Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00083), программы «Университеты России» (проект УР 04.01.374) и программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1).

Библиографический список

1. *Милнор Дж.* Голоморфная динамика / Пер. с англ. Ижевск, 2000 (*Milnor J.* Dynamics in One Complex Variable. Vieweg, 2000) .

2. *Bargmann D.* Conjugations on rotation domains as limit functions of the geometric means of the iterates // Annales Academi Scientiarum Fennic. Mathematica. 1998. V. 23. P. 507–524.

3. *Beardon A.F.* Iteration of Rational Functions. N.Y., 1991.

4. *Carleson L., Gamelin T.W.* Complex Dynamics. N.Y., 1993.

5. *Еременко А.Э., Любич М.*Ю. Динамика аналитических отображений // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 3. С. 1–70.

6. *Bergweiler W.* An introduction to complex dynamics // Textos de Matematica Universidade de Coimbra. 1995. Ser. B. № 6. P. 1–37.

7. *Bergweiler W.* Iteration of meromorphic functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 29, № 2. P. 151–188.

8. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.

9. *Kriete H.* Approximation of indifferent cycles // Math. Gottingensis: preprint series. Gottingen, 1996. № 3.

10. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. М., 1966.

11. *Douady A.* Does the Julia set depend continuously on the polynomial? // Proc. Symp. in Appl. Math. 1994. V. 49. P. 91–138.

12. *Kriete H.* Continuity of filled-in Julia sets and the closing lemma // Nonlinearity. 1996. V. 9. P. 1599–1608.

13. *Соболь И.М.* Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М., 1969.

14. *Неванлинна Р.* Униформизация. М., 1955.

15. *Duren P.L.* Univalent functions. N.Y., 1983.

16. *Pommerenke Ch.* Boundary Behaviour of Conformal maps. N.Y., 1992.

17. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. М., 1967. Т. I.

18. *Брюно А.Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. 1971. V. 25. С. 119–262.

УДК 517.5

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО СПЛАЙНА ПО ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКЕ

Ю.В. Куприянова, С.Ф. Лукомский

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: lukomskiisf@info.sgu.ru

В статье строится Эрмитов сплайн на треугольнике, для которого оценка погрешности его производной в направлении любой стороны треугольника обратно пропорциональна длине этой стороны.

On optimal choice of interpolation spline on triangular net

Yu.V. Kupriyanova, S.F. Lukomskiy

In this paper we find a Hermite Spline on atriangle for the approximation error of its derivatives with respect to a side of this triangle are inversely proportional to length of this side.

Введение

Пусть $\left(T_j\right)_{j=1}^{m}$ – треугольная сетка на плоскости, и $Q_j(x)$ – многочлен Эрмита, интерполирующий функцию f и ее производные 1-го порядка на треугольнике T_j. Такой многочлен определен неоднозначно и, кроме того, функция $Q(x)$, совпадающая с Q_j на каждом T_j, не принадлежит классу C^1 на объединении $\bigcup\limits_{j=1}^{m} T_j$. Чтобы добиться дифференцируемости на границах [1] обычно в каждом треугольнике T_j выбирают точку P_j и строят интерполяционные многочлены Эрмита на каждом из трех полученных треугольников, составляющих T_j. Изменяя параметры, можно получить интерполирующую функцию класса C^1 на $\bigcup T_j$. Для простоты вычислений точку P_j выбирают как центр тяжести треугольника T_j. В этой связи возникает вопрос об оптимальном выборе точки P_j.

В данной работе мы рассмотрим вопрос об оценке производной полученного многочлена Эрмита в зависимости от выбора точки P_j. При доказательстве мы пользуемся оценкой для производных интерполяционного многочлена в направлениях, совпадающих со сторонами треугольника T_j. Отметим, что обычно получают оценки для максимума производных по направлениям [2, 3]. Авторам известна лишь одна работа, в которой была попытка оценить производные по направлениям, в зависимости от этих направлений [4], но для многочленов высоких степеней.

Отметим, что результаты первого параграфа принадлежат Ю.В. Куприяновой, результаты второго параграфа – С.Ф. Лукомскому.

1. Интерполяционный сплайн Эрмита на треугольнике и его производная по направлению

Пусть $\Delta = (P_1P_2P_3)$ – двумерный симплекс, и точка $x \in \Delta$ задана своими барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3), функция $f(x)$ определена на Δ.

Пусть далее

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{\overrightarrow{P_iP_j}}{\left|P_iP_j\right|} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

единичные векторы. Многочлен

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3} f(P_i)x_i^3 + 3\cdot\sum_{i\neq j} f(P_i)x_i^2x_j + \sum_{1\le i<j\le 3}\left|P_iP_j\right|\left(\frac{\partial f(P_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}}x_i + \frac{\partial f(P_j)}{\partial \mathbf{e}_{ji}}x_j\right)x_ix_j + 6a_{111}x_1x_2x_3 \tag{1.1}$$

является интерполяционным для функции $f(x)$ в том смысле, что

$$f(P_i) = Q(P_i) \quad (i = 1,2,3), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial f(P_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} = \frac{\partial Q(P_i)}{\partial \mathbf{e}_{ij}} \quad (i = 1,2,3;\ j \neq i). \tag{1.3}$$

Причем условия (1.2) и (1.3) выполнены при любом a_{111}.

Теорема 1. *Если* $f(x) = (x_1, x_2, x_3)$ *имеет непрерывные производные второго порядка по направлениям, то при*

$$6a_{111} = f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)$$

для производных $\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{e}_{ij}}$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{ij}}\right| \le 4\cdot\frac{\operatorname{diam}^2(\Delta)}{\left|P_iP_j\right|}\cdot\sup_{\xi,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \mathbf{e}_1\,\partial \mathbf{e}_2}\right|.$$

Доказательство. Будем оценивать

$$\left|\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right|.$$

Остальные производные оцениваются аналогично.

Так как x_1, x_2, x_3 – барицентрические координаты, то

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} = \frac{1}{|P_1P_2|}\left(\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right) = a_{111}(x_1x_3 - x_2x_3)\frac{6}{|P_1P_2|} + \frac{6(f(P_2)-f(P_1))}{|P_1P_2|}x_1x_2 +$$
$$+\frac{6}{|P_1P_2|}(f(P_2)x_2 - f(P_1)x_1)x_3 + \frac{\partial f(P_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}}(x_1^2 - 2x_1x_2) + \frac{\partial f(P_2)}{\partial \mathbf{e}_{21}}(2x_1x_2 - x_2^2) + \tag{1.4}$$
$$+\frac{|P_3P_2|}{|P_1P_2|}\frac{\partial f(P_2)}{\partial \mathbf{e}_{23}}2x_2x_3 - \frac{|P_3P_1|}{|P_2P_1|}\frac{\partial f(P_1)}{\partial \mathbf{e}_{13}}2x_1x_3 + \frac{|P_2P_3|}{|P_2P_1|}\frac{\partial f(P_3)}{\partial \mathbf{e}_{32}}x_3^2 - \frac{|P_3P_1|}{|P_2P_1|}\frac{\partial f(P_3)}{\partial \mathbf{e}_{31}}x_3^2.$$

Так как

$$\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_{32}\frac{|P_3P_2|}{|P_1P_2|} - \mathbf{e}_{31}\frac{|P_3P_1|}{|P_2P_1|},$$

то

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{32}}\frac{|P_3P_2|}{|P_1P_2|} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{31}}\frac{|P_3P_1|}{|P_2P_1|}. \tag{1.5}$$

Учитывая (1.5) и заменяя $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_{12}}$ на $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_{12}}\cdot(x_1+x_2+x_3)^2$, находим:

$$\left|\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right| = \left(\frac{6a}{|P_1\ P_2|}x_1x_3 - \frac{6f(P_1)}{|P_1\ P_2|}x_1x_3 - \frac{|P_1\ P_3|}{|P_1\ P_2|}\frac{\partial f(P_1)}{\partial \mathbf{e}_{13}}\cdot 2x_1x_3 - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\cdot 2x_1x_3\right) +$$
$$+\left(\frac{6f(P_2)}{|P_1\ P_2|}x_2x_3 - \frac{6a_{111}}{|P_1\ P_2|}x_2x_3 + \frac{|P_2P_3|}{|P_1\ P_2|}\frac{\partial f(P_2)}{\partial \mathbf{e}_{23}}\cdot 2x_2x_3 - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\cdot 2x_2x_3\right) +$$
$$+\left(\frac{\partial f(P_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right)x_1^2 + \left(\frac{\partial f(P_2)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right)x_2^2 + \left(\frac{\partial f(P_3)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right)x_3^2 + \tag{1.6}$$
$$+\left(\frac{6}{|P_1\ P_2|}(f(P_2)-f(P_1)) - 2\cdot\frac{\partial f(P_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - 2\cdot\frac{\partial f(P_2)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - 2\cdot\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right)x_1x_2 =$$
$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4.$$

Будем оценивать Σ_i (i = 1, 2, 3, 4). Вначале оценим Σ_4. Дважды используя теорему о среднем, получаем:

$$\Sigma_4 = \left|6\frac{\partial f(\xi_{12})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - 2\cdot\frac{\partial f(P_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - 2\cdot\frac{\partial f(P_2)}{\partial \mathbf{e}_{12}} - 2\cdot\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right|x_1x_2 \le$$
$$\le\left(\left|\frac{\partial f(\xi_{12})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right| + \left|\frac{\partial f(\xi_{12})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(P_2)}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right| + \left|\frac{\partial f(\xi_{12})}{\partial \mathbf{e}_{12}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{12}}\right|\right)\cdot 2x_1x_2 \le$$

$$\le 2\sup_{\xi,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\mathbf{e}_1\partial\mathbf{e}_2}\right|\left(|P_1P_2|+\max\left(|P_1P_3|,|P_2P_3|\right)\right)x_1x_2\le 4x_1x_2\cdot\mathrm{diam}(\Delta)\cdot\sup_{\xi,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\mathbf{e}_1\partial\mathbf{e}_2}\right|.$$

Для Σ_3 очевидно имеем:

$$\Sigma_3\le 4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\cdot\mathrm{diam}(\Delta)\cdot\sup_{\xi,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\mathbf{e}_1\partial\mathbf{e}_2}\right|.$$

Для окончательного определения $Q(x)$ положим $6a_{111}=f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)$. Тогда

$$\Sigma_1=x_1x_3\left|2\cdot\frac{f(P_2)-f(P_1)}{|P_1P_2|}+2\cdot\frac{f(P_3)-f(P_1)}{|P_1P_2|}-2\cdot\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{e}_{12}}-2\cdot\frac{|P_1P_3|}{|P_1P_3|}\cdot\frac{\partial f(P_1)}{\partial\mathbf{e}_{13}}\right|\le$$

$$\le 2x_1x_3\left(1+\frac{|P_1P_3|}{|P_1P_2|}\right)\cdot\mathrm{diam}(\Delta)\cdot\sup_{\xi,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\mathbf{e}_1\partial\mathbf{e}_2}\right|\le 4x_1x_3\cdot\frac{\mathrm{diam}^2(\Delta)}{|P_1P_2|}\cdot\sup_{\xi,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\mathbf{e}_1\partial\mathbf{e}_2}\right|.$$

Аналогично,

$$\Sigma_2\le 4x_2x_3\cdot\frac{\mathrm{diam}^2(\Delta)}{|P_1P_2|}\cdot\sup_{\xi,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\mathbf{e}_1\partial\mathbf{e}_2}\right|.$$

Подставляем найденные оценки в (1.6), получаем окончательно

$$\left|\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{e}_{ij}}-\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{e}_{ij}}\right|\le 4\cdot\frac{\mathrm{diam}^2(\Delta)}{|P_iP_j|}\cdot\sup_{\xi,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2}\left|\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\mathbf{e}_1\,\partial\mathbf{e}_2}\right|.$$

2. Оптимальный выбор параметра

Выберем в треугольнике $\Delta=(P_1P_2P_3)$ точку P_0, обозначим через Δ_k треугольник $\Delta_k=(P_0P_kP_{k+1})$ (k = 1, 2, 3). При k = 3 будем считать $P_{k+1}=P_1$ (т.е. 3+1=1). Пусть, как и ранее, $\mathbf{e}_{i,j}=\dfrac{\overrightarrow{P_iP_j}}{|P_iP_j|}$ $(i,j=0,1,2,3)$ и пусть $\mathbf{e}_{0,k}=\alpha_{k,k-1}\mathbf{e}_{0,k-1}+\alpha_{k,k+1}\mathbf{e}_{k,k+1}$.

При $k=3$ считаем $k+1=1$, а при $k=1$ считаем $k-1=3$. Этого соглашения будем придерживаться и в дальнейшем.

Барицентрические координаты в Δ_k будем обозначать через x_0, x_k, x_{k+1}. В каждом треугольнике Δ_k записываем интерполяционный многочлен Эрмита, определенный ранее формулами (1.1), т.е.

$$Q_k(\mathbf{x})=f(P_0)x_0^3+f(P_k)x_k^3+f(P_{k+1})x_{k+1}^3+6a_{111}^{(k)}x_0x_kx_{k+1}+$$

$$+3\sum_{(i,j)\in I_k}x_ix_j\left(f(P_i)x_i+f(P_j)x_j\right)+\sum_{(i,j)\in I_k}|P_iP_j|\left(\frac{\partial f(P_i)}{\partial\mathbf{e}_{i,j}}x_i+\frac{\partial f(P_j)}{\partial\mathbf{e}_{j,i}}x_j\right)x_ix_j,$$

где $I_k=\{(0,k),(k,k+1),(k+1,0)\}$.

Условия гладкости на отрезке $[P_0P_k]$ запишем в виде

$$\frac{\partial Q_k(x_0,x_k,0)}{\partial\mathbf{e}_{0,k}}=\frac{\partial Q_k(x_0,x_k,0)}{\partial\mathbf{e}_{0\ k+1}}\alpha_{k,k+1}+\frac{\partial Q_{k-1}(x_0,0,x_k)}{\partial\mathbf{e}_{0,k-1}}\alpha_{k,k-1}.\tag{2.1}$$

Вычислим производные в (2.1). Учитывая равенство

$$\frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}} = \frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{k,k+1}} \frac{|P_k P_{k+1}|}{|P_0 P_{k+1}|} - \frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{k,0}} \frac{|P_0 P_k|}{|P_0 P_{k+1}|}$$

для производной $\frac{\partial Q_k}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}}$, имеем

$$\frac{\partial Q_k(x_0, x_k, 0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}} = \frac{1}{|P_0 P_{k+1}|}(6a_{111}^{(k)} x_0 x_k + |P_{k+1} P_0| \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}} x_0^2 +$$
$$+ \frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}} |P_0 P_k| x_k^2 - \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} |P_0 P_k| 2x_0 x_k - 6f(P_0) x_o x_k). \tag{2.2}$$

Аналогично, с помощью равенства

$$\frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}} = \frac{|P_{k-1} P_k|}{|P_0 P_{k-1}|} \frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{k,k-1}} - \frac{|P_k P_0|}{|P_0 P_{k-1}|} \frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{k,0}}$$

имеем

$$\frac{\partial Q_{k-1}(x_0, 0, x_k)}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}} = \frac{1}{|P_0 P_{k-1}|}(6a_{111}^{(k-1)} x_0 x_k + \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}} |P_0 P_{k-1}| x_0^2 +$$
$$+ \frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}} |P_0 P_{k-1}| x_k^2 - \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0\, k}} |P_0 P_k| 2x_0 x_k - 6f(P_0) x_o x_k). \tag{2.3}$$

Наконец,

$$\frac{\partial Q_k(x_0, x_k, 0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} = \frac{6}{|P_0 P_k|}(f(P_k) - f(P_0)) \cdot x_0 x_k + \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} x_0^2 + 2x_0 x_k \left(\frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{k,0}} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} \right) + \frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{k,0}} x_k^2. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.2)–(2.4) в (2.1) для нахождения коэффициентов $6a_{111}^{(k)}$, получаем систему уравнений

$$\frac{6}{|P_0 P_k|}(f(P_k) - f(P_0)) - 2\left(\frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} \right) = \frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0 P_k|}\left(6a_{111}^{(k-1)} - 6f(P_0) - 2|P_0 P_k| \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} \right) +$$
$$+ \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0 P_k|}\left(6a_{111}^{(k)} - 6f(P_0) - 2|P_0 P_k| \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} \right), \tag{2.5}$$

которую запишем в виде

$$6a_{111}^{(k)} \frac{\alpha_{k+1,k}}{|P_0 P_k|} + 6a_{111}^{(k+1)} \frac{\alpha_{k+1,k-1}}{|P_0 P_{k-1}|} = \beta_{k+1} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{2.6}$$

где

$$\beta_k = \frac{6}{|P_0 P_k|}(f(P_k) - f(P_0)) - 2\left(\frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} + \gamma_k \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} \right) + 2|P_0 P_k| \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} \left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0 P_{k-1}|} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0 P_{k+1}|} \right) + 6f(P_0)\left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0 P_{k-1}|} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0 P_{k+1}|} \right)$$

$(k = 1, 2, 3; \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \gamma_3 = -1)$.

Обозначим матрицу системы (2.6) через A. Нетрудно посчитать, что

$$\det A = \frac{-2}{\prod_{k=1}^{3} |P_0P_k|},$$

и поэтому система (2.6) имеет единственное решение $6a_{111}^{(1)}, 6a_{111}^{(2)}, 6a_{111}^{(3)}$.

Для формулировки следующей теоремы введем дополнительные обозначения. Обозначим через δ_k угол между векторами $\overrightarrow{P_0P_k}$ и $\overrightarrow{P_0P_{k+1}}$ в направлении против часовой стрелки и обозначим

$$M_\delta = \max_{1\le i,j\le 3} \left|\frac{\sin\delta_i}{\sin\delta_j}\right|,$$

$$M_d = \max_{1\le i,j\le 3} \frac{|P_0P_i|}{|P_0P_j|}.$$

Теорема 2. *Пусть f имеет в Δ непрерывные производные 2-го порядка по направлениям, т.е. производные вида $\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{e}_1 \partial \mathbf{e}_2}$. Пусть $Q_k(x)$ определены так, чтобы выполнялись условия гладкости (2.1). Тогда в треугольнике $\Delta_k = (P_0P_kP_{k+1})$ справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\partial Q_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{0,j}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{0,j}}\right| \le \frac{\operatorname{diam}^2(\Delta)}{|P_0P_j|} \sup_{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2} \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{e}_1 \partial \mathbf{e}_2}\right\|_{C(\Delta)} \left(4 + 6M_d^2 M_\delta^3\right),$$

где $\operatorname{diam}\Delta$ – *диаметр треугольника* Δ.

Доказательство. Систему (2.5) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|}(6a_{111}^{(k)} - 2f(P_0) - 2f(P_k) - 2f(P_{k+1})) + \frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|}(6a_{111}^{(k-1)} - 2f(P_0) - 2f(P_{k-1}) - 2f(P_k)) = \frac{6}{|P_0P_k|}(f(P_k) - \\
&- f(P_0)) - 2\left(\frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}}\right) + 2|P_0P_k|\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}}\left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|}\right) + 6f(P_0)\left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|}\right) - \\
&-2f(P_0)\left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|}\right) - 2f(P_k)\left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|}\right) - 2f(P_{k-1})\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|} - 2f(P_{k+1})\frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$(k = 1,2,3)$.

Обозначим правую часть в (2.7) через R_k. Используя теорему о среднем, R_k записываем в виде

$$\begin{aligned}
R_k = {} & 6\frac{\partial f(\xi_{k,0})}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} - 2\frac{\partial f(P_k)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} - 2\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} + 2|P_0P_k|\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}}\left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|}\right) + \\
& +2(f(P_0) - f(P_k))\left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|}\right) + 2f(P_0)\left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|}\right) - \\
& -2f(P_{k-1})\frac{\alpha_{k,k-1}}{|P_0P_{k-1}|} - 2f(P_{k+1})\frac{\alpha_{k,k+1}}{|P_0P_{k+1}|},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\xi_{k,0} \in [P_0P_k]$. Еще раз применяя теорему о среднем, преобразуем (2.8) к виду

$$R_k = 2\frac{\partial^2 f(\xi_{k,0}^{''})}{\partial^2 \mathbf{e}_{0,k}} | P_0\xi_{k,0} | -2\frac{\partial^2 f(\xi_{k,0}^{'})}{\partial^2 \mathbf{e}_{0,k}} | P_k\xi_{k,0} | +2\frac{\partial f(\xi_{k,0})}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} +$$

$$+2 | P_0P_k | \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} - \frac{\partial f(\xi_{k,0})}{\partial \mathbf{e}_{0,k}}\right)\left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{| P_0P_{k-1} |} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{| P_0P_{k+1} |}\right) + 2\frac{\alpha_{k,k-1}}{| P_0P_{k-1} |}(f(P_0) -$$

$$-f(P_{k-1})) + 2\frac{\alpha_{k,k+1}}{| P_0P_{k+1} |}(f(P_0) - f(P_{k+1})) = 2\frac{\partial^2 f(\xi_{k,0}^{''})}{\partial^2 \mathbf{e}_{0,k}} | P_0\xi_{k,0} | -$$

$$-2\frac{\partial^2 f(\xi_{k,0}^{'})}{\partial^2 \mathbf{e}_{0,k}} | P_k\xi_{k,0} | +2 | P_0P_k | \frac{\partial^2 f(\xi_{k,0}^{''})}{\partial^2 \mathbf{e}_{0,k}} | P_0\xi_{k,0} | \left(\frac{\alpha_{k,k-1}}{| P_0P_{k-1} |} + \frac{\alpha_{k,k+1}}{| P_0P_{k+1} |}\right) - \tag{2.9}$$

$$-2\alpha_{k,k-1}\frac{\partial f(\xi_{0,k-1})}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}} - 2\alpha_{k,k+1}\frac{\partial f(\xi_{0,k+1})}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}} + 2\frac{\partial f(\xi_{k,0})}{\partial \mathbf{e}_{0,k}}.$$

Сумму трех последних слагаемых преобразуем, прибавляя и вычитая производные

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}} \text{ и } \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}}.$$

Учитывая равенство

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} = \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}}\alpha_{k,k-1} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}}\alpha_{k,k+1},$$

имеем

$$-2\alpha_{k,k-1}\frac{\partial f(\xi_{0,k-1})}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}} - 2\alpha_{k,k+1}\frac{\partial f(\xi_{0,k+1})}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}} + 2\frac{\partial f(\xi_{k,0})}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} = -2\alpha_{k,k-1}\left(\frac{\partial f(\xi_{0,k-1})}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}} - \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}}\right) - \tag{2.10}$$

$$-2\alpha_{k,k+1}\left(\frac{\partial f(\xi_{0,k+1})}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}} - \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}}\right) - 2\left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k-1}}\alpha_{k,k-1} + \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,k+1}}\alpha_{k,k+1}\right) + 2\frac{\partial f(\xi_{k,0})}{\partial \mathbf{e}_{0,k}} =$$

$$= 2\alpha_{k,k-1}\frac{\partial^2 f(\xi_{0,k-1}^{'})}{\partial^2 \mathbf{e}_{0,k-1}} | P_0\xi_{0,k-1} | + 2\alpha_{k,k+1}\frac{\partial^2 f(\xi_{0,k+1}^{'})}{\partial^2 \mathbf{e}_{0,k+1}} | P_0\xi_{0,k+1} | + 2\frac{\partial^2 f(\xi_{k,0}^{'})}{\partial^2 \mathbf{e}_{0,k}} | \xi_{k,0}P_0 |.$$

Так как $\alpha_{k,k-1} = \dfrac{\sin\delta_k}{\sin(\delta_k + \delta_{k-1})}$, $\alpha_{k\ k-1} = \dfrac{\sin\delta_{k-1}}{\sin(\delta_k + \delta_{k-1})}$ и $\delta_k + \delta_{k-1} + \delta_{k+1} = 2\pi$,

то

$$\max_{i,j} | \alpha_{i,j} | = \max_{i,j}\left|\frac{\sin\delta_i}{\sin\delta_j}\right| = M_\delta. \tag{2.11}$$

Поэтому, с учетом (2.11), имеем

$$| R_k | \le 4 | P_0P_k | (1 + M_\delta M_d)\sup_{\mathbf{x}}\left|\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial^2 \mathbf{e}_{0,k}}\right|.$$

Обозначим

$$y_k = 6a_{111}^{(k)} - 2f(P_0) - 2f(P_k) - 2f(P_{k+1}),\quad Y = (y_1, y_2, y_3)^T,\quad R = (R_1, R_2, R_3)^T.$$

Систему (2.7) запишем в виде

$$AY = R. \tag{2.12}$$

Так как $\det A \neq 0$, то система (2.12) имеет решение Y и

$$\| Y \|_\infty \leq \| A^{-1} \|_\infty \cdot \| R \|_\infty. \tag{2.13}$$

Учитывая, что $\| R \|_\infty = \max\limits_k | R_k |$, из (2.13) имеем

$$| 6a_{111}^{(k)} - 2f(P_0) - 2f(P_k) - 2f(P_{k+1}) | \leq 4\mathrm{diam}(\Delta)(1 + M_\delta M_\mathrm{d}) \cdot \sup_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2} \right\|_{C(\Delta)} \cdot \left\| A^{-1} \right\|_\infty. \tag{2.14}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\| A^{-1} \|_\infty \leq \frac{3}{2} \mathrm{diam}(\Delta) M_\mathrm{d} M_\delta^2. \tag{2.15}$$

Используя (1.6), разность $\dfrac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{0,j}} - \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{0,j}}$ запишем в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{0,j}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{0,j}} = \frac{2f(P_0) + 2f(P_k) + 2f(P_{k+1})}{| P_0 P_j |} x_0 x_i - \frac{6f(P_0)}{| P_0 P_i |} x_0 x_i - 2 \frac{| P_0 P_i |}{| P_i P_j |} \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{0,i}} x_0 x_i - \\
- 2 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{0,j}} x_0 x_i + \frac{6f(P_j)}{| P_0 P_j |} x_i x_j - \frac{2f(P_0) + 2f(P_k) + 2f(P_{k+1})}{| P_0 P_j |} x_i x_j + 2 \frac{| P_i P_j |}{| P_0 P_j |} \frac{\partial f(P_i)}{\partial \mathbf{e}_{i,j}} x_i x_j - 2 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{0,j}} x_i x_j + \\
+ \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{o,j}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{o,j}} \right) x_0^2 + \left(\frac{\partial f(P_j)}{\partial \mathbf{e}_{o,j}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{o,j}} \right) x_j + \left(\frac{\partial f(P_i)}{\partial \mathbf{e}_{o,j}} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{o,j}} \right) x_i^2 + \\
+ \left(6 \frac{f(P_j) - f(P_0)}{| P_0 P_j |} - 2 \frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}_{o,j}} - 2 \frac{\partial f(P_j)}{\partial \mathbf{e}_{o,j}} - 2 \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{e}_{o,j}} \right) x_0 x_j + \\
+ \frac{x_0 x_i}{| P_0 P_j |} (6a_{111}^{(k)} - 2f(P_0) - 2f(P_k) - 2f(P_{k+1})) - \frac{x_j x_i}{| P_0 P_j |} (6a_{111}^{(k)} - 2f(P_0) - 2f(P_k) - 2f(P_{k+1})).
\end{gathered} \tag{2.16}$$

В (2.16) $i=k+1$ при $j=k$ и $i=k$ при $j=k+1$. Два последних слагаемых в (2.16) оцениваются с использованием (2.14) и (2.15). Сумма всех предыдущих оценивается по теореме 1. Соединяя вместе эти оценки, получаем утверждение теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00390), программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1) и программы «Университеты России» (проект 04.01.040).

Библиографический список

1. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
2. *Zenisek A.* Polynomial approximation on tetrahedrons in the finite element method. // J. Approx. Theory. 1973. № 7. P. 334–351.
3. *Zenisek A., Zlamanova J.* The finite element method with semiregular Hermite cubic tetrahedral elements // Algorithm 2000: Proc. of the 15th Conf. of Sci. Computing. Vysoke Tatry – Podbanske, Slovakia, 2000. P. 420–429.
4. *Baidakova N.V.* On some interpolation process by polynomials of degree at most $4m$+1 on the triangle // Rus. J. on num. anal. and math. modeling. 1999. V. 14. № 2. P. 87–107.