НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МЕХАНИКА

УДК 593.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТЯХ ФРОНТОВ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ

Н.С. Анофрикова, Л.Ю. Коссович, В.П. Черненко
Саратовский государственный университет,
кафедра математической теории упругости и биомеханики
E-mail: rector@sgu.ru

Рассматривается задача о распространении нестационарных продольных волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени. С помощью асимптотических методов выводятся уравнения погранслоев в окрестностях фронтов волн с длительной и мгновенной скоростями, строятся их решения.

Asymptotic methods for obtained solutions in vicinities of wave fronts in viscoelastic rod at large time

N.S. Anofrikova, L.Yu. Kossovich, V.P. Chernenko

Non-stationary longitudinal waves in viscoelastic rod at large time are considered. Equations for the wave fronts are derived by means of asymptotic methods. Solutions of these equations are obtained.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкий вязкоупругий полубесконечный стержень цилиндрической формы. Вязкоупругие свойства материала будем описывать с помощью определяющих соотношений, взятых в интегрально-операторной форме [1]. Пусть стержень подвергается ударному торцевому воздействию. Краевая задача, описывающая данный тип воздействия, имеет вид

$$\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial x}-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0,$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{E}\left[\sigma(x,t)+\int_0^t K(t-t_*)\sigma(x,t)\,dt_*\right], \qquad (1.1)$$

с граничным условием

$$\sigma(0,t)=IH(t) \qquad (1.2)$$

и начальными условиями

$$\sigma(x,0)=0,\quad \frac{\partial\sigma(x,0)}{\partial t}=0, \qquad (1.3)$$

где u – перемещение, σ – напряжение, x – продольная координата,

t – время, ρ – плотность материала, I – амплитуда воздействия, E – мгновенный модуль упругости, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, $K(t - t_*)$ – разностное ядро ползучести Работнова, которое имеет вид

$$K(t) = kt^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{n/2}}{\Gamma[(n+1)/2]}, \tag{1.4}$$

где $\beta > 0$, $k > 0$ – параметры материала.

Подставляя второе уравнение системы (1.1) в первое уравнение той же системы, получим следующее разрешающее уравнение относительно напряжения:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t K(t-t_*)\sigma(x,t_*)\,dt_* = 0. \tag{1.5}$$

В уравнении (1.5) перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$x = cT_k\xi,\ t = T_k\tau,\ u = cT_k u^*,\ \sigma = E\sigma^*, \tag{1.6}$$

где $c = \sqrt{E/\rho}$ – мгновенная скорость, $T_k = 1/k^2$ – масштабный множитель, имеющий размерность времени. Получим разрешающее уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\sigma^*}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\sigma^*}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_0^\tau K_*(\tau-\tau_*)\sigma(\xi,\tau_*)\,d\tau_* = 0, \tag{1.7}$$

$$K_*(\tau) = \tau^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_*)^n \tau^{n/2}}{\Gamma[(n+1)/2]},\ \beta_* = T_k^{1/2}\beta.$$

В дальнейшем для простоты опустим звездочки у безразмерных величин.

Анализ свойств решений для нестационарных волн показывает, что напряжённо-деформированное состояние (НДС) для фиксированного времени τ = const >>1 можно расчленить на четыре зоны применимости различных типов асимптотик (рис. 1): I – зона квазиупругого решения, II – погранслой в окрестности фронта волны с длительной скоростью $c_\infty = (1 + k/\beta)^{-1/2} c$ (квазифронт), III – зона малоамплитудного решения, IV – погранслой в окрестности фронта волны с мгновенной скоростью c [2].

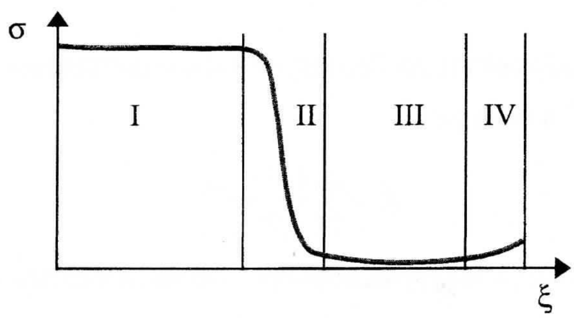

Рис. 1

В статье [2] точное решение исходной краевой задачи (1.1)–(1.3) было получено с помощью интегрального преобразования Лапласа. Обращение изображения производилось путём деформирования первоначального контура интегрирования, в результате чего был получен следующий оригинал решения:

$$\sigma=\frac{I}{E}\left\{1-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{p}\exp\left[-p\tau+\frac{p\xi}{\sqrt{2}}\left(\frac{p+\beta(\beta+1)+\left((p+\beta^2)\left(p+(\beta+1)^2\right)\right)^{1/2}}{p+\beta^2}\right)^{1/2}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left[\frac{p\xi}{\sqrt{2}}\left(\frac{-p-\beta(\beta+1)+\left((p+\beta^2)\left(p+(\beta+1)^2\right)\right)^{1/2}}{p+\beta^2}\right)^{1/2}\right]dp\right\}. \tag{1.8}$$

2. Уравнение погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью

Получим уравнение погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью (зона II, см. рис. 1). Дадим определение дробной производной $D^\gamma u$ от функции u порядка γ [3]:

$$D^\gamma u=\begin{cases}\dfrac{d}{d\tau}\displaystyle\int_0^\tau\frac{u(\tau_*)}{\Gamma(1-\gamma)(\tau-\tau_*)^\gamma}d\tau_*, & 0\le\gamma<1\\[2ex] \dfrac{d^n}{d\tau^n}\displaystyle\int_0^\tau\frac{u(\tau_*)}{\Gamma(n-\gamma)(\tau-\tau_*)^{\gamma-n+1}}d\tau_*, & \gamma>1\end{cases} \tag{2.1}$$

и формулу для преобразования Лапласа дробных производных:

$$\overline{D}^\gamma u=s^\gamma\overline{u}, \tag{2.2}$$

где s – параметр преобразования Лапласа по переменной τ, черта означает изображение соответствующей функции.

Запишем уравнение (1.7) в изображениях Лапласа по переменной τ:

$$\frac{d^2\overline{\sigma}}{d\xi^2}-s^2\overline{\sigma}\ -s^2\overline{K}\ \overline{\sigma}\ =0, \tag{2.3}$$

где $\overline{\sigma}$, $\overline{K}\ =\left(\beta+\sqrt{s}\right)^{-1}$ – изображения по Лапласу σ и K соответственно [1]. Представим изображение разностного ядра $\overline{K}$ в виде ряда:

$$\overline{K}=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{\beta^n}s^{n/2}. \tag{2.4}$$

Возвращаясь в уравнении (2.3) к функциям-оригиналам и учитывая формулу (2.2) для изображения (2.4), получим

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi^2}-\frac{1}{k_c^2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau^2}-\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^n}{\beta^n}D^{n/2}\sigma\right]=0, \tag{2.5}$$

где $k_c^2=\beta/(\beta+1)$.

Рассмотрим данную задачу при больших значениях времени, т.е. когда $\tau >> 1$. Вводим масштабированные переменные в соответствии с характерным масштабным временем $T >> 1$, т.е.

$$\tau = T\tau_T,\ \xi = T\xi_T, \tag{2.6}$$

где τ_T и ξ_T – величины порядка единицы. Тогда разрешающее уравнение (2.5) относительно напряжения примет вид

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_T^2} - \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau_T^2} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial\tau_T^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\beta^n}\frac{1}{T^{n/2}}D_T^{n/2}\sigma\right] = 0, \tag{2.7}$$

где D_T – оператор производной по переменной τ_T.

Введём в рассмотрение характеристические переменные

$$y = T^{1/3}\left(\tau_T - \xi_T/k_c\right),\quad \tau_1 = \tau_T. \tag{2.8}$$

Тогда уравнение (2.7) в характеристических переменных примет вид

$$2\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial\tau_1} + \frac{1}{T^{1/3}}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau_1^{\ 2}} + \frac{k_c^2}{\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2}{T^{1/3}}\frac{\partial^2}{\partial y\partial\tau_1} + \frac{1}{T^{2/3}}\frac{\partial^2}{\partial\tau_1^{\ 2}}\right)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\beta^n}\frac{1}{T^{(n-1)/3}}\left(\frac{D_T}{T^{1/3}}\right)^{n/2}\sigma\right] = 0. \tag{2.9}$$

Оставляя в уравнении (2.9) члены порядка $\mathrm{O}\left(1/T^{1/3}\right)$ и преобразуя асимптотически второстепенные члены с учётом соотношения между асимптотически главными, получим

$$2\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial\tau_1} - \frac{1}{\beta(\beta+1)}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{3}{2T^{1/3}}\frac{\partial^2}{\partial y\partial\tau_1}\right)\left(\frac{D_T}{T^{1/3}}\right)^{1/2}\sigma + \frac{1}{\beta^2(\beta+1)}\frac{1}{T^{1/3}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{D_T}{T^{1/3}}\right)\sigma = 0. \tag{2.10}$$

Интегрируя (2.10) по y и возвращаясь к масштабированным переменным (2.6), получим следующее соотношение:

$$k_c\frac{\partial\ \sigma}{\partial\xi_T} + \frac{\partial\ \sigma}{\partial\tau_T} - \frac{1}{2\beta(\beta+1)}\left(\frac{k_c}{2}\frac{\partial}{\partial\xi_T} + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\right)\frac{1}{T^{1/2}}D_T^{1/2}\sigma + \frac{1}{2\beta^2(\beta+1)}\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial\tau_T}D_T\sigma = 0. \tag{2.11}$$

Возвращаясь в соотношении (2.11) к переменным ξ и τ, записывая его без дробных производных с учётом (2.1), получим уравнение погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью:

$$\begin{aligned} k_c\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \frac{1}{2\beta^2(\beta+1)}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau^2} - \frac{k_c}{4\beta(\beta+1)\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{\tau}\frac{1}{(\tau-\tau_*)^{1/2}}\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}d\tau_* - \\ - \frac{3}{4\beta(\beta+1)\sqrt{\pi}}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_0^{\tau}\frac{\sigma d\tau_*}{(\tau-\tau_*)^{1/2}} = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Порядок уравнения (2.12) на единицу меньше порядка точного уравнения (1.7). Кроме того, вместо ядра Работнова (уравнение (1.7)) мы имеем более простое ядро Абеля (уравнение (2.12)).

Решая уравнение (2.12) с помощью интегрального преобразования Лапласа по переменной τ, получим следующее выражение для изображения напряжения:

$$\bar{\sigma} = I^* \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{s}{k_c} \frac{1 - \frac{3\sqrt{s}}{4\beta(\beta+1)} + \frac{s}{2\beta^2(\beta+1)}}{1 - \frac{\sqrt{s}}{4\beta(\beta+1)}} \xi \right), \tag{2.13}$$

где $I^* = I/E$.

Раскладывая показатель степени экспоненты в выражении (2.13) в ряд по положительным степеням параметра s и ограничиваясь двумя членами разложения, получим окончательное выражение для изображения напряжения:

$$\bar{\sigma} = I^* \frac{1}{s} \exp\left[-\frac{1}{k_c} \left(s - \frac{s^{3/2}}{2\beta(\beta+1)} + \frac{4\beta+3}{8\beta^2(\beta+1)^2} s^2 \right) \xi \right]. \tag{2.14}$$

С помощью метода контурного интегрирования [2] получаем следующий оригинал изображения (2.14):

$$\sigma = I^* \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{p} \exp\left[-\left(\left(\tau - \frac{\xi}{k_c} \right) p + B\xi p^2 \right) \right] \sin\left(A\xi p^{3/2} \right) dp \right], \tag{2.15}$$

$$A = \frac{1}{2\beta(\beta+1)k_c}, \quad B = \frac{4\beta+3}{8\beta^2(\beta+1)^2 k_c}.$$

Решение (2.15) уравнения погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью (2.12) совпадает с асимптотикой точного решения (1.8) в зоне II, полученной в [2].

На рис. 2 представлены графики зависимости приведенных значений напряжения σ/I^* от продольной координаты ξ для $\tau = 100$, $\beta = 1$. Сплошная линия соответствует графику точного решения (формула (1.8)), пунктирная линия – графику приближённого решения (формула (2.15)).

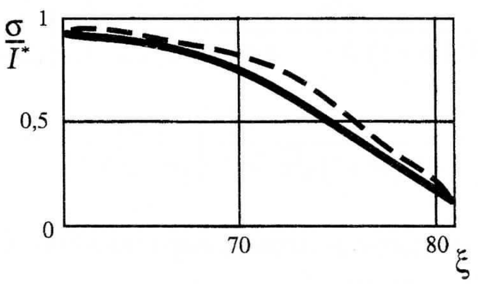

Рис. 2

3. Уравнение погранслоя в окрестности фронта волны с мгновенной скоростью

Получим уравнение погранслоя в окрестности фронта волны с мгновенной скоростью (зона IV, см. рис. 1). Данную задачу будем также рассматривать при больших значениях времени, т.е. когда $\tau >> 1$. Введем в уравнении (1.7) масштабированные переменные (2.6) в соответствии с характерным масштабным временем $T >> 1$. Тогда разрешающее уравнение (1.7) запишется в виде

$$\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_T{}^2}-\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau_T{}^2}\right)-\frac{1}{T}\frac{\partial^2}{\partial\tau_T{}^2}\int\limits_0^{\tau_T}K\left[T\left(\tau_T-\tau_T^*\right)\right]\sigma\left(T\xi_T,T\tau_T^*\right)d\tau_T^*=0. \tag{3.1}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$\Phi\left(\xi_T,\tau_T\right)=T^2\int\limits_0^{\tau_T}K\left[T\left(\tau_T-\tau_T^*\right)\right]\sigma\left(\xi_T,\tau_T^*\right)d\tau_T^*. \tag{3.2}$$

Интеграл в соотношении (3.2) равен нулю в пределах от 0 до ξ_T, так как для соответствующих значений времени фронт волны ещё не дошёл до рассматриваемой точки. Величина этого интеграла пропорциональна величине промежутка (ξ_T, τ_T), имеющего порядок O(1/T), следовательно интеграл также имеет порядок O(1/T).

Введём характеристические переменные

$$y=T\left(\tau_T-\xi_T\right),\qquad \tau_1=\tau_T. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.1) в характеристических переменных примет вид

$$2\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial\tau_1}+\frac{1}{T}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau_1{}^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{2}{T}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial\tau_1}+\frac{1}{T^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau_1{}^2}=0, \tag{3.4}$$

Оставляя в уравнении (3.4) члены порядка O(1/T) и преобразуя асимптотически второстепенные члены с учётом соотношения между асимптотически главными, получим

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial\tau_1}+\frac{3}{4T}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial\tau_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0. \tag{3.5}$$

Интегрируя (3.5) по y и возвращаясь к масштабированным переменным (2.6), получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_T}+\frac{\partial\sigma}{\partial\tau_T}+\frac{1}{4T}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_T}+\frac{3}{4T}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_T}=0. \tag{3.6}$$

Разложим разностное ядро Работнова в ряд по степеням $(\tau_T-\tau_T^*)$ внутри малого промежутка (ξ_T, τ_T):

$$K\left(\tau_T-\tau_T^*\right)=\frac{1}{T^{1/2}\sqrt{\pi}\left(\tau_T-\tau_T^*\right)^{1/2}}-\beta+O\left[T^{1/2}\left(\tau_T-\tau_T^*\right)^{1/2}\right]. \tag{3.7}$$

Возвращаясь в соотношении (3.6) к переменным ξ и τ, учитывая асимптотику (3.7), получим уравнение погранслоя в окрестности фронта волны с мгновенной скоростью:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}-\frac{\beta}{4}\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}d\tau_*-\frac{3\beta}{4}\sigma+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\tau}\frac{1}{\left(\tau-\tau_*\right)^{1/2}}\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}d\tau_*+\frac{3}{4\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{\tau}\frac{1}{\left(\tau-\tau_*\right)^{1/2}}\sigma d\tau_*=0. \tag{3.8}$$

Порядок уравнения (3.8) на единицу меньше порядка точного уравнения (1.7). Кроме того, вместо ядра Работнова (уравнение (1.7)) мы имеем более простое ядро Абеля (уравнение (3.8)).

Решая уравнение (3.8) с помощью интегрального преобразования Лапласа по переменной τ, получим следующее выражение для изображения напряжения:

$$\bar{\sigma} = I^* \frac{1}{s}\exp\left(-s\frac{1+\dfrac{3}{4\sqrt{s}}-\dfrac{3\beta}{4s}}{1+\dfrac{1}{4\sqrt{s}}-\dfrac{\beta}{4s}}\xi\right). \qquad (3.9)$$

Раскладывая показатель степени экспоненты в выражении (3.9) в ряд по отрицательным степеням параметра s и ограничиваясь двумя членами разложения, получим окончательное выражение для изображения напряжения:

$$\bar{\sigma} = I^* \frac{1}{s}\exp\left[-\left(s+\frac{\sqrt{s}}{2}\right)\xi\right]\exp\left[\left(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{8}\right)\xi\right]. \qquad (3.10)$$

Пользуясь таблицей преобразования Лапласа [4], получим следующий оригинал изображения (3.10):

$$\sigma = I^* \exp\left[-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{8}\right)\xi\right] erfc\left(\frac{\xi}{4\sqrt{\tau-\xi}}\right), \qquad (3.11)$$

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\exp\left(-x^2\right)dx.$$

Получившееся решение (3.11) уравнения погранслоя в окрестности фронта волны с мгновенной скоростью (3.8) совпадает с асимптотикой точного решения (1.8) в зоне IV, полученной в [3].

На рис. 3 представлены графики зависимости приведенных значений напряжения σ/I^* от продольной координаты ξ для $\tau = 10$, $\beta = 1{,}25$. Сплошная линия соответствует графику точного решения (формула (1.8)), пунктирная линия – графику приближённого решения (формула (3.11)).

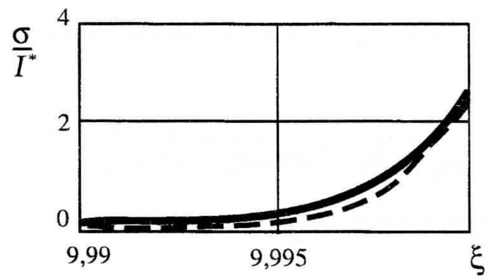

Рис. 3

Библиографический список

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1974.

2. *Коссович Л.Ю., Сухоловская М.С.* Решение задачи о нестационарных продольных волнах в тонком вязкоупругом стержне // Механика деформируемых сред: Межвуз. науч. сб. Саратов, 2002. Вып. 14. С. 93–98.

3. *Rossikhin, Shitikova.* Applications of fractional calculus to dynamic problems // Appl. Mech. Rev. 1997. V. 50, № 1. С. 16–18.

4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М., 1979.