, Λ_2 имеют локальные экстремумы, а Λ_1, Λ_3 меняют знак.

Отметим выявленную неединственность численного решения краевой задачи оптимальной переориентации орбиты КА, связанную с нелинейностью дифференциальных уравнений задачи. При одних и тех же граничных условиях в постановке краевой задачи оптимального управления получены различные решения для законов движения, управления и поведения сопряженных переменных. Из них было выбрано то, при котором переориентация орбиты КА происходит за меньшее время.

Отметим также, что в отличие от работы [20] авторам удалось получить решение в случае, когда отличие в ориентациях начальной и конечной орбит КА составляет десятки градусов. При этом комбинирование двух методов решения краевых задач позволило повысить точность численного решения краевой задачи с 0.002 до 10^{-9} безразмерных единиц.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).

Библиографический список

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 1. С. 92–107.
2. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М. : Наука, 1976. 864 с.
3. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Наука, 1968. 799 с.
4. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-3-87-95>
5. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-84-92>



6. Кирпичников С. Н., Бобкова А. Н., Оськина Ю. В. Минимальные по времени импульсные перелеты между круговыми компланарными орбитами // Космические исследования. 1991. Т. 29, № 3. С. 367–374.
7. Григорьев И. С., Григорьев К. Г., Петрикова Ю. Д. О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме // Космические исследования. 2000. Т. 38, № 2. С. 171–192.
8. Kiforenko V. M., Pasechnik Z. V., Kyrychenko S. B., Vasiliev I. Yu. Minimum time transfers of a low-thrust rocket in strong gravity fields // Acta Astronautica. 2003. Vol. 52, iss. 8. P. 601–611. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(02\)00130-3](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(02)00130-3)
9. Fazlzadeh S. A., Varzandian G. A. Minimum-time earth-moon and moon-earth orbital maneuvers using time-domain finite element method // Acta Astronautica. 2010. Vol. 66, iss. 3–4. P. 528–538. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2009.07.021>
10. Григорьев К. Г., Федына А. В. Оптимальные перелеты космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между компланарными круговыми орбитами // Космические исследования. 1995. Т. 33, № 4. С. 403–416.
11. Рыжов С. Ю., Григорьев И. С. К проблеме решения задач оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных перелетов КА // Космические исследования. 2006. Т. 44, № 3. С. 272–280.
12. Григорьев И. С., Григорьев К. Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. I // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 4. С. 358–366.
13. Григорьев И. С., Григорьев К. Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. II // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 6. С. 553–563.
14. Кирпичников С. Н., Бобкова А. Н. Оптимальные импульсные межорбитальные перелеты с аэродинамическими маневрами // Космические исследования. 1992. Т. 30, № 6. С. 800–809.
15. Кирпичников С. Н., Кулешова Л. А., Костина Ю. Л. Качественные свойства энергетически оптимальных орбит импульсных полетов между круговыми компланарными орбитами при заданном времени старта // Космические исследования. 1996. Т. 34, № 2. С. 170–179.
16. Condurache D., Martinusi V. Quaternionic Exact Solution to the Relative Orbital Motion Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. Vol. 33, № 4. P. 1035–1047. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.47782>
17. Condurache D., Burlacu A. Onboard Exact Solution to the Full-Body Relative Orbital Motion Problem // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016. Vol. 39, № 12. P. 2638–2648. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G000316>
18. Ишков С. А., Романенко В. А. Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1997. Т. 35, № 3. С. 287–296.
19. Салмин В. В., Соколов В. О. Приближенный расчет маневров формирования орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. 1991. Т. 29, № 6. С. 872–888.
20. Афанасьева Ю. В., Челноков Ю. Н. Задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата как деформируемой фигуры // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 125–138.
21. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.



22. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с.
23. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 5. С. 488–505.
24. *Бордовицына Т. В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1984. 136 с.

Образец для цитирования:

Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 93–104. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-93-104>

Quaternion Models and Algorithms for Solving the General Problem of Optimal Reorientation of Spacecraft Orbit

I. A. Pankratov, Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov

Ilya A. Pankratov, <https://orcid.org/0000-0002-5325-9310>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia, PankratovIA@info.sgu.ru

Yakov G. Sapunkov, <https://orcid.org/0000-0001-7149-5117>, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia, SapunkovYaG@gmail.com

Yuriy N. Chelnokov, <https://orcid.org/0000-0003-4901-5767>, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia, ChelnokovYuN@gmail.com

The problem of optimal reorientation of the spacecraft orbit is considered in quaternion formulation. Control (vector of the acceleration of the jet thrust) is limited in magnitude. To solve the problem it is required to determine the optimal orientation of this vector in space. It is necessary to minimize the duration of the process of reorientation of the spacecraft orbit. To describe the motion of the center of mass of the spacecraft we used quaternion differential equation of the orientation of the spacecraft orbit. The problem was solved using the maximum principle of L. S. Pontryagin. Accounting the known particular solution of the equation for the variable conjugated to a true anomaly, we allowed to simplify the equations of the problem. The problem of optimal reorientation of the spacecraft orbit is reduced to a boundary value problem with a moving right end trajectory described by a system of nonlinear differential equations of the fifteenth order. For the numerical solution of the obtained boundary value problem the transition to dimensionless variables was carried out. At the same time a characteristic dimensionless parameter of the problem appeared in the phase and conjugate equations. The original numerical algorithm for finding unknown initial values of conjugate variables, which is a combination of the 4th order Runge – Kutta method, modified Newton method and gradient descent method is constructed. The use of two methods for solving boundary value problems has improved the accuracy of the boundary value problem solution of optimal control. Examples of numerical solution of the problem are given for the case when the difference between the initial and final orientations of the spacecraft orbit equals to a few (or tens of) degrees in angular measure. Graphs of component changes of the spacecraft orbit orientation quaternion; variables characterizing the shape and dimensions of the spacecraft



orbit; optimal control are plotted. The analysis of the obtained solutions is given. The features and regularities of the optimal reorientation of the spacecraft orbit are established.

Keywords: spacecraft, orbit, optimal control, quaternion.

Received: 05.03.2019 / Accepted: 24.05.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-01-00205).

References

1. Chelnokov Yu. N. The use of quaternions in the optimal control problems of motion of the center of mass of a spacecraft in a newtonian gravitational field: II. *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 1, pp. 85–99. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1022359831200>
2. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Riabov Yu. A. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mekhanike i astrodinamike* [Reference guide on celestial mechanics and astrodynamics]. Moscow, Nauka, 1976. 864 p. (in Russian).
3. Duboshin G. N. *Nebesnaia mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* [Celestial mechanics. Main tasks and methods]. Moscow, Nauka, 1968. 799 p. (in Russian).
4. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. About a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 87–95 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-3-87-95>
5. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Solution of a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation Using Quaternion Equations of Orbital System of Coordinates Orientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 1, pp. 84–92 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-1-84-92>
6. Kirpichnikov S. N., Bobkova A. N., Os'kina Yu. V. Minimum-time impulse transfers between coplanar circular orbits. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 1991, vol. 29, no. 3, pp. 367–374 (in Russian).
7. Grigoriev K. G., Grigoriev I. S., Petrikova Yu. D. The fastest maneuvers of a spacecraft with a jet engine of a large limited thrust in a gravitational field in a vacuum. *Cosmic Research*, 2000, vol. 38, no. 2, pp. 160–181.
8. Kiforenko B. M., Pasechnik Z. V., Kyrychenko S. B., Vasiliev I. Yu. Minimum time transfers of a low-thrust rocket in strong gravity fields. *Acta Astronautica*, 2003, vol. 52, iss. 8, pp. 601–611. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0094-5765\(02\)00130-3](https://doi.org/10.1016/S0094-5765(02)00130-3)
9. Fazelzadeh S. A., Varzandian G. A. Minimum-time earth-moon and moon-earth orbital maneuvers using time-domain finite element method. *Acta Astronautica*, 2010, vol. 66, iss. 3–4, pp. 528–538. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2009.07.021>
10. Grigorev K. G., Fedyna A. V. Optimal flights of a spacecraft with jet engine large limited thrust between coplanar circular orbits. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 1995, vol. 33, no. 4, pp. 403–416 (in Russian).
11. Ryzhov S. Yu., Grigoriev I. S. On solving the problems of optimization of trajectories of many-revolution orbit transfers of spacecraft. *Cosmic Research*, 2006, vol. 44, iss. 3, pp. 258–267. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010952506030105>
12. Grigoriev I. S., Grigoriev K. G. The use of solutions to problems of spacecraft trajectory optimization in impulse formulation when solving the problems of optimal control of trajectories of a spacecraft with limited thrust engine: I. *Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 4, pp. 339–347. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010952507040077>
13. Grigoriev I. S., Grigoriev K. G. The use of solutions to problems of spacecraft trajectory optimization in impulse formulation when solving the problems of optimal control of



- trajectories of a spacecraft with limited thrust engine: II. *Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 6, pp. 523–534. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010952507060093>
14. Kirpichnikov S. N., Bobkova A. N. Optimal impulse interorbital flights with aerodynamic maneuvers. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 1992, vol. 30, no. 6, pp. 800–809 (in Russian).
 15. Kirpichnikov S. N., Kuleshova L. A., Kostina Yu. L. A qualitative analysis of impulsive minimum-fuel flight paths between coplanar circular orbits with a given launch time. *Cosmic Research*, 1996, vol. 34, no. 2, pp. 156–164.
 16. Condurache D., Martinusi V. Quaternionic Exact Solution to the Relative Orbital Motion Problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, vol. 33, no. 4, pp. 1035–1047. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.47782>
 17. Condurache D., Burlacu A. Onboard Exact Solution to the Full-Body Relative Orbital Motion Problem. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, vol. 39, no. 12, pp. 2638–2648. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.G000316>
 18. Ishkov S. A., Romanenko V. A. Forming and correction of a high-elliptical orbit of an earth satellite with low-thrust engine. *Cosmic Research*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 268–277.
 19. Salmin V. V., Sokolov V. O. Approximate calculation of the formation manoeuvres of the satellite orbit the Earth with a small engine thrusts. *Kosmicheskie issledovaniia* [Cosmic Research], 1991, vol. 29, no. 6, pp. 872–888 (in Russian).
 20. Afanas'eva Yu. V., Chelnokov Yu. N. The problem of optimal control of the orientation of an orbit of a spacecraft as a deformable figure. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 4, pp. 621–634. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106423070804014X>
 21. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka, 1983. 393 p. (in Russian).
 22. Moiseev N. N. *Chislennyye metody v teorii optimal'nykh sistem* [Numerical methods in the theory of optimal systems]. Moscow, Nauka, 1971. 424 p. (in Russian).
 23. Chelnokov Yu. N. The Use of Quaternions in the Optimal Control Problems of Motion of the Center of Mass of a Spacecraft in a Newtonian Gravitational Field: III. *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 5, pp. 460–477. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1026098216710>
 24. Bordovitsyna T. V. *Sovremennyye chislennyye metody v zadachakh nebesnoi mekhaniki* [Modern numerical methods in problems of celestial mechanics]. Moscow, Nauka, 1984. 136 p. (in Russian).

Cite this article as:

Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Quaternion Models and Algorithms for Solving the General Problem of Optimal Reorientation of Spacecraft Orbit. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 93–104 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-93-104>



ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

Построение минимальных рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм

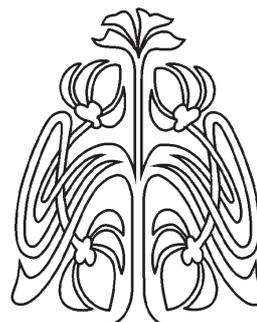
М. Б. Абросимов, Х. Х. К. Судани, А. А. Лобов

Абросимов Михаил Борисович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, mic@rambler.ru

Судани Хайдер Хуссейн Карим, Министерство науки и технологий Ирака, Багдад, Ирак; аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, hayder.1977@mail.ru

Лобов Александр Андреевич, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, aisaneka@mail.ru

В 1993 г. Frank Harary и John P. Hayes предложили основанную на графах модель для исследования отказов связей элементов дискретных систем. Технической системе сопоставляется граф. Элементам системы соответствуют вершины графа, а связям между элементами — рёбра или дуги графа. Под отказом связи между элементами системы понимается удаление из графа системы соответствующего ребра (или дуги). Формализацией отказоустойчивой реализации системы является расширение графа. Граф G^* называется рёберным k -расширением графа G , если после удаления любых k рёбер из графа G^* граф G вкладывается в получившийся граф. Рёберное k -расширение n -вершинного графа G называется минимальным, если оно имеет n вершин и минимальное число рёбер среди всех рёберных k -расширений графа G с n вершинами. В работе предлагается алгоритм построения всех неизоморфных минимальных рёберных k -расширений заданного графа без проверки на изоморфизм методами канонических представителей и Рида – Фараджева.



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





Ключевые слова: отказоустойчивость, отказы связей, расширение графа, изоморфизм, канонический код, метод канонических представителей, метод Риды – Фараджева.

Поступила в редакцию: 20.10.2019 / Принята: 02.12.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-105-115>

ВВЕДЕНИЕ

Под полной отказоустойчивостью технической системы понимается возможность системы продолжать работать при единичном или множественных отказах без существенной потери функциональных свойств. Отказы могут возникать в элементах системы или в связях между элементами. В 1976 г. John P. Hayes [1] предложил теоретическую модель для исследования полной отказоустойчивости дискретных систем с отказами элементов на языке теории графов. Позднее совместно с Frank Nagay модель была распространена на отказы связей между элементами [2]. Технической системе сопоставляется граф. Элементам системы соответствуют вершины графа, а связям между элементами — рёбра или дуги графа. Соответственно, граф системы будет неориентированный или ориентированный. В данной работе мы будем рассматривать неориентированные графы, хотя предлагаемые методы могут быть легко перенесены и на случай ориентированных графов. Под отказом связи между двумя элементами системы понимается удаление из графа системы соответствующего ребра. Формализацией отказоустойчивой реализации системы является расширение графа [3]. Основные необходимые определения по теории графов, которые используются далее, можно найти в работах [3, 4].

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется рёберным k -расширением (k – натуральное) графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый граф, получающийся из графа G^* удалением любых его k рёбер. Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ с n вершинами называется минимальным рёберным k -расширением (MP- k -P) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если граф G^* является рёберным k -расширением графа G и имеет минимально возможное число рёбер среди всех n -вершинных рёберных k -расширений графа G .

В работе [1] были предложены схемы построения MP-1-P для цепей и циклов. В работе [5] было доказано, что задача построения рёберных k -расширений является вычислительно сложной. Граф в общем случае может иметь несколько неизоморфных MP- k -P. В работе [6] был предложен алгоритм построения всех неизоморфных минимальных вершинных k -расширений методом канонических представителей. В этой статье будет рассмотрена задача построения всех неизоморфных минимальных рёберных k -расширений заданного графа. Будет рассмотрен переборный алгоритм построения всех MP- k -P, а также алгоритмы построения всех неизоморфных MP- k -P без проверки на изоморфизм. Напомним, что два графа, $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ и $G_2 = (V_2, \alpha_2)$, называются *изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное соответствие $\phi : V_1 \rightarrow V_2$, сохраняющее отношение смежности: $(u, v) \in \alpha_1 \leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in \alpha_2, \forall u, v \in V_1$. Инвариантом графа G называется его характеристика, одинаковая для всех изоморфных G графов. Примеры простейших инвариантов — порядок графа n (число вершин) или размер графа m (число рёбер). Инвариант называется полным, если его значения различаются для неизоморфных графов. Полный инвариант может использоваться для решения задачи изоморфизма графов, поэтому его вычисление не может быть эффективнее решения задачи об изоморфизме. На данный момент неизвестны эффективно вычисляемые полные инварианты графа. Один из полных инвариантов будет далее рассмотрен в работе.



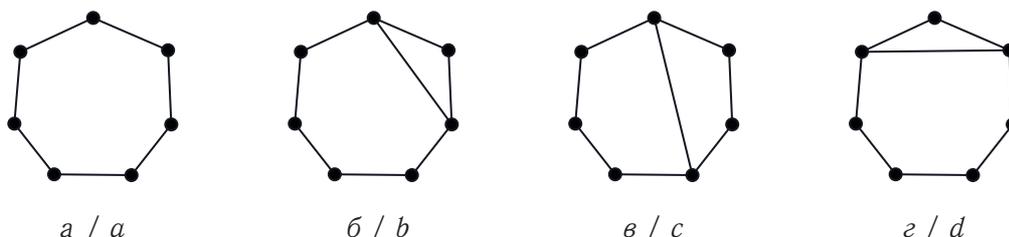
1. ПОСТРОЕНИЕ РЁБЕРНЫХ РАСШИРЕНИЙ ГРАФА

Для построения всех неизоморфных МР- k -Р в работе [3] был предложен общий переборный алгоритм.

Алгоритм 1. Построение всех МР- k -Р графа G .

1. $m := 0$.
2. Строим все графы, получающиеся из графа G добавлением m дополнительных рёбер.
3. Если на шаге 2 не построено ни одного графа, то завершить алгоритм, расширений не существует.
4. Выбираем среди построенных на шаге 2 графов рёберные k -расширения графа G .
5. Если на шаге 4 не было найдено графов, то присваиваем $m := m+1$ и переходим на шаг 2.
6. Среди графов, выбранных на шаге 4, оставляем по одному представителю от классов изоморфных графов. Полученные графы являются МР- k -Р графа G .

На практике шаги 2–4 могут быть совмещены. Рассмотрим идею работы алгоритма на примере построения минимального рёберного 1-расширения 7-вершинного цикла C_7 , изображенного на рисунке, а.



Цикл C_7 и графы, отличающиеся от него на 1 ребро
The cycle C_7 and graphs differing by 1 edge from it

На шаге 2 алгоритма необходимо добавить к циклу C_7 m рёбер, где $m = 1, 2, \dots$. Добавить $m = 1$ ребро к графу C_7 означает заменить один из нулей, расположенных в матрице смежности выше или ниже главной диагонали, на единицу. При непосредственном переборе всех вариантов это можно сделать C_{14}^m , т. е. 14 способами. Легко заметить, что на самом деле получится только 2 неизоморфных графа (на рис. — это графы б и г), все остальные будут изоморфны одному из них (на рис. графы б и в изоморфны). При $m = 2$ число способов будет 91, а неизоморфных графов — 10, при $m = 3$ соответственно 364 и 30. Далее каждый получившийся граф проверяется на шаге 4 — является ли он рёберным 1-расширением заданного графа. В общем случае для этого требуется проверить, что исходный граф допускает вложение в каждый граф, получающийся из очередного кандидата удалением одного ребра. Если хотя бы для одного графа не существует вложения графа C_7 , то исходный граф не является рёберным 1-расширением. Для того чтобы проверить, что граф не является МР- k -Р, можно использовать следующую лемму [3, 7].

Лемма 1. Если минимальная степень вершины графа G есть $d > 0$, то его МР- k -Р G^* не содержит вершин степени ниже $d + k$.

С помощью этой леммы для цикла C_7 можно установить, что в МР-1-Р не может быть вершин степени ниже 3. Как следствие, число дополнительных рёбер будет не меньше 4. В работе [1] доказывается, что МР-1-Р цикла имеет вектор степеней $(4, 3, \dots, 3)$ или $(3, \dots, 3)$ в зависимости от чётности числа вершин цикла. Число



вариантов при $m = 4$ составит 1001, из которых неизоморфных будет только 58, а неизоморфных графов, удовлетворяющих лемме 1 (т. е. графов с вектором степеней $(4, 3^6)$), всего 4. У цикла C_7 всего 2 неизоморфных МР-1-Р. Алгоритм 1 можно использовать для построения МР- k -Р графов с небольшим числом вершин [8].

Наметим основной путь для оптимизации алгоритма 1: на шаге 3 нужно оставлять как можно меньше кандидатов для последующей проверки на расширение на шаге 4. Далее в статье будет рассмотрено решение этой задачи. Для того чтобы снизить количество поисков вложений, при проверке графа на расширение можно использовать следующую лемму. Будем говорить, что у ребра $e = \{u, v\}$ графа H нет прообраза в графе G , если существует вложение ϕ графа G в граф H такое, что в графе G нет ребра между прообразами вершин u и v , т. е. между $\phi^{-1}(u)$ и $\phi^{-1}(v)$.

Лемма 2. Если ϕ — вложение графа G в граф H и рёбра e_1, e_2, \dots, e_m графа H не имеют прообразов, то ϕ будет являться вложением графа G в каждый граф, полученный удалением любых k рёбер графа H из данного набора, где $0 \leq k \leq m$.

У алгоритма 1 можно выделить несколько недостатков, связанных с избыточным перебором. Один из них состоит в следующем: если на шаге 2 могут появляться изоморфные графы, то необходимо хранить все построенные расширения, чтобы на шаге 6 исключить изоморфные копии. Если на шаге 2 строить только неизоморфные графы, то необходимость хранения всех построенных расширений исчезнет, а также уменьшится число графов, которые нужно будет проверять на расширение. Методы генерации без проверки на изоморфизм достаточно интенсивно исследуются для построения графов различного вида. Хороший обзор можно найти в работе [9]. Далее в статье будет описан метод канонических представителей для поставленной задачи построения МР- k -Р и рассмотрены его оптимизационные варианты.

2. МЕТОД КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ

Идея метода канонических представителей состоит в том, что выбирается некоторое правило, по которому из всех изоморфных графов один объявляется каноническим. В общем виде метод можно описать следующим образом [9]:

- 1) определяется способ кодирования графов;
- 2) среди всех кодов изоморфных графов выбирается канонический код (представитель);
- 3) порождаются все возможные коды графов;
- 4) порождённый граф принимается, если его код канонический, в противном случае исключается.

С использованием метода канонических представителей алгоритм 1 можно преобразовать в алгоритм 2.

Алгоритм 2. Построение всех МР- k -Р графа G без проверки на изоморфизм.

1. $m := 0$.
2. $m := m + 1$.
3. Строим все неизоморфные графы, получающиеся из графа G добавлением m рёбер.
4. Если на шаге 3 не построено ни одного графа, то завершить алгоритм, расширений не существует.
5. Выбираем среди построенных графов рёберные k -расширения графа G .
6. Если на шаге 5 не было найдено графов, то переходим на шаг 2.
7. Полученные на шаге 5 графы являются МР- k -Р графа G .



В алгоритме 2 при использовании метода канонических представителей не нужно проверять графы на изоморфизм. Также изменён порядок проверки: сначала находим все неизоморфные графы, а после проверяем, являются ли они рёберными k -расширениями или нет. Для правильности предложенного алгоритма необходимо, чтобы все канонические представители каждого класса изоморфных графов были построены на шаге 3. Для использования метода канонических представителей самым важным является выбор метода кодирования графа. Предлагается взять код, основанный на матрице смежности графа. Напомним, что для простых неориентированных графов матрица смежности симметрична относительно главной диагонали, а на главной диагонали расположены нули. Таким образом, матрица смежности полностью определяется своей частью, расположенной выше или ниже главной диагонали.

Определим способ кодирования графа. Рассмотрим два n -вершинных графа, $G = (Z_n, \alpha)$ и $H = (Z_n, \beta)$, где $Z_n = \{0, \dots, n-1\}$ и $\alpha, \beta \subseteq Z_n \times Z_n$. Для каждого графа составим матрицы смежности. Через G обозначим граф, для которого требуется найти МР- k -Р. Через H обозначим граф, для которого будем строить код. Число вершин в графах G и H равно n . Определим код $C_G(H)$ графа H следующим образом: будем дважды просматривать элементы матрицы смежности графа G , находящиеся ниже главной диагонали, по строкам слева направо и сверху вниз, выписывая соответствующие элементы матрицы смежности графа H по следующим правилам:

1) в первый раз выписываем элемент матрицы смежности графа H , если в матрице смежности графа G стоит 1;

2) во второй раз выписываем элемент матрицы смежности графа H , если в матрице смежности графа G стоит 0.

По построению очевидно, что код n -вершинного графа с m рёбрами будет иметь длину C_n^2 и содержать ровно m единиц. Будем называть граф H каноническим относительно G (либо просто каноническим) и его код каноническим, если среди всех графов, изоморфных H , код графа H является лексикографически наибольшим: $\{\forall R \cong H, R \neq H : C_G(R) < C_G(H)\}$. Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Если G является частью графа H , то $C_G(G) \leq C_G(H)$, иначе $C_G(G) > C_G(H)$.

Утверждение 2. Граф G вкладывается в граф H тогда и только тогда, когда существует $W \cong H$, такой, что $C_G(W) \geq C_G(G)$. Это означает, что если граф G вкладывается в граф H , то существует изоморфный ему канонический граф W : $C_G(W) \geq C_G(G)$.

Это значит, что канонического представителя класса изоморфизма каждого графа, в который вкладывается граф G , можно получить добавлением рёбер в граф G . Таким образом, алгоритм 2 является корректным.

Алгоритм 3. Построение всех неизоморфных графов, отличающихся от заданного графа G на m дополнительных рёбер, методом канонических представителей.

1. Начальным выбирается код $c = 1^p 0^{C_n^2 - p}$, список $R = \emptyset$.

2. Перебираем все варианты размещения m единиц в хвосте из 0 кода c . Если очередной получившийся код c' является каноническим, то добавляем c' в R .

Обычно при реализации метода канонических представителей нет необходимости перебирать всех возможных представителей. Если на некотором шаге известно, что последующие итерации не могут привести к каноническому представителю, то



можно произвести усечение перебора. Такая оптимизация называется методом Рида – Фараджера [9]. В нашем примере построение графов можно рассматривать как перебор кодов, которые начинаются с кода графа G и отличаются от него добавлением m единиц в тех позициях, где стоят 0. Можно не рассматривать те графы, которые заведомо не могут быть расширениями графа G , в том числе те, которые не удовлетворяют леммам. Докажем вспомогательное утверждение.

Теорема 1. Пусть граф H отличается от графа G на $m > 0$ рёбер и код графа H $C_G(H) = x_1x_2\dots x_k\underline{1}0\dots 0$ является каноническим. Тогда код $c' = x_1x_2\dots x_k\underline{0}0\dots 0$, получающийся из $C_G(H)$ заменой самой правой единицы на ноль, также будет каноническим.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и код

$$c' = x_1x_2\dots x_k\underline{0}0\dots 0$$

не является каноническим. Обозначим граф, соответствующий коду c' , через W . Тогда существует граф W' , изоморфный графу W , код которого $C_G(W')$ является каноническим и $C_G(W') > C_G(W)$. Обозначим через ϕ изоморфизм графа W' на граф W . Код графа H из условия получается из кода графа W добавлением одной единицы, т. е. граф H получается из графа W добавлением одного ребра. Пусть для определенности это будет ребро $\{u, v\}$. Построим граф H' , добавив к графу W' ребро $\{\phi(u), \phi(v)\}$. Очевидно, что ϕ будет изоморфизмом графа H на граф H' , но код графа H' будет меньше кода графа H , а это противоречит тому, что код графа H является каноническим. \square

Теорема 1 означает, что если на некотором шаге был получен код c , который не является каноническим, то нет необходимости перебирать коды, которые отличаются от полученного добавлением единиц в позициях, следующих за последней единицей кода c . Все эти коды по теореме 1 не будут каноническими. Это является основой для использования метода Рида – Фараджера.

Зафиксируем n -вершинный граф G , относительно которого и будем строить код графов. Построим дерево T_n всех n -вершинных графов следующим образом: пусть код графа равен $a_0a_1\dots a_k\underline{1}0\dots 0$, тогда его родительским узлом будет являться граф с кодом $a_0a_1\dots a_k\underline{0}0\dots 0$, т. е. код графа родительского узла получается заменой крайней правой 1 на 0. В таком дереве код родительского элемента всегда меньше, чем код любого его дочернего элемента.

По теореме 1 получим, что все n -вершинные канонические графы также образуют дерево T_n^C , которое будет являться поддеревом T_n . Из утверждения 1 получим, что поддерево T_G дерева T_n с корнем G — это все графы, которые могут быть получены из G добавлением рёбер, т. е. те графы, которые рассматриваются в алгоритме 1. По утверждению 2 и теореме 1, дерево T_G содержит поддерево T_G^C , которое состоит из всех канонических представителей графов, в которые граф G вкладывается. В алгоритме 4 представлен способ получения дочерних элементов произвольного узла H дерева T_G^C . Обозначим через $l(c)$ длину кода c , а через $c[i]$ — элемент кода в позиции i .

Алгоритм 4. Получение дочерних элементов узла H дерева T_G^C .

1. $c := C_G(H)$, $W = \emptyset$.
2. Вычислить i — номер крайней правой единицы в коде c .
3. $i := i + 1$.
4. Если $i = l(c)$, то результат W , завершить алгоритм.
5. $c[i] := 1$.



6. Если c — канонический код, то добавить соответствующий коду c граф в W .
7. $c[i] := 0$.
8. Перейти на шаг 3.

Далее с использованием алгоритма 4 можно реализовать метод Рида – Фараджева для построения МР- k -Р заданного графа.

Алгоритм 5. Построение всех МР- k -Р графа G обходом дерева.

1. $m := 0$, коды графов строятся на основе графа G .
2. $m := m + 1$.
3. Составить S — множество всех элементов дерева T_G^C на расстоянии m от G .
4. Убрать из S все графы, не являющиеся k -расширениями G по условию леммы 1.
5. Убрать из S все графы, не являющиеся k -расширениями G на основе проверки по определению.
6. Если в S остались графы, то они являются МР- k -Р, завершить алгоритм, иначе перейти на шаг 2.

В алгоритме 5 не сказано, каким именно методом необходимо составлять множество элементов дерева. Для этой цели можно использовать как обход в глубину, так и обход в ширину. У каждого из методов есть свои достоинства и недостатки. Если каждый раз использовать обход в глубину, начиная с корня, то некоторые узлы будут проверяться на каноничность несколько раз, что увеличит количество проверок каноничности. Если использовать обход в ширину, то необходимо хранить последний построенный уровень дерева T_G^C целиком, что увеличит расходы памяти до $O(2^{\frac{n(n-1)}{2}})$, но устранил лишние проверки. Для реализации алгоритма в программе был выбран обход в ширину.

Возможен также другой вариант использования метода Рида – Фараджева. Разместим проверку выполнения леммы 1 до проверки каноничности графа. Проверка леммы 1 выполняется за полиномиальное время — быстрее, чем проверка каноничности и проверка на расширение по определению. Данный метод описан в алгоритме 6.

Алгоритм 6. Построение всех МР- k -Р графа G .

1. $m := 0$, коды графов строятся на основе графа G .
2. $m := m + 1$.
3. Построить множество графов S , полученных из G добавлением m рёбер.
4. Удалить из S все графы, которые не являются рёберными k -расширениями графа G исходя из леммы 1.
5. Удалить из S все графы, которые не являются каноническими.
6. Удалить из S все графы, которые не являются расширениями графа G .
7. Если S пусто, то перейти на шаг 2, иначе S — множество всех неизоморфных МР- k -Р графа G .

Шаги 3–6 алгоритма 6 можно объединить и не хранить в памяти все графы, для чего необходимо иметь возможность их перечислять. При большом количестве вершин и малом количестве рёбер в графе G перебор всех графов осуществляется долго. Для ускорения можно осуществлять перебор с отсечением графов, которые не являются расширениями по лемме 1, а также заведомо не являются каноническими. Для этого составляется множество пар следующего вида: $(t, \{e_j^1, \dots, e_j^p\})$, это означает, что при переборе необходимо добавить как минимум t рёбер из множества $\{e_j^1, \dots, e_j^p\}$. Пусть требуется найти МР- k -Р n -вершинного графа G , тогда множество пар будет составляться так.

1. Если в G минимальная степень $d > 0$, то для каждой вершины u графа H со



степенью $d(u) < d + k$ составляются следующие пары:

$$(w = d + k \checkmark d(u), W = u, v_1^u, \dots, u, v_{n+k-d(v)-1}^u),$$

где v_i^u — не смежные с v вершины. Данные пары нужны для отсечения всех графов, не удовлетворяющих лемме 1.

2. Пара $(1, W)$, где W — множество тех рёбер, при добавлении одного из которых в H получается канонический граф. Данная пара отсекает некоторое количество неканонических графов по условию из теоремы 1.

Отметим, что данный перебор может использоваться и в алгоритме 1. Так как канонический представитель каждого класса не может быть отсечён при переборе на основании выбора элемента из второй группы, то для каждого класса изоморфизма, представители которого будут являться расширениями, при переборе будет присутствовать хотя бы один элемент из каждой группы изоморфных графов.

3. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ, ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

На языке C++ с использованием MPI были реализованы алгоритмы 1, 5 и 6. На вход программы графы подавались в формате graph6, который представляет собой закодированную специальным образом часть матрицы смежности графа, расположенную выше главной диагонали [10]. Этот формат является основным в пакете nauty [11], который использовался для генерации графов. Было замечено, что результаты существенно зависят от нумерации вершин графа. Для графа с лексикографически наибольшим значением кода graph6 среди всех изоморфных ему графов время подсчёта MP- k -P обычно существенно меньше, чем у изоморфного ему графа, сгенерированного программой geng из пакета nauty. Так, например, при использовании алгоритма 6 для 12-вершинного цикла время построения MP-1-P отличалось примерно в 228 раз, а для 10-вершинного — примерно в 30 раз. Время подсчёта MP-1-P 9-вершинных графов алгоритмом 6 уменьшилось приблизительно в 72 раза. Этот вопрос требует дополнительного исследования и выходит за рамки данной работы. Во всех описываемых далее экспериментах использовались коды графов, сгенерированные программой geng в режиме по умолчанию.

На практике в алгоритмах 2, 5 и 6 не нужно хранить все графы, полученные добавлением k рёбер, и канонические графы в памяти. Достаточно иметь возможность перечислять графы и выбирать из них канонические. В таком случае достаточно $O(n^2)$ памяти для реализации данного алгоритма (хранение матрицы смежности графа). Вычислительная сложность каждого из описанных алгоритмов экспоненциальна.

В табл. 1 и 2 показано сравнение времени вычисления MP-1-P и MP-2-P графов с заданным количеством вершин. Для построения всех графов с заданным числом вершин использовался генератор geng из пакета nauty [11]. Вычисления выполнялись на кластере Поволжского регионального центра новых информационных технологий (ПРЦ НИТ) [12]. В вычислениях было задействовано 40 ядер. Полученные в рамках вычислительного эксперимента результаты были добавлены в энциклопедию «Мир графов» [13]. В реализациях были учтены приведённые ранее леммы.



Таблица 1 / Table 1

Время подсчёта МР-1-Р всех графов с заданным числом вершин n
 Counting time МР-1-Р of all graphs with a given number of vertices n

| n | Всего графов Total Counts | Алгоритм 1 Algorithm 1 | Алгоритм 5 Algorithm 5 | Алгоритм 6 Algorithm 6 |
|-----|------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1–7 | 1249 | < 1 с. | < 1 с. | < 1 с. |
| 8 | 12 346 | 13 с. | 6 с. | 6 с. |
| 9 | 274 668 | 1 ч. 7 м. | 1 ч. 3 м. | 59 м. |

Таблица 2 / Table 2

Время подсчёта МР-2-Р всех графов с заданным числом вершин n
 Counting time МР-2-Р of all graphs with a given number of vertices n

| n | Всего графов Total Counts | Алгоритм 1 Algorithm 1 | Алгоритм 5 Algorithm 5 | Алгоритм 6 Algorithm 6 |
|-----|------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1–7 | 1249 | < 1 с. | < 1 с. | < 1 с. |
| 8 | 12 346 | 2 м. 38 с. | 17 с. | 16 с. |
| 9 | 274 668 | 1 д. 12 ч. | 3 ч. 38 м. | 3 ч. 9 м. |

Можно отметить прирост скорости построения МР- k -Р для алгоритма 2 по сравнению с алгоритмом 1. Заметим, что лемма 2 даёт небольшую прибавку в скорости к алгоритмам 5 и 6 и достаточно существенную к алгоритму 1.

Для оценки вычислительной сложности каждой из частей программы были проведены замеры времени выполнения некоторых особо важных её частей. Основное время в среднем ожидаемо занимает проверка графа на расширение или каноничность. Проверка каноничности происходит быстрее, чем проверка на расширение, поэтому алгоритм 1, в котором основным действием является проверка на расширение, уступает остальным алгоритмам. Особенно это заметно при подсчёте МР-2-Р, так как задача проверки каноничности не усложняется, а в задаче проверки графа на расширение увеличивается количество поисков вложения. Следует отметить, что использование леммы 2 существенно улучшает время построения МР-2-Р графа по алгоритму 1. Например, время построения МР-2-Р всех 9-вершинных графов сокращается более чем вдвое: с 3 дней 8 часов до 1 дня 12 часов. Для остальных алгоритмов лемма 2 не даёт такого результата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были описаны алгоритмы построения всех минимальных рёберных k -расширений для заданного графа с помощью методов канонических представителей и Рида – Фараджева. Алгоритмы были реализованы на языке С++ с использованием технологии МРІ и протестированы на кластере Поволжского регионального центра новых информационных технологий. Сравнения данных алгоритмов с обычным алгоритмом и друг с другом показали преимущества и недостатки каждого из них.

Библиографический список

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Computers. 1976. Vol. C-25, № 9. P. 875–884. DOI: <https://doi.org/10.1109/TC.1976.1674712>
2. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // Networks. 1993. Vol. 23. P. 135–142. DOI: <https://doi.org/10.1002/net.3230230207>



3. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.
4. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 1997. 368 с.
5. *Абросимов М. Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки. 2010. Т. 88, вып. 5. С. 643–650. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8403>
6. *Абросимов М. Б., Камил И. А. К., Лобов А. А.* Построение всех неизоморфных минимальных вершинных расширений графа методом канонических представителей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, вып. 4. С. 479–486. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-479-486>
7. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения графов // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Томск : ИД Том. гос. ун-та, 2000. С. 59–64.
8. *Абросимов М. Б.* Минимальные расширения 4-, 5-, 6- и 7-вершинных графов. Саратов. гос. ун-т. Саратов, 2000. 26 с. ; Деп. в ВИНТИ 06.09.2000, № 2352-В00.
9. *Brinkmann G.* Isomorphism rejection in structure generation programs // Discrete Mathematical Chemistry, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 2000. Vol. 51. P. 25–38. DOI: <https://doi.org/10.1090/dimacs/051/03>
10. *McKay B. D.* Graph formats. URL: <http://users.cecs.anu.edu.au/bdm/data/formats.html> (дата обращения: 01.05.2019).
11. *McKay B. D., Piperno A.* Practical Graph Isomorphism, II // Journal of Symbolic Computation. 2014. Vol. 60. P. 94–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2013.09.003>
12. Поволжский региональный центр новых информационных технологий : [сайт]. URL: <http://prcnit.sgu.ru> (дата обращения: 01.05.2019).
13. Мир графов. URL: <http://graphworld.ru> (дата обращения: 01.05.2019).

Образец для цитирования:

Абросимов М. Б., Судани Х. Х. К., Лобов А. А. Построение минимальных рёберных расширений графа без проверки на изоморфизм // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 105–115. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-105-115>

Construction of All Minimal Edge Extensions of the Graph with Isomorphism Rejection

M. B. Abrosimov, H. H. K. Sudani, A. A. Lobov

Mikhail B. Abrosimov, <https://orcid.org/0000-0002-4473-8790>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, mic@rambler.ru

Hayder H. K. Sudani, <https://orcid.org/0000-0002-9502-2952>, Ministry of Science and Technology of Iraq, Baghdad, Iraq; Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, hayder.1977@mail.ru

Alexander A. Lobov, <https://orcid.org/0000-0003-3422-3811>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, aisaneka@mail.ru

In 1993 Frank Harary and John P. Hayes proposed a graph model for investigating edge fault tolerance of discrete systems. The technical system is mapped to a graph. The elements of the system correspond to the vertices of the graph, and links between the elements correspond to edges or arcs of the graph. Failure of a system element refers to the removal of the corresponding vertex from the system graph along with all its edges. The formalization of a fault-tolerant system



implementation is the extension of the graph. The graph G^* is called the edge k -extension of the graph G if, after removing any k edges from the graph G^* result graph contains the graph G . The edge k -extension of a graph G is called minimal if it has the least number of vertices and edges among all edge k -extensions of a graph G . An algorithm for constructing all nonisomorphic minimal edge k -extensions of a given graph using methods of canonical representatives and Read–Faradjev are proposed.

Keywords: fault tolerance, edge fault tolerance, graph extension, isomorphism rejection, canonical form, method of generating canonical representatives, Read-Faradjev-type orderly algorithm.

Received: 20.10.2019 / Accepted: 02.12.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

References

1. Hayes J. P. A Graph Model for Fault-tolerant Computing System. *IEEE Trans. Computers*, 1976, vol. C-25, no. 9, pp. 875–884. DOI: <https://doi.org/10.1109/TC.1976.1674712>
2. Harary F., Hayes J. P. Edge Fault Tolerance in Graphs. *Networks*, 1993, vol. 23, pp. 135–142. DOI: <https://doi.org/10.1002/net.3230230207>
3. Abrosimov M. B. *Grafovye modeli otkazoustoichivosti* [Fault tolerance graph models]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2012. 192 p. (in Russian).
4. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997. 384 p. (in Russian).
5. Abrosimov M. B. On the Complexity of Some Problems Related to Graph Extensions. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, iss. 5, pp. 619–625. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434610110015>
6. Abrosimov M. B., Kamil I. A. K., Lobov A. A. Construction of All Nonisomorphic Minimal Vertex Extensions of the Graph by the Method of Canonical Representatives. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, iss. 4, pp. 479–486 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-479-486>
7. Abrosimov M. B. Minimal graph extensions. In: *Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii diskretnykh struktur* [New information technologies in the study of discrete structures]. Tomsk, Izdatel'skii dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, 2000, pp. 59–64 (in Russian).
8. Abrosimov M. B. *Minimal'nye rasshireniia 4-, 5-, 6- i 7-vershinnykh grafov* [Minimal extension of graphs with 4, 5, 6 and 7 vertices]. Saratov State University. Saratov, 2000, 26 p.; VINITI 06.09.2000, no. 2352-B00 (in Russian).
9. Brinkmann G. Isomorphism rejection in structure generation programs. *Discrete Mathematical Chemistry, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2000, vol. 51, pp. 25–38. DOI: <https://doi.org/10.1090/dimacs/051/03>
10. McKay B. D. *Graph formats*. Available at: <http://users.cecs.anu.edu.au/bdm/data/formats.html> (accessed 1 May 2019).
11. McKay B. D., Piperno A. Practical Graph Isomorphism, II. *Journal of Symbolic Computation*, 2014, vol. 60, pp. 94–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2013.09.003>
12. Volga Regional Center for New Information Technologies. Site. Available at: <http://prenit.sgu.ru> (accessed 1 May 2019) (in Russian).
13. *Mir grafov* (Graph World). Available at: <http://graphworld.ru> (accessed 1 May 2019) (in Russian).

Cite this article as:

Abrosimov M. B., Sudani H. H. K., Lobov A. A. Construction of All Minimal Edge Extensions of the Graph with Isomorphism Rejection. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 105–115 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-105-115>



УДК 519.688+004.942

Исследование статистических характеристик текста на основе графовой модели лингвистического корпуса

Е. Г. Григорьева, В. А. Клячин

Григорьева Елена Геннадиевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет, Россия, 400062, г. Волгоград, Университетский пр-т, д. 100, e_grigoreva@volsu.ru

Клячин Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет, Россия, 400062, г. Волгоград, Университетский пр-т, д. 100; Калмыцкий государственный университет имени Б. Б. Городовикова, Россия, Республика Калмыкия, 358000, г. Элиста, ул. Пушкина, д. 11 klyachin.va@volsu.ru

Статья посвящена исследованию статистических характеристик текста, которые вычисляются на базе графовой модели представления текста из лингвистического корпуса. Во введении излагается актуальность статистического анализа текстов и приводятся некоторые задачи, решаемые с помощью такого анализа. Предлагаемая в статье графовая модель текста строится как граф, в вершинах которого расположены слова текста, а ребра графа отражают факт попадания двух слов в какую-либо часть текста, например в предложение. Для вершин и ребер графа в статье вводятся понятия веса как значения из некоторой аддитивной полугруппы. Доказываются формулы вычисления графа и его весов при конкатенации текстов. На основе предложенной модели реализуются вычисления на языке программирования Python. Для экспериментального исследования статистических характеристик выделяются 24 величины, которые выражаются через веса вершин, ребер графа, а также других характеристик графа, например степени его вершин. Надо отметить, что целью численных экспериментов является поиск характеристик текста, с помощью которых можно определять, является ли текст созданным человеком или случайно сгенерированным. В статье предлагается один из возможных таких алгоритмов, который генерирует случайный текст, используя некоторый созданный человеком другой текст в качестве шаблона. При этом в случайном тексте сохраняется последовательность чередования частей речи вспомогательного текста. Оказывается, что требуемым условиям удовлетворяет медианное значение отношения величины веса ребра графа текста к числу предложений в тексте.

Ключевые слова: текст, лингвистический корпус, граф, автоматическая обработка текста.

Поступила в редакцию: 28.02.2019 / Принята: 19.05.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-116-126>

ВВЕДЕНИЕ

В работе предложена модель лингвистического корпуса на основе графа отношений принадлежности слов семантическим или синтаксическим единицам



текста. Из весовых значений вершин и ребер этого графа могут быть получены статистические данные, позволяющие решать различные актуальные задачи лингвистики: извлечение ключевых слов, оценка сочетаемости слов, тематическое моделирование лингвистических корпусов, построение конкордансов и т. д. А также предложенная модель может быть взята за основу вычисления признаков текстов для применения в исследованиях, опирающихся на методы машинного обучения. Приведены алгебраические свойства графовой модели, позволяющие вычислять весовые параметры вершин и ребер графа при склеивании (конкатенации) текстов или объединении текстов в единый корпус. Предложенная модель, в отличие от часто используемой модели «мешка слов», позволяет использовать определенную структуру текста, закладываемую в модель в зависимости от способа его разбиения, при применении статистических методов анализа. Использование таких методов достаточно распространено и применяется при решении ряда задач компьютерной корпусной лингвистики. Например, в работе [1] описывается процесс автоматической обработки текстового корпуса, собранного из новостных лент ряда интернет-сайтов, для создания вероятностной n -граммной модели разговорного русского языка. Приводится статистический анализ данного корпуса, даются результаты по подсчету частоты появления различных n -грамм слов. В работе [2] статистическими методами в рамках модели «мешка слов» с применением наивного байесовского классификатора исследуется возможность ранжирования русскоязычных текстов по их эмоциональной тональности в соответствии с классификацией Г. Левхейма. В работе [3] рассматриваются алгоритмы определения семантической близости ключевых слов: алгоритм Гинзбурга, основанный на частотных характеристиках слов, и его программная реализация, а также алгоритм с учетом частей речи и проблемы его реализации. В работе [4] предлагается рассматривать статистические параметры текста в качестве авторской характеристики, используя различные информационные и программные средства. Отметим также работы [5, 6], в которых предлагаются методы машинного обучения и соответствующие модели векторного представления лингвистических текстов для решения различных задач компьютерной лингвистики.

Отметим, что описываемая в настоящей статье графовая модель обобщает упомянутую выше модель «мешка слов» и содержит необходимую информацию для анализа текста, к примеру, методами законов Зипфа. Напомним, что классические законы Зипфа используют статистику отдельных слов текста для определения его осмысленности. В первом законе Зипфа утверждается, что ранг частоты слова (т. е. номер частоты в отсортированном по убыванию массиве частот) убывает обратно пропорционально рангу. Второй закон Зипфа утверждает, что количество слов с заданной частотой экспоненциально убывает относительно частоты в упорядоченном по возрастанию массиве частот. Экспериментально проверено выполнение этих законов для текстов, написанных человеком, — осмысленных текстов. Однако не сложно предложить конструкцию, которая позволяет сгенерировать бессмысленный текст с выполнением указанных законов. Коротко опишем эту конструкцию. По заданному тексту создается словарь слов и вычисляются их частоты. Далее моделируется случайная величина (номер слова в словаре), имеющая такое же распределение, как и слова в заданном тексте. Соответствующий дискретный случайный процесс будет генерировать случайный текст, статистически близкий к тексту, полученному перемешиванием слов исходного текста. При перемешивании осмысленность текста исчезнет. Таким образом, законы Зипфа в рамках модели «мешка слов» не позволяют отличить тексты, которые могут быть сгенерированы указанным способом.



В настоящей статье предложена графовая модель текста и дано экспериментальное подтверждение того, что в рамках этой модели могут быть вычислены такие характеристики исходного текста, которые способны отличать данные тексты от текстов, которые генерируются не только вышеуказанным способом, но и рядом других способов, описываемых ниже.

1. ОПИСАНИЕ ГРАФОВОЙ МОДЕЛИ

Алфавитом будем называть произвольное конечное множество Σ . Элементы множества Σ будем называть символами. Упорядоченный набор символов назовем словом или цепочкой символов. Множество всех цепочек символов алфавита Σ обозначим через Σ^* . Текстом будем называть упорядоченный набор символов и записывать его в виде

$$T = a_1 a_2 \dots a_n, \quad a_i \in \Sigma, \quad n = |T|.$$

Здесь и далее через $|X|$ обозначим мощность множества X — количество элементов множества X . Если T_1, T_2 — два текста, то через $T_1 \cdot T_2$ будем обозначать текст, склеенный из двух данных текстов (конкатенация текстов). Через 2^X будем обозначать множество всех подмножеств множества X . Некоторую совокупность текстов будем называть *корпусом*. Для построения графовой модели нам необходимо понятие разбиения текста, под которым будем понимать произвольное подмножество $P \subset 2^N$ упорядоченных подмножеств множества $N = \{1, 2, 3, \dots, |T|\}$. Каждое такое подмножество определяется набором кортежей номеров $(i_1, \dots, i_k) \in P$ входящих в него символов. Примерами таких разбиений могут быть разбиение текста на слова, разбиение текста на предложения и разбиение текста на m -граммы.

Пусть $I \in P$. Построим отображение $\omega : P \rightarrow \Sigma^*$

$$\omega(I) = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad i_j \in I, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Это отображение сопоставляет набору номеров символов соответствующую часть текста в виде цепочки символов.

Пример 1. Зафиксируем произвольный символ $s \in \Sigma$. Для заданного текста T пусть найдутся номера $1 = i_0 < i_1 < \dots < i_k < i_{k+1} = |T|$ такие, что $a_{i_j} = s$. Тогда

$$P_s = [(i_0, \dots, i_1 - 1), (i_1 + 1, \dots, i_2 - 1), \dots, (i_k + 1, \dots, |T|)]$$

представляет собой разбиение текста с помощью разделителя $s \in \Sigma$.

Пример 2. Для заданного разбиения вида P_s и произвольного натурального m можно построить разбиение вида

$$P_{s,m} = \omega_1 \cup \dots \cup \omega_m \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_{m+1} \cup \dots \cup \omega_{k+m-2} \cup \dots \cup \omega_k,$$

где

$$\omega_j = (i_{j-1} + 1, \dots, i_j - 1), \quad j = 1, \dots, k, \quad \omega_{k+1} = (i_k + 1, \dots, i_{k+1}).$$

Данное разбиение представляет собой разбиение m -грамм, а словами служат части ω_j исходного разбиения.

По определению будем считать, что разбиение P' является более мелким, чем разбиение P'' , и записывать $P' \subset P''$, если для всякого $I' \in P'$ найдется такое $I'' \in P''$, что $I' \subset I''$. Для двух заданных текстов T_1, T_2 с соответствующими разбиениями P_1, P_2 определим разбиение $P = P_1 \circ P_2$ для текста $T_1 \cdot T_2$ следующим образом:

$$P_1 \circ P_2 = \{I \subset (1, 2, \dots, |T_1| + |T_2|) : I = I_1 \subset P_1 \text{ или } I = \{i + |T_1| : i \in I_2 \in P_2\}\}.$$



Теорема 1. Совокупность всех текстов и их разбиений (T, P) образует полугруппу с групповой операцией

$$(T_1, P_1) + (T_2, P_2) = (T_1 \cdot T_2, P_1 \circ P_2).$$

Доказательство. Единственное, что требуется проверить, — это ассоциативность введенной выше операции. Рассмотрим три текста с какими-либо разбиениями (T_i, P_i) , $i = 0, 1, 2$. Ясно, что

$$(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3).$$

Обозначим $P_2 \circ P_3 = P'_2$, $T_2 \cdot T_3 = T'_2$. По определению имеем

$$\begin{aligned} P_1 \circ (P_2 \circ P_3) &= \{I \subset (1, 2, \dots, |T_1| + |T'_2|) : I = I_1 \subset P_1, \\ \text{или } I &= \{i + |T_1| : i \in I'_2, I'_2 \in P'_2\} \} = \{I \subset (1, 2, \dots, |T_1| + |T_2| + |T_3|) : I = I_1 \subset P_1, \\ \text{или } I &= \{i + |T_1| : i \in I_2, I_2 \in P_2, \text{ или } i \in \{j + |T_2|, j \in I_3, I_3 \in P_3\}\} \}. \end{aligned}$$

Так, элементы $I \in P_1 \circ (P_2 \circ P_3)$ имеют один из трех видов

$$I \in P_1, \quad I = \{i + |T_1|, i \in I_2, I_2 \in P_2\}, \quad I = \{j + |T_1| + |T_2|, j \in I_3, I_3 \in P_3\}.$$

Не сложно проверить, что мы получим тот же результат для $I \in (P_1 \circ P_2) \circ P_3$. Так, окончательно

$$(T_1, P_1) + ((T_2, P_2) + (T_3, P_3)) = ((T_1, P_1) + (T_2, P_2)) + (T_3, P_3).$$

Что и требовалось доказать. □

Для заданного текста T и его разбиения P обозначим через $U(T, P) = \{\omega(I) : I \in P\}$ совокупность уникальных частей разбиения. Например, в случае разбиения текста на слова это множество представляет собой совокупность уникальных слов текста. Рассмотрим текст T и два его произвольных разбиения $P' \subset P''$. Построим граф $G = G(T, P', P'')$ с множеством вершин $VG = U(T, P')$ и множеством ребер

$$EG = \{(a, b), a, b \in U(T, P') : \exists I \in P'', I_a, I_b \subset I, \text{ где } \omega(I_a) = a, \omega(I_b) = b\}.$$

Этот граф представляет отношение принадлежности пары частей текста одного разбиения одной части другого разбиения. Например, ребру графа с вершинами в виде уникальных слов текста соответствует пара слов, которые встречаются в каком-либо одном предложении. Непосредственно можно проверить следующую ключевую формулу для построения графа при склеивании двух текстов.

Теорема 2. Пусть имеются тексты T_1, T_2 с соответствующими разбиениями $P'_i \subset P''_i$, $i = 1, 2$. Тогда имеет место равенство

$$G(T_1 \cdot T_2, P'_1 \circ P'_2, P''_1 \circ P''_2) = G(T_1, P'_1, P''_1) \cup G(T_2, P'_2, P''_2). \quad (1)$$

Доказательство. Заметим, что $VG(T_1 \cdot T_2, P'_1 \circ P'_2, P''_1 \circ P''_2) = U(T_1 \cdot T_2, P_1 \circ P_2) = U(T_1, P_1) \cup U(T_2, P_2) = VG(T_1, P_1) \cup VG(T_2, P_2)$. Далее, если имеется ребро из $e \in EG(T_1 \cdot T_2, P'_1 \circ P'_2, P''_1 \circ P''_2)$, то существует пара частей w_1, w_2 из $P'_1 \circ P'_2$, входящая в $P''_1 \circ P''_2$. Предположим, что ребро (w_1, w_2) не принадлежит ни $EG(T_1, P'_1, P''_1)$, ни $EG(T_2, P'_2, P''_2)$. Это может быть, только если они не попали ни в одну из частей P''_1



и ни в одну из частей P_2'' . Поскольку при конкатенации текстов части P_1'' , P_2'' объединяются, то пара не попадает ни в одну часть из $P_1'' \circ P_2''$. Получили противоречие. Теорема доказана. \square

Формула (1) позволяет строить граф G объединения двух и более текстов целого лингвистического корпуса для последующего анализа статистических величин, связанных с весами вершин и ребер этого графа. Мы рассмотрим наиболее общий случай весовых значений. Это позволит выполнить обобщенную реализацию вычисления весов при конкатенации текстов.

Рассмотрим некоторую аддитивную полугруппу W . Вес для графа w — это отображение, сопоставляющее каждой вершине графа или каждому ребру графа значения из полугруппы W

$$w : VG \rightarrow W \quad \text{или} \quad w : EG \rightarrow W.$$

Введение весовой функции для построенного графа объясняется тем, что в корпусной лингвистике распространены статистические методы решения разнообразных задач. Весовая функция и призвана производить вычисление соответствующих статистических величин. Для вершин графа $G(T, P', P'')$ определим следующее множество:

$$B(v) = \{J \in P'' : \exists \alpha, \beta \in \Sigma^*, \omega''(J) = \alpha v \beta\}.$$

Другими словами, $B(v)$ — подмножество разбиения P'' , которому соответствуют части текста, содержащие цепочку v .

Пример 3. Пусть $W = \mathbb{N}$ множество натуральных чисел. Для $v \in VG$ и $G = G(T, P', P'')$ положим $w'(v) = |\omega'^{-1}(v)|$, $w''(v) = |B(v)|$.

Первая функция вычисляет количество вхождений уникальной части текста v разбиения P' в тексте T , а вторая функция вычисляет количество частей текста разбиения P'' , содержащих v . Пусть \mathbb{Z}_m обозначает циклическую группу порядка $m \in \mathbb{N}$. На множестве подмножеств множества \mathbb{Z}_m введем операцию «+» следующим образом:

$$I_1 + I_2 = \text{sort}(I_1 \cup I_2), \quad I_1, I_2 \in 2^{\mathbb{Z}_m},$$

как результат композиции объединения и сортировки. Положим $m = |P''|$. Упорядочим каким-нибудь образом множество P'' . Тогда каждому $J \in P''$ можно сопоставить некоторый номер $n(J) \in \mathbb{Z}_m$, а множеству $B(v)$ — некоторое подмножество $I \subset \mathbb{Z}_m$. Введенная выше операция делает множество $2^{\mathbb{Z}_m}$ полугруппой. Тогда можно положить

$$w^m(v) = B(v) \in 2^{\mathbb{Z}_m}.$$

Данная весовая функция строит упорядоченные списки номеров частей текста разбиения P'' , содержащие уникальную часть текста v разбиения P' .

Определив некоторые весовые функции, которые вычисляют конкретные характеристики текста, необходимо научиться преобразовывать веса при операции склеивания текстов. Для двух текстов T_1, T_2 и соответствующих весовых функций $w_i : VG(T_i, P'_i, P''_i) \rightarrow W$ определим весовую функцию

$$w(v) = \begin{cases} w_1(v), & \text{если } v \in U(T_1, P'_1) \setminus U(T_2, P'_2), \\ w_2(v), & \text{если } v \in U(T_2, P'_2) \setminus U(T_1, P'_1), \\ w_1(v) + w_2(v), & \text{если } v \in U(T_2, P'_2) \cap U(T_1, P'_1), \end{cases}$$



Эта формула позволяет вычислять весовую функцию для результата склейки двух текстов при условии, что значения весовых функций двух текстов принадлежат одному множеству. Получим также формулу для случая, когда эти множества разные. Пусть m_1, m_2 — два натуральных числа. Ясно, что $2^{\mathbb{Z}_{m_1}} \subset 2^{\mathbb{Z}_{m_1+m_2}}$. Пусть $I_1 \in 2^{\mathbb{Z}_{m_1}}, I_2 \in 2^{\mathbb{Z}_{m_2}}$. Положим

$$I_1 \oplus I_2 = \{(i_1, \dots, i_k, j_{1+m_1}, \dots, j_{l+m_1}) : (i_1, \dots, i_k) \in I_1, (j_1, \dots, j_l) \in I_2\}.$$

Непосредственным вычислением проверяется свойство ассоциативности

$$(I_1 \oplus I_2) \oplus I_3 = I_1 \oplus (I_2 \oplus I_3).$$

Приведем пример весовой функции, которая может иметь определенное значение при исследовании лингвистического корпуса. Предположим, что имеются два текста $T_i, i = 1, 2$ с некоторыми разбиениями $P'_i \subset P''_i, i = 1, 2$ и две весовые функции $w_i : VG(T_i, P'_i, P''_i) \rightarrow W_i$, где $W_i = 2^{\mathbb{Z}_{m_i}}$, где $m_i = |P''_i|$. Требуемую функцию построим следующим образом:

$$w(v) = \begin{cases} w_1(v), & \text{если } v \in U(T_1, P'_1) \setminus U(T_2, P'_2), \\ \emptyset \oplus w_2(v), & \text{если } v \in U(T_2, P'_2) \setminus U(T_1, P'_1), \\ w_1(v) \oplus w_2(v), & \text{если } v \in U(T_2, P'_2) \cap U(T_1, P'_1). \end{cases}$$

Приведем теперь пример весовой функции для ребер графа $G = G(T, P', P'')$. Обозначим $m = |P''|$. Пусть $e = (v_1, v_2) \in EG$. Примерами весовых функций могут быть функции

$$w(e) = |w^m(v_1) \cap w^m(v_2)|, \quad \text{или} \quad w(e) = w^m(v_1) \cap w^m(v_2).$$

Первая функция вычисляет количество вхождений пары (v_1, v_2) в одну часть разбиения P'' , вторая функция перечисляет все такие части разбиения P'' . Заметим, что эти функции могут быть вычислены через соответствующие весовые функции вершин графа.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФОВОЙ МОДЕЛИ

Графовая модель текста была реализована на языке программирования Python. Реализация включает в себя четыре основных класса: `TEXT`, `PARTITION`, `STATISTICS`, `GRAPH`. Первые два представляют текст так таковой и его различные разбиения. Класс `GRAPH` хранит структуру графа текста по его разбиениям $P' \subset P''$. Наконец, класс `STATISTICS` вычисляет статистические характеристики текста на построенном графе. В экспериментах использовались разбиения P' — на слова, P'' — на предложения. Анализ проводился на базе текстов художественной литературы русских классиков.

Все эксперименты посвящены исследованию характеристик текста, по которым возможно отличать текст, написанный человеком, от текста, случайно построенного на том же наборе слов, что и исходный текст. Ниже мы приводим общую схему генерации такого текста.

Рассмотрим произвольный текст и извлечем из него слова, из которых составим словарь. В предыдущем разделе этот словарь обозначается через $U(T, P')$. Для каждого элемента словаря вычислим частоту появления соответствующего слова в тексте. Эту частоту будем принимать в качестве вероятности слова в тексте. Рассмотрим несколько моделей случайного текста.



В первой модели в словарь добавим специальное слово — символ разделителя предложений. После этого на каждой итерации процесса построения текста разыгрывается случайная величина, распределение которой совпадает с распределением слов исходного текста. При этом значением данной случайной величины можно считать номер слова в словаре. По этому случайному номеру находится слово и добавляется в текст. Заметим, что статистически этот процесс эквивалентен простому случайному перемешиванию слов и разделителей предложений исходного текста.

Во второй модели мы также добавим символ разделителя предложений. Каждому слову в словаре добавим некоторый его морфологический признак. Это может быть, например, часть речи — существительное, прилагательное, глагол, наречие и т. д. Процесс построения нового текста читает исходный текст и заменяет каждое слово случайным словом с тем же морфологическим признаком, что и текущее слово. Заметим, что эта модель статистически эквивалентна случайному перемешиванию слов исходного текста, в котором перемешивание осуществляется по слоям морфологических признаков. При этом сохраняется структура каждого предложения текста: последовательность морфологических признаков слов предложения сохраняется. Ясно, что эта вторая модель случайного текста является частным случаем первой модели.

Введем следующие обозначения. Через $L(v)$, $v \in VG$ обозначим последовательность значений весов ребер, инцидентных вершине v , через $\deg(v)$ обозначим степень вершины v , через $\theta(e)$ обозначим вес ребра $e \in EG$, наконец, через $\sigma(T)$ обозначим число предложений текста T — или, другими словами, число элементов разбиения P'' . Далее для всякой конечной последовательности $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ введем обозначения $\max(x)$, $\text{mean}(x)$, $\text{median}(x)$ для максимального, среднего и медианного значения в x . Для текста T обозначим соответствующие последовательности:

$$\begin{aligned} d(T) &= \{d(v), v \in VG\}, & \theta(T) &= \{\theta(e), e \in EG\}, \\ \theta_s(T) &= \{\theta(e)/\sigma(T), e \in EG\}, & d_{mx}(T) &= \{\max(L(v)), v \in VG\}, \\ d_{mn}(T) &= \{\text{mean}(L(v)), v \in VG\}, & d_{mdn}(T) &= \{\text{median}(L(v)), v \in VG\}. \end{aligned}$$

Отметим, что распределение величины степеней вершин случайного графа [7–9] является предметом теоретического исследования и имеет практическое применение, например, при анализе графовой структуры сети Интернет. При этом предполагается, что степени имеют плотность распределение Парето $p(x) = x^{-t}$ [10, 11].

В качестве числовых признаков текстов для исследования мы рассматриваем следующие характеристики графа $G(T, P', P'')$:

- среднее значение степени вершин графа, $\text{mean}(d(T))$;
- максимальное значение степени вершин графа, $\max(d(T))$;
- медианное значение степени вершин графа, $\text{median}(d(T))$;
- среднее значение весов ребер графа, $\text{mean}(\theta(T))$;
- максимальное значение весов ребер графа, $\max(\theta(T))$;
- медианное значение весов ребер графа, $\text{median}(\theta(T))$.

Кроме этих величин будем также рассматривать следующие характеристики:

$$\begin{aligned} &\max(\theta_s(T)), \quad \text{mean}(\theta_s(T)), \quad \text{median}(\theta_s(T)), \quad \text{std}(\theta_s(T)), \\ &\max(d_{mx}(T)), \quad \text{mean}(d_{mx}(T)), \quad \text{median}(d_{mx}(T)), \quad \text{std}(d_{mx}(T)), \\ &\max(d_{mn}(T)), \quad \text{mean}(d_{mn}(T)), \quad \text{median}(d_{mn}(T)), \quad \text{std}(d_{mn}(T)), \end{aligned}$$



$$\max(d_{mdn}(T)), \quad \text{mean}(d_{mdn}(T)), \quad \text{median}(d_{mdn}(T)), \quad \text{std}(d_{mdn}(T)).$$

Здесь $\text{std}(x)$ обозначает стандартное отклонение в последовательности x

$$\text{std}(x) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \text{mean}(x))^2}.$$

Определенный интерес могут представлять величины, для которых значения на исходном тексте и на случайном тексте отличаются, например, в не менее 70% всех текстов. Из представления результатов на рис. 1 видно, что этому условию будут удовлетворять величины

$$\text{mean}(\theta_s(T)), \quad \text{median}(\theta_s(T)), \quad \text{std}(\theta(T)), \quad \text{mean}(\theta(T)).$$

При этом первые две величины дают требуемое отличие в 84% случаев. Другими словами, в 84% текстов эти величины для исходных текстов меньше, чем для случайных текстов, сгенерированных по исходным алгоритмам, приведенным выше.

Теперь рассмотрим поведение тех же величин, если в качестве исходного текста выбирается случайный текст, построенный по исходному. Те же вычисления дают результат, приведенный на рис. 2.

Из этого графика видно, что только величина $\text{median}(\theta_s(T))$ дает нужные результаты, поскольку показывает, что случайно сгенерированные исходные тексты в большинстве случаев (97%) неразличимы с текстами, которые случайным образом сгенерированы по ним же. Таким образом, медианное значение величины веса ребра графа $G(T, P', P'')$, деленного на количество предложений в тексте T , может быть использовано в качестве величины, определяющей, является ли исходный текст осмысленным или он сгенерирован случайно по некоторому шаблонному тексту, используя алгоритм, описанный выше.

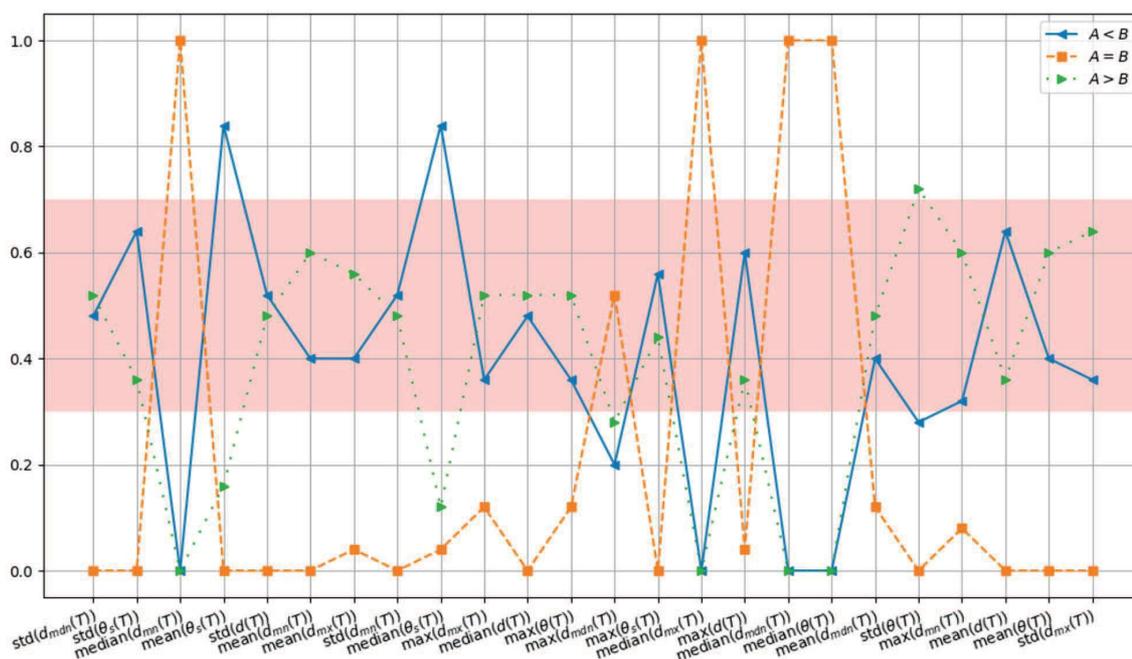


Рис. 1. Результаты численного анализа характеристик текста: А — список значений для исходного текста; В — список значений для случайного текста (цвет online)

Fig. 1. Results of numerical analysis of text characteristics: А — list of values for source text; В — list of values for random generated text (color online)

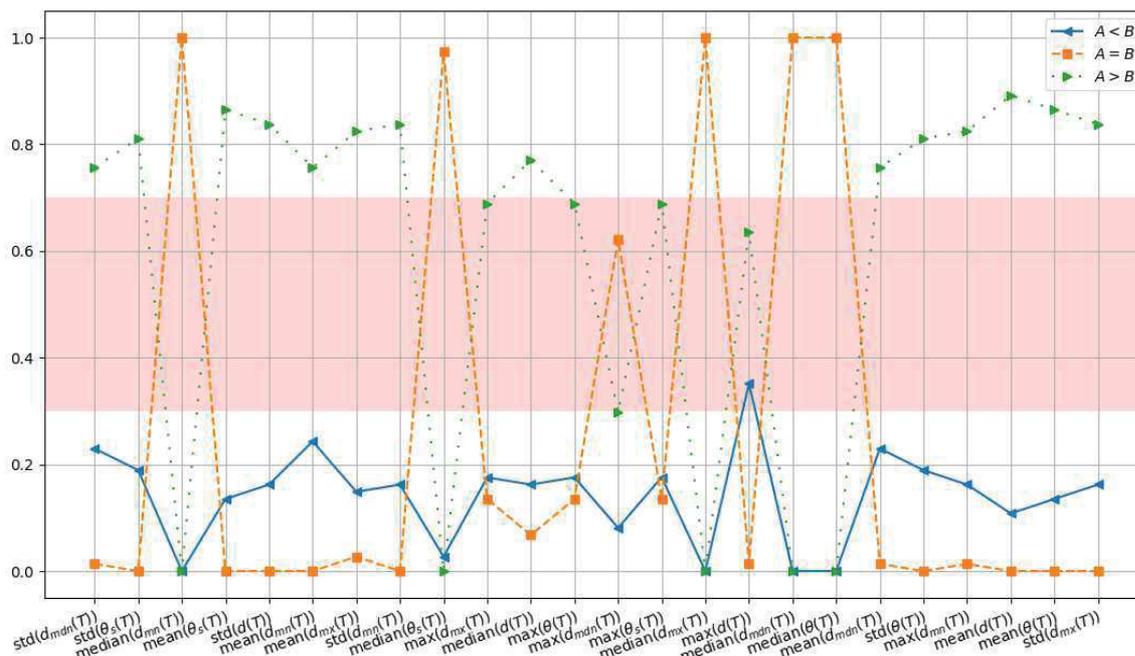


Рис. 2. Результаты численного анализа характеристик текста после второго эксперимента: А — список значений для исходного текста; В — список значений для случайного текста (цвет online)

Fig. 2. Results of numerical analysis of text characteristics after the second experiment: A — list of values for source text; B — list of values for random generated text (color online)

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области (проект № 18-412-340007).

Библиографический список

1. Кияткова И. С., Карпов А. А. Автоматическая обработка и статистический анализ новостного текстового корпуса для модели языка системы распознавания русской речи // Информационно-управляющие системы. 2010. № 4 (47). С. 2–8.
2. Колмогорова А. В., Калинин А. А., Маликова А. В. Лингвистические принципы и методы компьютерной лингвистики для решения задач сентимент-анализа русскоязычных текстов // Актуальные проблемы филологии и педагогической лингвистики. 2018. № 1 (29). С. 139–148. DOI: [https://doi.org/10.29025/2079-6021-2018-1\(29\)-139-148](https://doi.org/10.29025/2079-6021-2018-1(29)-139-148)
3. Воронина И. Е., Кретов А. А., Попова И. В. Алгоритмы определения семантической близости ключевых слов по их окружению в тексте // Вестн. ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2010. № 1. С. 148–153.
4. Берман Н. Д., Левенец А. В., Сергеева Л. А. Статистический анализ текстовой информации // Информационные технологии XXI века : сб. науч. тр. / отв. за вып. Е. А. Шеленок. Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2016. С. 282–286.
5. Донина О. В. Применение методов Data Mining для решения лингвистических задач // Вестн. ВГУ. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2017. № 1. С. 154–160.
6. Mikolov T., Chen K., Corrado G., Dean J. Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space. arxiv.org/abs/1301.3781v3
7. Райгородский А. М. Случайные графы // Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова, А. В. Шаповалова. М. : Изд-во МЦНМО, 2009. С. 312–315.



8. Erdős P., Rányi A. On random graphs I // Publ. Math. Debrecen. 1959. Vol. 6. P. 290–297.
9. Newman M. E. J., Strogatz S. H., Watts D. J. Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. P. 26–118.
10. Павлов Ю. Л., Чеплюкова И. А. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения // Дискрет. матем. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18. DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1008>
11. Павлов Ю. Л. О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискрет. матем. 2009. Т. 21, вып. 3. С. 14–23. DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1057>

Образец для цитирования:

Григорьева Е. Г., Клячин В. А. Исследование статистических характеристик текста на основе графовой модели лингвистического корпуса // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 116–126. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-116-126>

The Study of the Statistical Characteristics of the Text Based on the Graph Model of the Linguistic Corpus

E. G. Grigorieva, V. A. Klyachin

Elena G. Grigorieva, <https://orcid.org/0000-0001-8303-262X>, Volgograd State University, 100 Universitetskii Prosp., Volgograd 400062, Russia, e_grigoreva@volsu.ru

Vladimir A. Klyachin, <https://orcid.org/0000-0003-1922-7847>, Volgograd State University, 100 Universitetskii Prosp., Volgograd 400062, Russia; Kalmyk State University name after B. B. Gorodovikov, 11 Pushkin St., Elista 358000, Republic of Kalmykia, Russia, klyachin.va@volsu.ru

The article is devoted to the study of the statistical characteristics of the text, which are calculated on the basis of the graph model of the text from the linguistic corpus. The introduction describes the relevance of the statistical analysis of the texts and some of the tasks solved using such an analysis. The graph model of the text proposed in the article is constructed as a graph in the vertices of which the words of the text are located, and the edges of the graph reflect the fact that two words fall into any part of the text, for example, in — a sentence. For the vertices and edges of the graph, the article introduces the concept of weight as a value from some additive semigroup. Formulas for calculating a graph and its weights are proved for text concatenation. Based on the proposed model, calculations are implemented in the Python programming language. For an experimental study of statistical characteristics, 24 values are distinguished, which are expressed in terms of the weights of the vertices, edges of the graph, as well as other characteristics of the graph, for example, the degrees of its vertices. It should be noted that the purpose of numerical experiments is to squeak in the characteristics of the text, with which you can determine whether the text is man-made or randomly generated. The article proposes one of the possible such algorithms, which generates random text using some other text created by man as a template. In this case, the sequence of parts of speech in an auxiliary text alternation is preserved in the random text. It turns out that the required conditions are satisfied by the median value of the ratio of the text graph edge weight value to the number of sentences in the text.

Keywords: text, graph, linguistic corpus, automatic text processing.

Received: 28.02.2019 / Accepted: 19.05.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Administration of the Volgograd Region (project No. 18-412-340007).

References

1. Kipyatkova I. S., Karpov A. A. Automatic processing and statistic analysis of the news text corpus for a language model of a Russian language speech recognition system. *Informatsionno-upravliayuschie sistemy* [Information and Control Systems], 2010, no. 4 (47), pp. 2–8 (in Russian).
2. Kolmogorova A. V., Kalinin A. A., Malikova A. V. Linguistic principles and computational linguistics methods for the purposes of sentiment analysis of Russian texts. *Aktual'nye problemy filologii i pedagogicheskoi lingvistiki* [Actual problems of philology and pedagogical linguistics], 2018, no. 1 (29), pp. 139–148 (in Russian). DOI: [https://doi.org/10.29025/2079-6021-2018-1\(29\)-139-148](https://doi.org/10.29025/2079-6021-2018-1(29)-139-148)
3. Voronina I. E., Kretov A. A., Popova I. V. Algorithms of semantic proximity assessment based on the lexical environment of the key words in a text. *Proceedings of Voronezh State University. Ser. Systems analysis and information technologies*, 2010, no. 1, pp. 148–153 (in Russian).
4. Berman N. D., Levenets A. V., Sergeeva L. A. Statistical analysis of textual information. In: *Informatsionnye tekhnologii XXI veka* [Information Technologies of the XXI Century. Collection of Scientific Papers]. Khabarovsk, Izdatel'stvo Tikhookeanskogo gosudarstvennogo universiteta, 2016, pp. 282–286 (in Russian).
5. Donina O. V. The application of data mining methods in linguistics. *Proceedings of Voronezh State University. Ser. Systems analysis and information technologies*, 2017, no. 1, pp. 154–160 (in Russian).
6. Mikolov T., Chen K., Corrado G., Dean J. Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space. arxiv.org/abs/1301.3781v3
7. Raigorodskii A. M. Random Graphs. In: *Matematika v zadachakh* [Mathematics in Problems]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo tsentra nepreryvnogo matematicheskogo obrazovaniya, 2009, pp. 312–315 (in Russian).
8. Erdős P., Rányi A. On random graphs I. *Publ. Math. Debrecen*, 1959, vol. 6, pp. 290–297.
9. Newman M. E. J., Strogatz S. H., Watts D. J., Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications. *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 64, pp. 26–118.
10. Pavlov Yu. L., Cheplyukova I. A. Random graphs of Internet type and the generalised allocation scheme. *Discrete Mathematics and Applications*, 2008, vol. 18, iss. 5, pp. 447–463. DOI: <https://doi.org/10.1515/DMA.2008.033>
11. Pavlov Yu. L. On the limit distributions of the vertex degrees of conditional Internet graphs. *Discrete Mathematics and Applications*, 2009, vol. 19, iss. 4, pp. 349–359. DOI: <https://doi.org/10.1515/DMA.2009.023>

Cite this article as:

Grigorieva E. G., Klyachin V. A. The Study of the Statistical Characteristics of the Text Based on the Graph Model of the Linguistic Corpus. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 116–126 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-116-126>



УДК 501.1

Моделирование динамики безмассовых носителей заряда в двумерной системе

С. А. Левенец, Т. Т. Веревин, А. В. Маханьков,
А. Д. Панферов, С. О. Пирогов

Левенец Сергей Алексеевич, магистрант кафедры теоретической физики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, 79172123703@yandex.ru

Веревин Тимофей Тимофеевич, магистрант кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, t.ver.bk.ru@mail.ru

Маханьков Алексей Владимирович, аспирант кафедры математического обеспечения вычислительных комплексов и информационных систем, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, mahankov@sgu.ru

Панферов Анатолий Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, panferovad@info.sgu.ru

Пирогов Станислав Олегович, магистрант кафедры теоретической физики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83, finalspectrum@yandex.ru

В работе излагаются результаты, полученные при разработке системы моделирования процессов генерации внешним электрическим полем безмассовых носителей заряда с фотоподобным спектром для двумерных сред. Основой системы является физическая модель процесса, построенная в формализме кинетического уравнения для адекватной квантово-полевой теории. При этом не используются упрощающие предположения, в том числе разложения по каким-либо малым параметрам (теория возмущений). В этом смысле используемая модель является точной. Она оформлена в виде системы ОДУ первого порядка, для которой ставится задача Коши. Основной проблемой является вычислительная сложность определения наблюдаемых величин по характеристикам модели. Непосредственно решение системы ОДУ дает информацию только о вероятности заселения некоторого конкретного конечного состояния на двумерном континууме потенциально допустимых импульсных состояний. Область локализации заселяемых состояний, гладкость их распределения в импульсном пространстве, а следовательно, размеры и плотность необходимой сетки заранее не известны. Эти параметры зависят от характеристик внешнего поля и являются предметом определения в процессе моделирования. Вычислительная сложность собственно решения модельной системы уравнений для заданной точки импульсного пространства тоже представляет собой открытую проблему. В представленном случае такая задача всегда решается на одном вычислительном ядре. Но необходимое для этого время зависит как от характеристик вычислителя, так и от типа, вида и реализации метода интегрирования. Оптимальный их выбор, как продемонстрировано далее, очень существенно влияет на ресурсы, необходимые для решения всей задачи. При этом из-за большой вариативности характера поведения системы уравнений при изменении физических параметров модели оптимизация выбора



методов интегрирования не является глобальной. К этому вопросу приходится возвращаться при каждом существенном изменении параметров исследуемой модели.

Ключевые слова: численное моделирование, высокопроизводительные вычисления, кинетическое уравнение, графен.

Поступила в редакцию: 04.12.2018 / Принята: 06.09.2019 / Опубликовано: 02.03.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-127-137>

ВВЕДЕНИЕ

В связи с потребностью радиоэлектроники в новых материалах с перспективными характеристиками одним из направлений поиска является исследование (псевдо) двумерных систем, реализуемых в виде моноатомных или мономолекулярных слоев на подложках или в свободном состоянии. Одним из представителей таких перспективных материалов является графен [1–3]. Для него характерна очень высокая эффективная скорость носителей заряда и специфический (фотоноподобный) закон дисперсии, устанавливающий связь энергии и импульса носителей [4–6].

1. МОДЕЛЬ КИНЕТИКИ НОСИТЕЛЕЙ

Для оценки практических аспектов использования новых материалов необходимо уметь определять их отклик на действие внешних электромагнитных полей. Настоящая работа представляет первые результаты разработки вычислительной процедуры определения функциональной связи параметров внешнего воздействия и отклика материала на максимально достоверной физической основе. Базой для решения задачи является кинетическое уравнение для функции распределения носителей $f(\bar{p}, t)$. В рамках двумерной адаптации квантовой электродинамики оно может быть получено строго, без использования теории возмущений [7]. При численном исследовании его удобнее представить в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\bar{p}, t) &= \frac{1}{2}\lambda(\bar{p}, t)u(\bar{p}, t), \\ \dot{u}(\bar{p}, t) &= \lambda(\bar{p}, t)(1 - 2f(\bar{p}, t)) - 2\varepsilon(\bar{p}, t)v(\bar{p}, t), \\ \dot{v}(\bar{p}, t) &= 2\varepsilon(\bar{p}, t)u(\bar{p}, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon(\bar{p}, t) = v_F\sqrt{P_1^2 + P_2^2}$ является законом дисперсии носителей в присутствии внешнего поля (v_F — скорость Ферми, $P_i = p_i - eA_i$ — кинематический импульс, A_i — векторный потенциал действующего поля, e — электрический заряд квазичастиц). Коэффициент

$$\lambda(\bar{p}, t) = ev_F^2 \frac{E_1 P_2 - E_2 P_1}{2\varepsilon^2(\bar{p}, t)} \quad (2)$$

определяется через параметры электрического поля и координаты в импульсном пространстве.

Универсальность модели ограничивается только предположением о пространственной однородности электрического поля и относительно небольшими энергиями возбуждений, поскольку реальная форма зависимости $\varepsilon(\bar{p}, t)$ от \bar{p} перестает соответствовать приведенному выражению вдали от точек Дирака импульсного



пространства [8]. В рамках этих ограничений система (1) позволяет детально исследовать характеристики функции распределения носителей заряда во внешнем электрическом поле с произвольной зависимостью от времени. В свою очередь, наличие полной информации о $f(\bar{p}, t)$ позволяет вычислять любые наблюдаемые макроскопические характеристики модели.

2. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ

Основная трудность в использовании (1) связана с вычислительной сложностью задачи, решаемой только численно. При этом каждую точку двумерного импульсного пространства характеризует уникальное поведение коэффициентов уравнения во времени. Для получения достоверной и полной информации о поведении функции распределения в импульсном пространстве необходимо достаточно представительный набор решений, состав которого заранее не известен. Положительным моментом является возможность решать систему уравнений в каждой исследуемой точке импульсного пространства независимо. В этом смысле задача хорошо распараллеливается. По многим причинам представляется удобным задавать параметры моделируемой системы, выполнять промежуточные вычисления и хранить полученные данные с использованием специальной, «естественной» для рассматриваемой проблемы, системы единиц измерения физических величин. В качестве базы для такой системы будем использовать:

- постоянную решетки графена, обычно обозначаемую a и имеющую значение $0.246 \text{ нм} = 2.46 \times 10^{-10} \text{ м}$ (единица длины);
- скорость Ферми $v_F = 10^6 \text{ м/с}$;
- постоянную Планка (приведенную) $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34} \text{ кг м}^2/\text{с}$;
- элементарный заряд $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ с}$.

В используемой системе все эти величины имеют единичные значения. В частности, это обеспечит близость (по порядку значений) используемых в промежуточных вычислениях величин.

На первом этапе решение системы (1) для набора контрольных точек было реализовано средствами CAS Mathematica [9]. Это позволило быстро получить оценки ресурсоемкости задачи в идеальных условиях автоматической оптимизации процедуры решения системы ОДУ средствами этого пакета и набор эталонных значений искомой функции распределения для последующего использования.

На втором этапе разработана программа для вычислительного кластера, обеспечивающая параллельное решение системы кинетических уравнений (1) для произвольного количества наборов параметров. Программа реализована на языке C с использованием интерфейса передачи сообщений MPI [10, 11] и функционала свободной библиотеки GSL [12, 13]. Выбор GSL обусловлен наличием в ней объектов различного уровня для удобной организации процедуры решения задачи Коши для системы ОДУ и поддержкой разнообразных методов численного решения такой задачи. В библиотеке реализованы пять модификаций явного и три модификации неявного методов Рунге – Кутты, специальные возможности предлагаются для решения жестких систем.

3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОГРАММЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Моделирующая программа позволяет воспроизводить отклик исследуемой системы на действие суперпозиции импульсов электрического поля $E_1(t)$ и $E_2(t)$. Это позволяет моделировать большой диапазон реалистических конфигураций поля. В отличие от развивавшихся ранее методов моделирования процессов рождения элек-



трон-позитронных пар в экстремально сильных электрических полях [14–16], в рассматриваемом случае электрическое поле может менять с течением времени не только свою абсолютную величину, но и направление.

Оценка работоспособности программы и оптимизация ее настроек проводились на примере максимально упрощенного однополярного импульса электрического поля вида

$$E_1(t) = \frac{E_{10}}{\cosh^2(t/T_1)}, \quad E_2(t) = 0. \quad (3)$$

После первоначальной отладки и верификации результатов счета было исследовано влияние выбора метода интегрирования на скорость работы программы. Сравнение проводилось по времени вычисления остаточных значений функции распределения $f(\bar{p}, t \rightarrow \infty)$ для матрицы 10×10 точек импульсного пространства. Использовались следующие значения параметров поля (3): $E_{10} = 10^5$ В/м, $T_1 = 2.46 \times 10^{-14}$ с. Для минимизации влияния затрат времени на обмены данными вычисления выполнялись на десяти ядрах одного узла. Функции библиотеки GSL используют формат с плавающей запятой двойной точности и позволяют задавать относительную и абсолютную погрешность вычислений. Приведенные в табл. 1 значения времени решения задачи получены при значении последних параметров 1.0×10^{-14} .

Таблица 1 / Table 1

Зависимость времени решения задачи от выбора метода интегрирования
The dependence of time of the problem solution on the choice of the integration method

| № | Метод интегрирования (по документации GSL) Integration Method (GSL documentation) | Время решения задачи (мс) Problem solving time (μ s) |
|---|--|--|
| 1 | Explicit embedded Runge – Kutta (2, 3) | 5815 |
| 2 | Explicit 4th order (classical) Runge – Kutta | 290 |
| 3 | Explicit embedded Runge – Kutta – Fehlberg (4, 5) | 135 |
| 4 | Explicit embedded Runge – Kutta Cash – Karp (4, 5) | 136 |
| 5 | Explicit embedded Runge – Kutta Prince – Dormand (8, 9) | 57 |
| 6 | Implicit Gaussian second order Runge – Kutta | 23 853 |
| 7 | Implicit Gaussian 4th order Runge – Kutta | 647 |
| 8 | A variable-coefficient linear multistep Adams method in Nordsieck form | 84 |
| 9 | A variable-coefficient linear multistep backward differentiation formula | 177 |

Представленные результаты численных экспериментов демонстрируют возможность успешного использования явных методов. Абсолютным лидером является решатель на основе «explicit embedded Runge – Kutta Prince – Dormand (8, 9)» метода, обеспечивая более чем пятикратный выигрыш по времени у классического метода Рунге – Кутты четвертого порядка. Неявные методы также применимы, хотя для их использования потребовалось обеспечить возможность вычисления Якобиана системы (1). Они проигрывают по времени, но могут использоваться для контроля точности результатов в связи с их большей устойчивостью. Отметим, что преимущество явных методов в рассматриваемом случае принципиально отличается от их роли при решении аналога (1) для стандартной квантовой электродинамики (КЭД), например [17]. Это обусловлено тем, что в случае КЭД система кинетических уравнений обычно ведет себя жестко и явные методы могут быть вообще не



применимы. Различия в жесткости системы кинетических уравнений в КЭД и (1) связаны с различиями в свойствах носителей зарядов в этих двух случаях. Вопрос о возможности проявления жесткости в рассматриваемом случае требует дополнительного исследования. В случае если жесткое поведение будет обнаружено, удобнее использовать решатель на основе метода Адамса.

На следующем этапе оптимизировались настройки точности. В табл. 2 приведены результаты выполнения тестов на скорость счета для тестовой задачи. Приведенные значения функции распределения соответствуют одной точке из считавшейся матрицы. Конечно, требуемая точность результатов во многом будет определяться целями моделирования. Но даже при заданной, явно завышенной, точности представления результатов использование менее жестких требований к погрешностям вычислений может обеспечить 2–3-кратную экономию времени.

Таблица 2 / Table 2

Зависимость времени решения задачи и результатов от погрешностей интегрирования для методов 5 и 8 из табл. 1

The time of dependence of the problem solution and the results of the integration errors for methods 5 and 8 from Table 1

| Задаваемые погрешности (абс. и отн.) Set errors (abs. and rel.) | Время решения (мкс) Solution time (μs) | | Значение / Value | |
|--|--|---------------------|---------------------|---------------------|
| | метод 5 method 5 | метод 8 method 8 | метод 5 method 5 | метод 8 method 8 |
| 10e-6 | 15 378 | 16 679 | 0.94855704072 | 0.97524534512 |
| 10e-8 | 20 718 | 28 074 | 0.97525691165 | 0.97525695955 |
| 10e-10 | 27 296 | 40 725 | 0.97525691167 | 0.97525690930 |
| 10e-12 | 45 247 | 53 919 | 0.97525691167 | 0.97525691167 |
| 10e-14 | 58 625 | 80 339 | 0.97525691167 | 0.97525691167 |
| 10e-16 | 94 744 | 110 887 | 0.97525691167 | 0.97525691167 |
| 10e-18 | 481 768 | 154 258 | 0.97525691167 | 0.97525691167 |

Для оценки поведения программы моделирования при масштабировании задачи было проведено сравнение результатов работы на тестовых сетках различной плотности. Сохраняя параметры и область моделирования в импульсном пространстве неизменными, в дополнение к исходному варианту 10×10 были выполнены расчеты для сеток 10×100 и 100×100 с использованием метода 5 из табл. 1. Для оценки влияния процессов обмена данными в многонодовых конфигурациях кластера проведено сравнение времени решения задачи на одной ноде (10 вычислительных ядер) и на двух нодах с таким же суммарным числом ядер (2 ноды по 5 ядер). Результаты представлены в табл. 3.

Из их анализа и сравнения с данными, представленными в табл. 2, можно сделать вывод о практически линейной зависимости времени счета от количества точек сетки, на которой выполняется моделирование. Переход к многонодовым конфигурациям сказывается на времени моделирования. Но увеличение времени счета незначительно.

В качестве демонстрации на рис. 1 представлены результаты расчета конечного вида функции распределения после воздействия импульса электрического поля вида (3). Параметры поля соответствуют значениям, использовавшимся для тестирования программы. На рисунке представлена квадратная область импульсного пространства



в диапазоне значений $1.0 \times 10^{-4} \leq p_1 \leq 5.0 \times 10^{-4}$, $1.0 \times 10^{-4} \leq p_2 \leq 5.0 \times 10^{-4}$. Значения приведены в единицах $\hbar/a = 4.289 \times 10^{-25}$ кг м/с.

Таблица 3 / Table 3

Результаты тестирования масштабируемости задачи
Results of testing of the task scalability

| Задаваемые погрешности (абс. и отн.) Set errors (abs. and rel.) | Время для сетки 10×100 (мкс) Time for the grid 10×100 (μs) | | Время для сетки 100×100 (мкс) Time for the grid 100×100 (μs) | |
|--|--|----------------------|--|----------------------|
| | одна нода one node | две ноды two node | одна нода one node | две ноды two node |
| | 10e-6 | 126 184 | 162 657 | 1 164 969 |
| 10e-8 | 175 180 | 195 095 | 1 517 363 | 1 669 305 |
| 10e-10 | 250 783 | 260 707 | 2 129 171 | 2 619 711 |
| 10e-12 | 344 800 | 396 212 | 3 158 579 | 3 459 483 |
| 10e-14 | 580 914 | 608 269 | 4 764 188 | 5 345 023 |
| 10e-16 | 906 610 | 970 593 | 7 621 487 | 8 342 612 |
| 10e-18 | 4 433 375 | 4 863 168 | 42 357 249 | 46 519 604 |

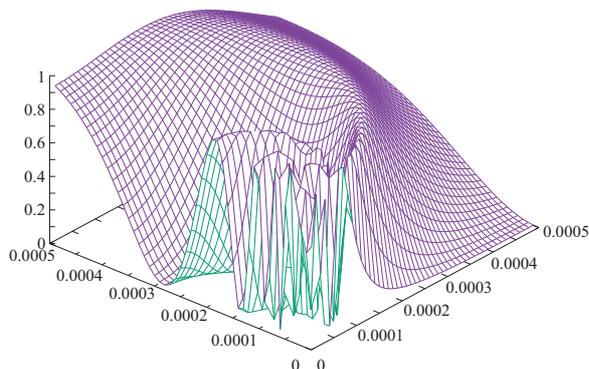


Рис. 1. Вид функции распределения носителей $f(p_1, p_2, t \rightarrow \infty)$ при тестовых параметрах поля

Fig. 1. The form of the distribution function of carriers $f(p_1, p_2, t \rightarrow \infty)$ under test field parameters

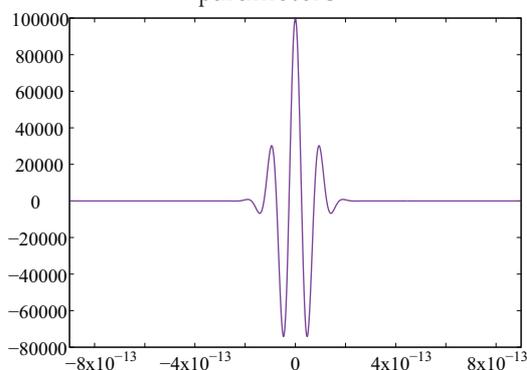


Рис. 2. Вид электрического поля с реалистичной зависимостью от времени

Fig. 2. The electric field with a realistic time dependence

Для построения этого детализированного изображения потребовалась матрица размером 250×250 . С учетом выполненной оптимизации даже на тестовой конфигурации из 10 ядер на одной ноде для такого моделирования достаточно примерно полминуты.

4. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ ИМПУЛЬС

Для оценки характеристик программы при исследовании электрических полей с реалистичными зависимостями от времени было выполнено моделирование действия поля вида (рис. 2):

$$E_1(t) = E_{10} \cos(\omega t) \exp(-t^2/2\tau^2), \quad (4)$$

$$E_2(t) = 0.$$

Такое поле представляет максимально упрощенный пример импульса, формируемого в радиочастотных устройствах или лазерных системах. Оно характеризуется циклической частотой несущей ω и шириной, определяемой параметром τ . Для наглядного представления относительной ширины импульса принято использовать характеристику $\sigma = \omega\tau$, которую условно можно интерпретировать как количество волн несущей в импульсе.



Серия численных экспериментов была выполнена для набора параметров $E_{10} = 10^5$ В/м, $\omega = 2\pi \times 10^{13}$ Гц и $\sigma = 5$. Параметры соответствуют короткому импульсу терагерцового диапазона (10 ТГц).

Напряженность поля в рассматриваемой ситуации та же, что и в модельном варианте с однополярным импульсом. Но если в предыдущем случае моделировались события на интервале времени в 5.904×10^{-13} с, то теперь общая продолжительность моделируемого процесса $\approx 2.0 \times 10^{-12}$ с и зависимость напряженности поля от времени более сложная. Отражение этого представлено в табл. 4, которая является аналогом табл. 1.

Таблица 4 / Table 4

Зависимость времени решения задачи 4 от выбора метода интегрирования
The dependence of time of the problem 4 solution on the choice of the integration method

| № | Метод интегрирования (по документации GSL) Integration Method (GSL documentation) | Время решения задачи (мс) Problem solving time (μ s) |
|---|--|--|
| 1 | Explicit embedded Runge – Kutta (2, 3) | 13 827 |
| 2 | Explicit 4th order (classical) Runge – Kutta | 1370 |
| 3 | Explicit embedded Runge – Kutta – Fehlberg (4, 5) | 803 |
| 4 | Explicit embedded Runge – Kutta Cash – Karp (4, 5) | 640 |
| 5 | Explicit embedded Runge – Kutta Prince – Dormand (8, 9) | 188 |
| 6 | Implicit Gaussian second order Runge – Kutta | 59 645 |
| 7 | Implicit Gaussian 4th order Runge – Kutta | 53 667 |
| 8 | A variable-coefficient linear multistep Adams method in Nordsieck form | 1273 |
| 9 | A variable-coefficient linear multistep backward differentiation formula | 9927 |

Как и в первом случае, лучшие результаты показал «explicit embedded Runge – Kutta Prince – Dormand (8, 9)» метод. Отметим, что поведение всех явных методов стабильно. Рост времени решения задачи в этой группе примерно сопоставим. А вот неявные и многошаговые методы существенно ухудшили результаты. Если в случае однополярного импульса (3) метод «variable-coefficient linear multistep Adams in Nordsieck form» показывал время счета, почти сопоставимое с результатом лидера, то для поля (4) его результат хуже почти в семь раз.

Полученные оценки позволяют рассчитывать на успешное моделирование воздействия радиоимпульса терагерцового диапазона на слой графена. Для количественного описания происходящих процессов, однако, необходимы достаточно плотные сетки.

В табл. 5 представлены значения времени, потребовавшегося на решение этой задачи на различных конфигурациях нод и ядер. На рис. 3 представлены результаты для сеток 5×5 , 20×20 и 100×100 . В последнем случае общее процессорное время, потребовавшееся на решение задачи, составило 20 с при использовании оптимального метода.

Максимальное ускорение в 30 раз получено на конфигурации 2 ноды по 20 ядер. При этом была достигнута эффективность работы параллельной программы в 72.7%.



Таблица 5 / Table 5

Результаты тестирования масштабируемости задачи (время для сетки 250×250 (мс))

Results of testing of the task scalability (time for grid 250×250 (μ s))

| Задаваемые погрешности (абс. и отн.) / Set errors (abs. and rel.) | 1 нода, 1 ядро / 1 node, 1 kernel | 1 нода, 8 ядер / 1 node, 8 kernels | 2 ноды по 8 ядер / 2 nodes, 8 kernels | 1 нода, 20 ядер / 1 node, 20 kernels | 2 ноды по 20 ядер / 2 node, 20 kernels |
|---|-----------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 10e-14 | 589 503 | 83 595 | 41 984 | 38 458 | 20 247 |

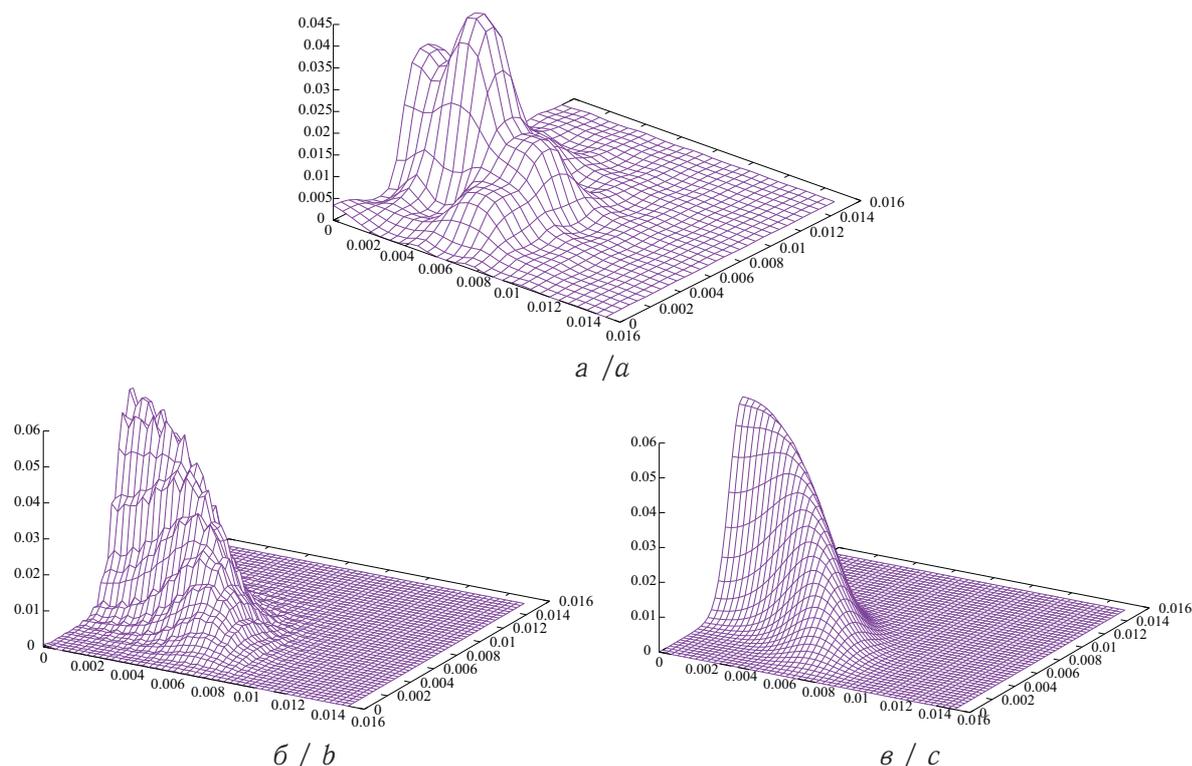


Рис. 3. Вид функции распределения носителей $f(p_1, p_2, f \rightarrow \infty)$ для поля 4: а — сетка 5×5 ; б — сетка 20×20 ; в — сетка 100×100

Fig. 3. The distribution function $f(p_1, p_2, f \rightarrow \infty)$ for field 4: a is grid 5×5 ; b is grid 20×20 ; c is grid 100×100

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты разработки вычислительного ядра программы для моделирования процессов генерации носителей в монослое графена на основе кинетического описания его поведения во внешнем электрическом поле. Промонстрированы этапы ее оптимизации для модельной задачи и возможности использования для реалистической полевой модели высокочастотного радиоимпульса терагерцового диапазона.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-07-00778).

Библиографический список

1. Novoselov K. S., Fal'ko V. I., Colombo L., Gellert P. R., Schwab M. G., Kim K. A roadmap for graphene // Nature. 2012. Vol. 490. P. 192–200. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature11458>



2. Lee C., Wei X., Kysar J. W., Hone J. Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene // *Science*. 2008. Vol. 321, iss. 5887. P. 385–388. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1157996>
3. Ang Y. S., Chen Q., Zhang C. Nonlinear optical response of graphene in terahertz and near-infrared frequency regime // *Front. Optoelectron*. 2015. Vol. 8, iss. 1. P. 3–26. DOI : <https://doi.org/10.1007/s12200-014-0428-0>
4. Vandecasteele N., Barreiro A., Lazzeri M., Bachtold A., Mauri F. Current-voltage characteristics of graphene devices: Interplay between Zener – Klein tunneling and defects // *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 82, iss. 4. P. 045416. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.045416>
5. Kane G., Lazzeri M., Mauri F. J. High-field transport in graphene: The impact of Zener tunneling // *Journal of Physics : Condensed Matter*. 2015. Vol. 27, № 16. P. 164205. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-8984/27/16/164205>
6. Dora B., Moessner R. Nonlinear electric transport in graphene: Quantum quench dynamics and the Schwinger mechanism // *Phys. Rev. B*. 2010. Vol. 81, iss. 16. P. 165431. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.165431>
7. Smolyansky S. A., Churochkin D. V., Dmitriev V. V., Panferov A. D., Kämpfer B. Residual currents generated from vacuum by an electric field pulse in 2+1 dimensional QED models // *EPJ Web Conf*. 2017. Vol. 138. XXIII International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics (Baldin ISHEPP XXIII). Art. 06004. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201713806004>
8. Wallace P. R. The Band Theory of Graphite // *Phys. Rev.* 1947. Vol. 71, iss. 9. P. 622–634. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.622>
9. Wolfram Mathematica : [сайт]. URL: <http://www.wolfram.com/mathematica/> (дата обращения: 18.04.2018).
10. MPI Forum. URL: <https://www.mpi-forum.org/> (дата обращения: 18.04.2018).
11. MPICH. URL: <https://www.mpich.org/about/overview/> (дата обращения: 18.04.2018).
12. GSL — GNU Scientific Library. URL: <https://www.gnu.org/software/gsl/> (дата обращения: 18.04.2018).
13. Browne S., Dongarra J., Trefethen A. Numerical Libraries and Tools for Scalable Parallel Cluster Computing. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.438.4231&rep=rep1&type=pdf> (дата обращения: 18.04.2018).
14. Narozhnyi N. B., Nikishov A. I. Simplest processes in the pair-creating electric field // *Yad. Fiz.* 1970. Vol. 11. P. 1072. [*Sov. J. Nucl. Phys.* 1970. Vol. 11, pp. 596].
15. Hebenstreit F., Alkofer R., Dunne G. V., Gies H. Momentum signatures for Schwinger pair production in short laser pulses with sub-cycle structure // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102, iss. 15. P. 150404. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.150404>
16. Blaschke D., Juchnowski L., Panferov A., Smolyansky S. Dynamical Schwinger effect: Properties of the e^-e^+ plasma created from vacuum in strong laser fields // *Phys. Part. Nuclei*. 2015. Vol. 46, iss. 5. P. 797–800. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106377961505010X>
17. Колеконов С. В., Панферов А. Д., Смолянский С. А. Исследование тонкой структуры функции распределения электрон-позитронных пар при динамическом эффекте Швингера // *Компьютерные науки и информационные технологии : материалы международного науч. конф. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. С. 157–160.*

Образец для цитирования:

Левенец С. А., Веревин Т. Т., Маханьков А. В., Панферов А. Д., Пирогов С. О. Моделирование динамики безмассовых носителей заряда в двумерной системе // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 127–137. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-127-137>



Modeling the Dynamics of Massless Charge Carriers in a Two-Dimensional System

S. A. Levenets, T. T. Verevin, A. V. Makhankov, A. D. Panferov, S. O. Pirogov

Sergey A. Levenets, <https://orcid.org/0000-0002-6461-5624>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, 79172123703@yandex.ru

Timofey T. Verevin, <https://orcid.org/0000-0003-2856-6666>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, t.ver.bk.ru@mail.ru

Aleksey V. Makhankov, <https://orcid.org/0000-0002-9848-9734>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, mahankov@sgu.ru

Anatolii D. Panferov, <https://orcid.org/0000-0003-2332-0982>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, panferovad@info.sgu.ru

Stanislav O. Pirogov, <https://orcid.org/0000-0001-9131-7641>, Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia, finalspectrum@yandex.ru

The paper presents the results obtained in the process of developing a system for simulating the generation of massless charge carriers with a photon-like spectrum by an external electric field for two-dimensional media. The basis of the system is a physical model of the process, built in the formalism of a kinetic equation for an adequate quantum-field theory. It does not use simplifying assumptions, including expansions in some small parameters (perturbation theory). In this sense, the model used is accurate. It is designed as a first-order ODE system for which the Cauchy problem is formulated. The main problem is the computational complexity of determining the observed values from the characteristics of the model. Directly solving the ODE system provides information only about the probability of a certain specific final state being occupied on a two-dimensional continuum of potentially admissible impulse states. The region of localization of the occupied states, the smoothness of their distribution in the momentum space, and, consequently, the size and density of the required mesh, are not known in advance. These parameters depend on the characteristics of the external field and are themselves a matter of definition in the modeling process. The computational complexity of the actual solution of the model system of equations for a given point in the momentum space is also an open problem. In the present case, such a problem is always solved on a single computational core. But the time required for this depends both on the characteristics of the calculator and on the type, type and implementation of the integration method. Their optimal choice, as demonstrated below, has a very significant effect on the resources needed to solve the entire problem. At the same time, due to the large variation in the nature of the behavior of the equations system when the physical parameters of the model change, the choice optimization of the integration methods is not global. This question has to be returned with each significant change in the parameters of the model under study.

Keywords: numerical modeling, high-performance computing, kinetic equation, graphene.

Received: 04.12.2018 / Accepted: 06.09.2019 / Published: 02.03.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects No. 18-07-00778).

References

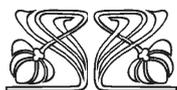
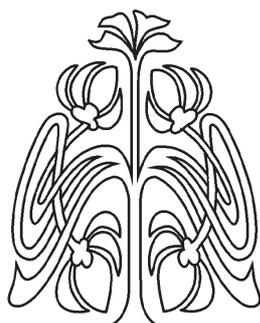
1. Novoselov K. S., Fal'ko V. I., Colombo L., Gellert P. R., Schwab M. G., Kim K. A roadmap for graphene. *Nature*, 2012, vol. 490, pp. 192–200. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature11458>



2. Lee C., Wei X., Kysar J. W. Hone J. Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene. *Science*, 2008, vol. 321, iss. 5887, pp. 385–388. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.1157996>
3. Ang Y. S., Chen Q., Zhang C. Nonlinear optical response of graphene in terahertz and near-infrared frequency regime. *Front. Optoelectron*, 2015, vol. 8, iss. 1, pp. 3–26. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12200-014-0428-0>
4. Vandecasteele N., Barreiro A., Lazzeri M., Bachtold A., Mauri F. Current-voltage characteristics of graphene devices: Interplay between Zener–Klein tunneling and defects. *Phys. Rev. B*, 2010, vol. 82, iss. 4, pp. 045416. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.045416>
5. Kane G., Lazzeri M., Mauri F. J. High-field transport in graphene: The impact of Zener tunneling. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2015, vol. 27, no. 16, pp. 164205. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-8984/27/16/164205>
6. Dora B., Moessner R. Nonlinear electric transport in graphene: Quantum quench dynamics and the Schwinger mechanism. *Phys. Rev. B*, 2010, vol. 81, iss. 16, pp. 165431. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.165431>
7. Smolyansky S. A., Churochkin D. V., Dmitriev V. V., Panferov A. D., Kämpfer B. Residual currents generated from vacuum by an electric field pulse in 2+1 dimensional QED models. *EPJ Web Conf.*, 2017, vol. 138. XXIII International Baldin Seminar on High Energy Physics Problems Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics (Baldin ISHEPP XXIII). Art. 06004. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201713806004>
8. Wallace P. R. The Band Theory of Graphite. *Phys. Rev.*, 1947, vol. 71, iss. 9, pp. 622–634. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.622>
9. Wolfram Mathematica. Site. Available at: <http://www.wolfram.com/mathematica/> (accessed 18 April 2018).
10. MPI Forum. Available at: <https://www.mpi-forum.org/> (accessed 18 April 2018).
11. MPICH. Available at: <https://www.mpich.org/about/overview/> (accessed 18 April 2018).
12. GSL — GNU Scientific Library. Available at: <https://www.gnu.org/software/gsl/> (accessed 18 April 2018).
13. Browne S., Dongarra J., Trefethen A. Numerical Libraries and Tools for Scalable Parallel Cluster Computing. Available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.438.4231&rep=rep1&type=pdf> (accessed 18 April 2018).
14. Narozhnyi N. B., Nikishov A. I. Simplest processes in the pair-creating electric field. *Yad. Fiz.*, 1970, vol. 11, pp. 1072. [Sov. J. Nucl. Phys. 1970, vol. 11, pp. 596].
15. Hebenstreit F., Alkofer R., Dunne G. V., Gies H. Momentum signatures for Schwinger pair production in short laser pulses with sub-cycle structure. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 102, iss. 15, pp. 150404. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.150404>
16. Blaschke D., Juchnowski L., Panferov A., Smolyansky S. Dynamical Schwinger effect: Properties of the e^-e^+ plasma created from vacuum in strong laser fields. *Phys. Part. Nuclei*, 2015, vol. 46, iss. 5, pp. 797–800. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106377961505010X>
17. Kolekonov S. V., Panferov A. D., Smolyansky S. A. Investigation of the fine structure of the distribution function of electron-positron pairs with the dynamic Schwinger effect. In: *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii* [Computer Science and Information Technologies. Int. Sci. Conf. Materials]. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 2014, pp. 157–160 (in Russian).

Cite this article as:

Levenets S. A., Verevin T. T., Makhankov A. V., Panferov A. D., Pirogov S. O. Modeling the Dynamics of Massless Charge Carriers in Two-Dimensional System. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 127–137 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-1-127-137>



ПОДПИСКА

Подписка на 2020 год

Индекс издания в объединенном каталоге «Пресса России» 36017, раздел 30 «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия вузов». Журнал выходит 4 раза в год

Цена свободная

Оформить подписку онлайн можно в интернет-каталоге «Пресса по подписке» (www.akc.ru)

Адрес издательства:

410012, Саратов, Астраханская, 83

Тел.: +7(845-2) 51-45-49, 52-26-89

Факс: +7(845-2) 27-85-29

E-mail: izvestiya@info.sgu.ru

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mml@info.sgu.ru

Website: <http://mml.sgu.ru/>