29. *Lagomasino (Lopez) G.* Survey on multipoint Pade approximation to Markov type meromorhic functions and asymptotic properties of the orthogonal polynomials generated by them // Lect. Notes Math. 1985. V.1171. P.309–316.

30. *Galluci M.A., Jones W.B.* Rational approximations corresponding to Newton series (Newton–Pade approximants) // J. Approx. Theory. 1976. V.17. P.366–392.

31. *Antoulas A.C., Anderson B.D.O.* A summary of recent results on the scalar rational interpolation problem // Proc. 25th IEEE Conf. Decis. Control. 1986. P.2187–2188.

32. *Baltensperger R.* Some results on linear rational trigonometric interpolation // Comput. Math. Appl. 2002. V.43. P.737–746.

33. *Berrut J.-P.* Rational functions for guaranteed and experimentally well-conditioned global interpolation // Comput. Math. Appl. 1988. V.15. P.1–16.

34. *Berrut J.-P., Mittelmann H.D.* Rational interpolation through the optimal attachement of poles to the interpolating polynomial // Numerical Algorithms. 2000. V.23. P.315–328.

35. *Fournier J.-D., Pindor M.* Rational interpolation from stochastic data: a new Froissarts phenomenon // Reliable Computing. 2000. V.6. P.391–409.

36. *Gutknecht M.H.* In what sense is the rational interpolation problem well posed? // Consr. Approx. 1990. V.6. P.437–450.

37. *Nananukul S., Gong W.-B.* Rational interpolation for stochastic DES's: convegence issues // IEEE Trans. Autom. Control. 1999. V.44. P.1070–1073.

38. *Ravi M.S.* Geometric methods in rational interpolation theory // Lin. Alg. Appl. 1997. V.258. P.159–168.

39. *Henry M.S., Swetits J.J.* Lebesgue and strong unicity constants for Zolotareff polynomials // Rocky Mount. J. Math. 1982. V.12. P.547–556.

40. *Лебедев В.И.* Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов // Матем. сб. 2004. Т. 195, №10. С. 21–66.

41. *Lukashov A.L.* On Chebyshev–Markov rational fractions over several intervals // J. Approx. Theory. 1998. V.95. P.333–352.

42. *Лукашов А.Л.* Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках // Изв. РАН. Сер. Матем. 2004. Т.68, №3. С.115–138.

43. *Ransford T.* Potential theory in the complex plane. Cambridge, 1995.

44. *Stahl H., Totik V.* General orthogonal polynomials. N.Y., 1992.

45. *Peherstorfer F., Steinbauer R.* Strong asymptotics of orthonormal polynomials with the aid of Green's function // SIAM J. Math. Anal. 2000. V.32. P.385–402.

46. *Totik V.* Polynomial inverse images and polynomial inequalities // Acta Math. 2001. V.187. P.139–160.

УДК 517.984

О РЕГУЛЯРНОСТИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

А.М. Минкин, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
E-mail: hromovap@info.sgu.ru

В статье дается подробное изложение положительного решения гипотезы Камке о регулярности самосопряженных краевых условий и устанавливается аналог теоремы Жордана–Дирихле о равномерной сходимости разложений в тригонометрические ряды Фурье для случая разложений по собственным функциям одного класса самосопряженных интегральных операторов.

On regularity of self-adjoint boundary conditions

A.M. Minkin, A.P. Khromov

In this paper we expound the favourable decision of Kamke's (Камке) hypothesis that self-adjoint boundary conditions are regular and we also establish an analogue of Jordan–Dirichlet theorem on uniform convergence of trigonometric Fourier series for the case of the expansions in eigen functions of self-adjoint integral operators from the certain class.

Введение

В 1948 году Э. Камке [1, с.360] высказал гипотезу о регулярности самосопряженных краевых условий для обыкновенного дифференциального оператора произвольного порядка с двухточечными краевыми условиями. Положительное решение ее для оператора четного порядка дал С. Салаф [1, 2] и для случая непостоянной весовой функции при старшей производной – Х. Фидлер [3], для случая оператора нечетного порядка – А.М. Минкин [4, 5]. В данной статье приводится подробное изложение этого материала, единообразное для любого порядка дифференциального оператора, принадлежащее с несущественными изменениями первому ученому. Второму автору статьи принадлежит приложение регулярности самосопряженных краевых условий для установления аналога теоремы Жордана–Дирихле о равномерной сходимости разложений в тригонометрические ряды Фурье на случай разложений по собственным функциям одного класса самосопряженных интегральных операторов.

1. Гипотеза Камке

Рассмотрим дифференциальный оператор:

$$l[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y,\ \ x\in[0,1] \tag{1}$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned}&\alpha_{10}y(0)+\ldots+\alpha_{1,n-1}y^{(n-1)}(0)+\beta_{10}y(1)+\ldots+\beta_{1,n-1}y^{(n-1)}(1)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\alpha_{n0}y(0)+\ldots+\alpha_{n,n-1}y^{(n-1)}(0)+\beta_{n0}y(1)+\ldots+\beta_{n,n-1}y^{(n-1)}(1)=0.\end{aligned} \tag{2}$$

В матричной форме граничные условия (2) запишутся так:

$$B\hat{y}=0, \tag{3}$$

где $\hat{y}=\{y(0),\ldots,y^{(n-1)}(0),y(1),\ldots,y^{(n-1)}(1)\}$ и B – матрица $n\times 2n$ ранга n.

Обозначим через $l^*[z]$ – сопряженное дифференциальное выражение. Тогда формула Лагранжа принимает вид

$$(l[y],z)=\int_0^1 l[y]\overline{z}\,dx=\int_0^1 y\overline{l^*[z]}\,dx+(A\hat{y},\hat{z})^{*}=(y,l\ [z])+(A\hat{y},\hat{z}). \tag{4}$$

Последнее скалярное произведение берется в пространстве C^{2n}.

Пример. Пусть $n=3$, $l[y]=y'''+p_1y''+p_2y'+p_3y$. Тогда

$$(l[y],z)=\int_0^1 l[y]\overline{z}\,dx=\int_0^1 y(x)\overline{[-z'''+(\overline{p}_1z)''-(\overline{p}_2z)'+\overline{p}_3z]}\,dx+$$

$$+\{(y''-p_1y+p_2y)\overline{z}+(-y'-p_1y)\overline{z}'+y\overline{z}'')\}\Big|_{x=0}^{x=1}=$$

$$=(y,l^*[z])+\left(\begin{pmatrix}-p'_1+p_2 & p_2 & 1\\ -p_1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ y'\\ y''\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{z}\\ \overline{z}'\\ \overline{z}''\end{pmatrix}\right)\Bigg|_0^1.$$

Таким образом, в этом случае

$$A=\begin{pmatrix} p'_1(0)-p_2(0) & -p_2(0) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_1(0) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p'_1(1)+p_2(1) & p_2(1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -p_1(1) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

И в общем случае

$$A=\left(\begin{array}{c|c} -A_0 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right),$$

где $A_1=\begin{pmatrix} & X & & 1 \\ & & -1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ (-1)^{n-1} & & & 0 \end{pmatrix}$ и A_0 с такой же структурой, что и A_1, буквой X обозначены возможные ненулевые элементы, образованные из коэффициентов дифференциального выражения $l[y]$.

Замечание. Если $l[y]=y^{(n)}$, то X в A_0 и A_1 равны нулю, т.е.

$$A_0=\begin{pmatrix} & 0 & & 1 \\ & & -1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ (-1)^{n-1} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 1. $S=\{\hat{y}\mid B\hat{y}=0\}$.

Таким образом, $S\subset C^{2n}$. Условие $B\hat{y}=0$ означает, что $\hat{y}$ ортогональна строкам матрицы B, если эти строки перевести в столбцы. Так как $rang\, B=n$, то линейно независимых строк матрицы B есть n, и поэтому S есть n-мерное пространство.

Лемма 1. *AS есть n-мерное пространство.*

Доказательство. А есть невырожденная матрица размера $2n\times 2n$. Поэтому A, рассматриваемая как оператор, переводит линейно независимую систему в линейно независимую. Значит, AS есть n-мерное пространство.

Определение 2. $S'=(AS)^{\perp}$.

По лемме 1 S' есть n-мерное пространство. Поэтому ортогональное дополнение к S' также n-мерное. Берем базис $(S')^{\perp}$: $d_1, \ldots, d_n$. Тогда

$$(d_j,\hat{z})=0 \quad (j=1,\ldots,n), \tag{5}$$

когда $\hat{z} \in S'$. Образуем матрицу

$$B' = \begin{pmatrix} d_1^T \\ \vdots \\ d_n^T \end{pmatrix}.$$

Тогда (5) запишутся таким образом:

$$B' z = 0, \tag{6}$$

т.е., $\hat{z} \in S' \Leftrightarrow B' \hat{z} = 0$. Конечно, $rang\, B' = n$.

Определение 3. Краевые условия $B'z = 0$ называются сопряженными.

Лемма 2. $(A\hat{y}, \hat{z}) = 0$ *для любой* $\hat{y} \in S$ *тогда и только тогда, когда* $B' z = 0$.

Доказательство. Условие $(A\hat{y}, \hat{z}) = 0$ для любой $\hat{y} \in S$ означает, что $\hat{z} \perp AS$, т.е. $\hat{z} \in (AS)^{\perp} = S'$, и наоборот.

Следствие. $(l[y], z) = (y, l^*[z])$ для любой $\hat{y}$ тогда и только тогда, когда $\hat{z} \in S'$, т.е. $B' z = 0$.

Определение 4. Краевые условия самосопряжены, если $S' = S$, т.е. $D_L = D_{L^*}$ (D_L – область определения оператора L).

Лемма 3 ([1]). *Условия* $B\hat{y} = 0$ *самосопряжены тогда и только тогда, когда* $BA^{-1}B^* = 0$.

Доказательство. Для прямоугольных матриц матрица B^* определяется из условия $(B\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}, B^*\hat{y})$ (эти скалярные произведения в разных пространствах).

Мы имеем

$$(B\hat{y}, \hat{z}) = (\hat{y}, B^*\hat{z}) \tag{7}$$

для любых $\hat{y} \in C^{2n}$ и $\hat{z} \in C^n$. Пусть $\hat{y} \in S$, т.е. $B\hat{y} = 0$. Тогда из (7) получаем

$$B^*\hat{z} \perp S.$$

Но $B^*\hat{z}$ есть n-мерное пространство. Значит,

$$B^*C^n = S^{\perp}. \tag{8}$$

Так как $S = S'$, то $(AS)^{\perp} = S$. Отсюда $AS = S^{\perp}$. Поэтому из (8) получаем

$$AS = B^*C^n. \tag{9}$$

Отсюда $S = A^{-1}B^*C^n$, но $BS = 0$. Тогда получаем $BA^{-1}B^*C^n = 0$. Отсюда $BA^{-1}B^* = 0$.

Обратно, пусть $BA^{-1}B^* = 0$. Тогда B^*C^n – есть n-мерное пространство. Тогда $A^{-1}B^*C^n$ – n-мерное пространство. Значит, из (9)

$$A^{-1}B^*C^n = S. \tag{10}$$

Отсюда $B^*C^n = AS$. Тогда $(B^*C^n)^{\perp} = (AS)^{\perp}$. Но $(AS)^{\perp} = S'$. Значит, $(B^*C^n)^{\perp} = S'$. В силу (7) $(B^*C^n)^{\perp} = S$. Значит, $S = S'$. Лемма доказана.

Еще заметим, что

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & 0 & & (-1)^{n} & & & & \\ & & (-1)^{n-1} & & & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & 0 & & \\ & 1 & & X & & & & \\ -1 & & & & & & & \\ \hline & & & & & 0 & & (-1)^{n-1} \\ & & & & & & (-1)^{n-2} & \\ & 0 & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & & & -1 & & X \\ & & & & 1 & & & \end{array}\right)$$

Матрицу B запишем в виде

$$B = (B_0^0, \ldots, B_{n-1}^0, B_0^1, \ldots, B_{n-1}^1),$$

где B_j^i – столбцы матрицы B. Рассмотрим матрицу $\left(B_{n-1}^0, B_{n-1}^1\right)$ из двух столбцов. Пусть $r_{n-1} = rang\left(B_{n-1}^0, B_{n-1}^1\right)$. Тогда $0 \le r_{n-1} \le 2$. Выполняем в матрице B следующие преобразования. Переходим от B к матрице B (новая матрица со старым обозначением), которая представляет собой матрицу, строки которой являются линейными комбинациями строк матрицы B, и так, чтобы ранг такой матрицы B был также n, и $\left(B_{n-1}^0, B_{n-1}^1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ b_{n-1}^0 & b_{n-1}^1 \end{pmatrix}$, где 0 – скаляры, а (b_{n-1}^0, b_{n-1}^1) – матрица размера $r_{n-1} \times 2$ (т.е. ее может и не быть, если $r_{n-1} = 0$) и $rang(b_{n-1}^0, b_{n-1}^1) = r_{n-1}$. Теперь из новой B вычеркнем r_{n-1} последних строк. В полученной матрице $\tilde{B}$ проделаем те же преобразования, что и выше, т.е. рассмотрим матрицу $\left(\tilde{B}_{n-2}^0, \tilde{B}_{n-2}^1\right)$ и перейдем от нее к $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ b_{n-2}^0 & b_{n-2}^1 \end{pmatrix}$, где 0 – скаляры, а (b_{n-1}^0, b_{n-1}^1) – матрица размера $r_{n-1} \times 2$, где $r_{n-2} = rang\left(\tilde{B}_{n-2}^0, \tilde{B}_{n-2}^1\right)$.

Продолжая этот процесс, получим, что матрица B — блочная:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_0^0 & & 0 & b_0^1 & & 0 \\ & b_1^0 & & & b_1^1 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ X & & b_{n-1}^0 & X & & b_{n-1}^1 \end{array}\right),$$

т.е. здесь $(x...b_s^0 0...0 : x...b_s^1 0...)$ представляет собой матрицу $r_s \times 2n$ ранга r_s, т.е. b_s^0 либо отсутствует, либо b_s^0 – число, либо b_s^0 – столбец из двух компонент. В итоге $r_s = (b_s^0, b_s^1)$ и $\sum_{s=0}^{n-1} r_s = n$.
Краевые условия $B\hat{y} = 0$ теперь запишутся так:

$$b_j^0 y^{(j)}(0) + x_0 + b_j^1 y^{(j)}(1) + x_1 = 0 \quad (0 \le j \le n-1),$$

где x_0 и x_1 – блоки, содержащие производные $< j$. Запишем теперь $B = (B_0, B_1)$, где

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_0^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & b_{n-1}^0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_0^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & b_{n-1}^1 \end{pmatrix},$$

и рассмотрим $BA^{-1}B^*$.

Имеем

$$BA^{-1}B^* = (B_0, B_1)\left(\begin{array}{c|c} -A_0^{-1} & 0 \\ \hline 0 & A_1^{-1} \end{array}\right)\begin{pmatrix} B_0^* \\ B_1^* \end{pmatrix} = (-B_0 A_0^{-1} \,|\, B_1 A_1^{-1})\begin{pmatrix} B_0^* \\ B_1^* \end{pmatrix} = -B_0 A_0^{-1} B_0^* + B_1 A_1^{-1} B_1^*.$$

Вычислим $B_1 A_1^{-1} B_1^*$. Рассмотрим сначала

$$B_1 A_1^{-1} = \begin{pmatrix} b_0^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & b_{n-1}^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 0 & & (-1)^{n-1} \\ & & (-1)^{n-2} & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & -1 & & X \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

(A_1^{-1} на блоки не разбиваем).

Пусть b_0^1 отсутствует. Тогда этой строки не будет и в произведении.

Пусть b_0^1 – число. Тогда первая строка в произведении будет обычной и она равна $(0, \ldots, 0\ (-1)^{n-1}\ b_0^1)$.

Пусть теперь b_0^1 – вектор из двух компонент. Тогда

$$(b_0^1, 0, \ldots, 0)\begin{pmatrix} & 0 & & (-1)^{n-1} \\ & & (-1)^{n-2} & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & -1 & & X \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

будет матрицей из двух строк, и поскольку b_0^1 – столбец, то

$$(b_0^1,0,\dots,0)\begin{pmatrix} & 0 & & (-1)^{n-1} \\ & & (-1)^{n-2} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & -1 & & X \\ 1 & & & \end{pmatrix} = (0,\dots,0,(-1)^{n-1}b_0^1)$$

и, таким образом,

$$B_1A_1^{-1} = \begin{pmatrix} b_0^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ X & & b_{n-1}^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 0 & & (-1)^{n-1} \\ & & (-1)^{n-2} & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & -1 & & X \\ 1 & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} & 0 & & (-1)^{n-1}b_0^1 \\ & & (-1)^{n-2}b_1^1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & -b_{n-2}^1 & & X \\ b_{n-1}^1 & & & \end{pmatrix}.$$

Лемма 4. *Если $\tilde{B}_1$ отличается от B_1 тем, что добавляется в качестве i-строки строка нулей (т.е. строк стало на одну больше), то*

$$\tilde{B}_1A_1^{-1}\tilde{B}_1^* = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & \end{pmatrix} i, \\ \qquad\qquad i \end{array}$$

т.е. i-строка произведения и i-столбец произведения состоят из нулей, и если вычеркнуть эти строку и столбец, то $\tilde{B}_1A_1^{-1}\tilde{B}_1^* = B_1A_1^{-1}B_1^*$.

Доказательство. Имеем

$$\tilde{B}_1A_1^{-1}\tilde{B}_1^* = \tilde{B}_1(A_1^{-1}\tilde{B}_1^*) = (0,\dots,0\ i\text{-е место})(A_1^{-1}\tilde{B}_1^*),$$

и отсюда i-строка $\tilde{B}_1A_1^{-1}\tilde{B}_1^*$ состоит из нулей. Аналогично,

$$\tilde{B}_1A_1^{-1}\tilde{B}_1^* = (\tilde{B}_1A_1^{-1})\tilde{B}_1^* = (\tilde{B}_1A_1^{-1})\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ i\end{array}$$

т.е. i-столбец $\tilde{B}_1A_1^{-1}\tilde{B}_1^*$ состоит из нулей.

Теперь заметим, что элементы остальных строк и столбцов получаются минуя i-строку и i-столбец.

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$B_1A_1^{-1}B_1^* = \begin{pmatrix} & 0 & & (-1)^{n-1}b_0^1b_{n-1}^{1*} \\ & & (-1)^{n-2}b_1^1b_{n-2}^{1*} & \\ & \iddots & & \\ & -b_{n-2}^1b_1^{1*} & & X \\ b_{n-1}^1b_0^{1*} & & & \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Обозначим через $\tilde{B}_1$ матрицу, получающуюся из B_1 добавлением строк из нулей на i-м месте, если $r_i = 0$. Тогда по предыдущей лемме

$$\tilde{B}_1A_1^{-1}\tilde{B}_1^* = \begin{pmatrix} & 0 & & (-1)^{n-1}b_0^1b_{n-1}^{1*} \\ & & (-1)^{n-2}b_1^1b_{n-2}^{1*} & \\ & \iddots & & \\ & -b_{n-2}^1b_1^{1*} & & X \\ b_{n-1}^1b_0^{1*} & & & \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Имеет место формула*

$$BA^{-1}B^* = \begin{pmatrix} & 0 & (-1)^{n-1}(b_0^1b_{n-1}^{1*} - b_0^0b_{n-1}^{0*}) \\ & \iddots & \\ & & X \\ b_{n-1}^1b_0^{1*} - b_{n-1}^0b_0^{0*} & & \end{pmatrix}.$$

Доказательство следует из того, что

$$BA^{-1}B^* = -B_0A_0^{-1}B_0^* + B_1A_1^{-1}B_1^*$$

и предыдущей леммы.

Следствие (необходимое условие самосопряженности). Если $BA^{-1}B^* = 0$, то

$$b_{n-1-k}^1b_k^{1*} - b_{n-1-k}^0b_k^{0*} = 0 \quad (k = 0, \ldots, n-1). \tag{11}$$

Лемма 6 ([1]). *Пусть краевые условия самосопряженные. Тогда:*

1) *если* $r_j = r_{n-1-j} = 1$, *то* $b_j^0\overline{b}_{n-1-j}^0 = b_j^1\overline{b}_{n-1-j}^1$;

2) *если* $r_j = 2$, *то* $r_{n-1-j} = 0$;

3) *случаи* $r_j = r_{n-1-j} = 0$ *и* $r_j = 0$, $r_{n-1-j} = 0$ *невозможны.*

Доказательство

1) Уже получено.

2) Пусть $r_j = 2$. Тогда существует невырожденная матрица C размера 2×2 такая, что $C(b_j^0, b_j^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. $Cb_j^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Cb_j^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда из (11) при $k = j$ имеем

$$b_j^0 b_{n-1-j}^{0*} = b_j^1 b_{n-1-j}^{1*}. \tag{12}$$

Умножая (12) на C, получим $Cb_j^0 b_{n-1-j}^{0*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} b_{n-1-j}^{0*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} b_{n-1-j}^{1*}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\beta_1, \beta_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\gamma_1, \gamma_2).$$

Отсюда $\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\beta_i = \gamma_i = 0$, т.е. $rang\ r_{n-1-j} = 0$.

3) Имеем $\sum_{j=0}^{n-1} r_j = n$, и пусть n – четное. Тогда

$$\underbrace{r_0 + \underbrace{r_1 + \underbrace{r_2 + \ldots + r_{n-3}} + r_{n-2}} + r_{n-1}}.$$

Имеем $r_k + r_{n-1-k} \le 2$. А тогда $\sum_{j=0}^{n-1} r_j \le \frac{n}{2} \cdot 2 = n$, но $\sum_{j=0}^{n-1} r_j = n$. Поэтому $r_k + r_{n-1-k} = 2$, и 3) доказано.

Дадим определение условий регулярности по Салафу. Пусть $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{n} j}$ ($j = 0, \ldots, n-1$). Положим

$$\omega_0 = \varepsilon_0,\ \omega_1 = \varepsilon_{n-1},\ \omega_2 = \varepsilon_1,\ \omega_3 = \varepsilon_{n-2}, \ldots$$

и выберем луч $\arg \rho = const$ так, чтобы

$$\operatorname{Re} \rho\omega_0 \ge \operatorname{Re} \rho\omega_1 \ge \ldots \ge \operatorname{Re} \rho\omega_{n-1}.$$

Пусть $n = 2m$. Представим

$$\begin{vmatrix} \omega_0^0 b_0^1 & \ldots & \omega_{m-2}^0 b_0^1 & \omega_{m-1}^0 (b_0^1 + b_0^0 s) & (b_0^0 + b_0^1 s)\omega_m^0 & \omega_{m+1}^0 b_0^0 & \ldots & \omega_{n-1}^0 b_0^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_0^{n-1} b_{n-1}^1 & \ldots & \omega_{m-2}^{n-1} b_{n-1}^1 & \omega_{m-1}^{n-1} (b_{n-1}^1 + b_{n-1}^0 s) & (b_{n-1}^0 + b_{n-1}^1 s)\omega_m^0 & \omega_{m+1}^{n-1} b_{n-1}^0 & \ldots & \omega_{n-1}^{n-1} b_{n-1}^0 \end{vmatrix} = \vartheta_0 + \vartheta_1 s + \vartheta_2 s^2.$$

Условие регулярности $\vartheta_0 \vartheta_2 \ne 0$.

Пусть $n = 2m + 1$. Тогда

$$\begin{vmatrix} \omega_0^0 b_0^1 & \ldots & \omega_{m-1}^0 b_0^1 & \omega_m^0 (b_0^0 + b_0^1 s) & \omega_{m+1}^0 b_0^0 & \ldots & \omega_{n-1}^0 b_0^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_0^{n-1} b_{n-1}^1 & \ldots & \omega_{m-1}^{n-1} b_{n-1}^1 & \omega_m^{n-1} (b_{n-1}^0 + b_{n-1}^1 s) & \omega_{m+1}^{n-1} b_{n-1}^0 & \ldots & \omega_{n-1}^{n-1} b_{n-1}^0 \end{vmatrix} = \vartheta_0 + \vartheta_1 s.$$

Условия регулярности в этом случае $\vartheta_0 \vartheta_2 \ne 0$. Обозначим

$$\vartheta(b^1, b^0) = \begin{vmatrix} \varepsilon_0^0 b_0^1 & \ldots & \varepsilon_{m-1}^0 b_0^1 & \varepsilon_m^0 b_0^0 & \ldots & \varepsilon_{n-1}^0 b_0^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_0^{n-1} b_{n-1}^1 & \ldots & \varepsilon_{m-1}^{n-1} b_{n-1}^1 & \varepsilon_m^{n-1} b_{n-1}^0 & \ldots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} b_{n-1}^0 \end{vmatrix},$$

ε_j – последовательно по кругу.

Лемма 7 ([1]). *Для четного n условия регулярны тогда и только тогда, когда* $\vartheta(b^1, b^0) \neq 0$. *Для нечетного n условия регулярны тогда и только тогда, когда* $\vartheta(b^1, b^0)\vartheta(b^0, b^1) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $n = 2m$. В этом случае

$$\vartheta_0 = \left|\omega_0^j b_j^1, \ldots, \omega_{m-1}^j b_j^1, \ \omega_m^j b_j^0, \ldots, \omega_{n-1}^j b_j^0\right|,$$

$$\vartheta_1 = \left|\omega_0^j b_j^1, \ldots, \omega_{m-2}^j b_j^1, \ \omega_{m-1}^j b_j^0, \ \omega_m^j b_j^1, \ \omega_{m+1}^j b_j^0, \ldots, \omega_{n-1}^j b_j^0\right|,$$

т.е. в ϑ_0 и ϑ_2 m столбцов, содержащих b^1, и m столбцов, содержащих b^0.

Кроме того, $\omega_0, \ldots, \omega_{m-1}$ занимают m мест подряд без пропусков и $\omega_0, \ldots, \omega_{m-2}, \omega_m$ также занимают m мест подряд без пропусков. Поэтому умножим j-ю строку на $e^{i\alpha j}$, где α – вещественное и такое, что $e^{i\alpha}\omega_0, \ldots, e^{i\alpha}\omega_{m-1}$, будут $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$,правда, может быть в другом порядке, т.е. некоторая их перестановка $e^{i\alpha}\omega_m, \ldots, e^{i\alpha}\omega_{n-1}$ представляет собой некоторую перестановку из $\varepsilon_m, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Каждый из столбцов с номером s из $0 \le s \le m-1$ есть

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{k_s}^0 b_0^1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{k_s}^{n-1} b_{n-1}^1 \end{pmatrix},$$

и k_s пробегают все номера из $0, \ldots, m-1$. Каждый из столбцов с номером s из $m \le s \le n-1$ станет таким

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{k_s}^0 b_0^0 \\ \vdots \\ \varepsilon_{k_s}^{n-1} b_{n-1}^0 \end{pmatrix},$$

причем k_s будет одним из номеров $m, \ldots, n-1$, когда s пробегает $m \le s \le n-1$, то и k_s пробегает все $m, \ldots, n-1$, и после надлежащей перестановки столбцов получим

$$e^{i\alpha(1+\ldots+n-1)}\vartheta_0 = \pm\vartheta(b^1, b^0).$$

Аналогично поступаем с ϑ_2. Получим

$$e^{i\beta(1+\ldots+n-1)}\vartheta_2 = \pm\vartheta(b^0, b^1),$$

и в этом случае лемма установлена.

Пусть теперь $n = 2m+1$. В этом случае

$$\vartheta_0 = \left|\omega_0^j b_j^1, \ldots, \omega_{m-1}^j b_j^1, \ \omega_m^j b_j^0, \ldots, \omega_{n-1}^j b_j^0\right|,$$

$$\vartheta_1 = \left|\omega_0^j b_j^1, \ldots, \omega_m^j b_j^1, \ \omega_{m+1}^j b_j^0, \ldots, \omega_{n-1}^j b_j^0\right|.$$

Тогда в ϑ_0 число столбцов с b^1 есть m, а число столбцов с b^0 есть $m + 1$. Поэтому получим

$$e^{i\alpha(1+\ldots+n-1)}\vartheta_0 = \pm\vartheta(b^1, b^0).$$

Это рассуждение, примененное к ϑ_1, дает

$$e^{i\beta(1+\ldots+n-1)}\vartheta_2 = \pm\vartheta(b^1, b^0).$$

Лемма полностью доказана.

Теорема 2. *Если условия самосопряжены, то они регулярны.*

Доказательство. Покажем, что

$$\vartheta(b^0,b^1)=\left|\varepsilon_j^0 b_j^0 \quad \varepsilon_j^1 b_j^0 \ \dots \ \varepsilon_j^{m-1} b_j^0 \quad \varepsilon_j^m b_j^1 \ \dots \cdot \varepsilon_j^{n-1} b_j^1\right| \neq 0.$$

Умножим первый столбец на 1, второй – на $e^{\frac{\pi i}{n}}$ и последний умножим на $\left(e^{\pi i/n}\right)^{n-1}$. Тогда из $\vartheta(b^0, b^1)$ получим

$$D(b^0,b^1)=\left|\gamma_j^0 b_j^0,\ \dots,\ \gamma_j^{m-1} b_j^0,\ \gamma_j^m b_j^1,\dots,\gamma_j^{n-1} b_j^1\right|,$$

где $\gamma_j=\varepsilon_j e^{\pi i/n}=e^{\pi i(2j+1)/n}$.

Условия самосопряженности дают:

1) $r_j + r_{n-1-j} = 2$; 2) $b_j^0\overline{b}_{n-1-j}^0 = b_j^1\overline{b}_{n-1-j}^1$.

Надо доказать, что $D(b^0, b^1) \neq 0$. Допустим противное, т.е. пусть $D(b^0, b^1) = 0$. Тогда столбцы определителя $D(b^0, b^1)$ будут линейно зависимы, т.е. существуют $x_0, \dots, x_{n-1}$ $(\Sigma\,|\,x_i\,| > 0)$, что

$$x_0\left(\gamma_j^0 b_j^0\right)+x_1\left(\gamma_j^1 b_j^0\right)+\dots+x_{m-1}\left(\gamma_j^{m-1} b_j^0\right)+x_m\left(\gamma_j^m b_j^1\right)+\dots+x_{n-1}\left(\gamma_j^{n-1} b_j^1\right)=0.$$

Подробно и по-другому перегруппируем:

$$\begin{cases} b_0^0\left(x_0\gamma_0^0+\dots+x_{m-1}\gamma_0^{m-1}\right)+b_0^1\left(x_m\gamma_0^m+\dots+x_{n-1}\gamma_0^{n-1}\right)=0, \\ b_1^0\left(x_0\gamma_1^0+\dots+x_{m-1}\gamma_1^{m-1}\right)+b_1^1\left(x_m\gamma_1^m+\dots+x_{n-1}\gamma_1^{n-1}\right)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n-1}^0\left(x_0\gamma_{n-1}^0+\dots+x_{m-1}\gamma_{n-1}^{m-1}\right)+b_{n-1}^1\left(x_m\gamma_{n-1}^m+\dots+x_{n-1}\gamma_{n-1}^{n-1}\right)=0, \end{cases}$$

или

$$b_j^0 P_0(\gamma_j)+b_j^1 P_1(\gamma_j)=0 \quad (j=0,\dots,n-1), \tag{13}$$

где $P_0(\gamma)$ и $P_1(\gamma)$ — многочлены:

$$P_0(\gamma) = x_0\gamma^0 + \dots + x_{m-1}\gamma^{m-1},\ P_1(\gamma) = x_m\gamma^m + \dots + x_{n-1}\gamma^{n-1}.$$

Лемма 8. Имеет место

$$P_0(\gamma_j)\overline{P}_0(\gamma_j)-P_1(\gamma_j)\overline{P}_1(\gamma_j)=0 \quad (j=0,\dots,n-1). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть сначала $r_j = 2$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $(b_j^0,b_j^1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Тогда из (13) получаем $P_0(\gamma_j) = 0$, $P_1(\gamma_j) = 0$ и тем самым в этом случае выполняется (14).

Пусть теперь $r_j = 1$. Тогда из 1) вытекает $r_{n-1-j} = 1$. Поэтому в этом случае мы имеем

$$b_j^0 P_0(\gamma_j)+b_j^1 P_1(\gamma_j)=0, \tag{15}$$

$$b_{n-1-j}^0 P_0(\gamma_{n-1-j})+b_{n-1-j}^1 P_1(\gamma_{n-1-j})=0. \tag{16}$$

Но $\gamma_{n-1-j} = e^{\frac{\pi i}{n}(2(n-1-j)+1)} = e^{-\frac{\pi i}{n}(2j+1)} = \overline{\gamma}_j$. Поэтому из (16) получаем

$$\overline{b}^0_{n-1-j}\overline{P}_0(\gamma_j) + \overline{b}^1_{n-1-j}\overline{P}_1(\gamma_j) = 0. \tag{17}$$

Значит, из (15) и (16) и (2) получаем

$$b^0_j\overline{b}^0_{n-1-j}P_0(\gamma_j)\overline{P}_0(\gamma_j) = b^1_j\overline{b}^1_{n-1-j}P_1(\gamma_j)\overline{P}_1(\gamma_j) = b^0_j\overline{b}^0_{n-1-j}P_1(\gamma_j)\overline{P}_1(\gamma_j),$$

т.е. имеем

$$b^0_j\overline{b}^0_{n-1-j}\left(P_0(\gamma_j)\overline{P}_0(\gamma_j) - P_1(\gamma_j)\overline{P}_1(\gamma_j)\right) = 0. \tag{18}$$

Пусть $b^0_j\overline{b}^0_{n-1-j} \neq 0$. Тогда из (18) следует (14). Пусть теперь $b^0_j\overline{b}^0_{n-1-j} \neq 0$, для определенности пусть $b^0_j = 0$. Тогда $b^1_j \neq 0$, и потому из $b^1_j\overline{b}^1_{n-1-j} = 0$ следует $b^1_{n-1-j} = 0$, а значит, $b^0_{n-1-j} \neq 0$. Поэтому из (15) и (17) получаем $P_1(\gamma_j) = 0$, $\overline{P}_0(\gamma_j) = 0$, и, значит, (14) выполняется.

Наконец, пусть $r_j = 0$. Тогда из 1) получаем $r_{n-1-j} = 2$. Значит, уже по доказанному

$$P_0(\gamma_{n-1-j})\overline{P}_0(\gamma_{n-1-j}) - P_1(\gamma_{n-1-j})\overline{P}_1(\gamma_{n-1-j}) = 0.$$

Отсюда

$$P_0(\overline{\gamma}_j)\overline{P}_0(\overline{\gamma}_j) - P_1(\overline{\gamma}_j)\overline{P}_1(\overline{\gamma}_j) = 0.$$

Переходим к сопряженным величинам:

$$\overline{P}_0(\gamma_j)\overline{\overline{P}}_0(\gamma_j) - \overline{P}_1(\gamma_j)\overline{\overline{P}}_1(\gamma_j) = 0.$$

Отсюда получаем (14). Лемма доказана.

Продолжаем доказательство теоремы 2. Положим $Q(\gamma) = \dfrac{1}{\gamma^m}P_1(\gamma)$. Тогда

$$P_0(\gamma)\overline{P}_0(\gamma) - P_1(\gamma)\overline{P}_1(\gamma) = P_0(\gamma)\overline{P}_0(\gamma) - \gamma^{2m}Q(\gamma)\overline{Q}(\gamma).$$

Пусть $n = 2m$. Положим

$$Z(\gamma) = P_0(\gamma)\overline{P}_0(\gamma) + Q(\gamma)\overline{Q}(\gamma).$$

Это многочлен степени $\le \max\,\{2(m-1),\, 2(n-1-m)\} = 2(m-1)$, и по лемме 8 с учетом $\gamma_j^{2m} = \gamma_j^n = e^{(2j+1)\pi i} = -1$ получим

$$Z(\gamma_j) = P_0(\gamma_j)\overline{P}_0(\gamma_j) + Q(\gamma_j)\overline{Q}(\gamma_j) = P_0(\gamma_j)\overline{P}_0(\gamma_j) + \frac{1}{\gamma^{2m}}P_1(\gamma_j)\overline{P}_1(\gamma_j) =$$

$$= P_0(\gamma_j)\overline{P}_0(\gamma_j) + P_1(\gamma_j)\overline{P}_1(\gamma_j) = 0 \quad (j = 0, \ldots, n-1).$$

Значит, $Z(\gamma) = 0$. Пусть γ – вещественны. Тогда

$$0 = Z(\gamma) = |P_0(\gamma)|^2 + |Q(\gamma)|^2.$$

Отсюда $P_0(\gamma) = Q(\gamma) = 0$ при вещественных γ, а значит, и при комплексных γ. Отсюда все $x_i = 0$. Противоречие.

Пусть теперь $n = 2m + 1$. Тогда

$$\gamma_j^{2m} = \gamma_j^{n-1} = e^{\frac{\pi i}{n}(2j+1)(n-1)} = e^{\pi i(2j+1)}e^{-\frac{\pi i}{n}(2j+1)} = -\overline{\gamma}_j = -\frac{1}{\gamma_j}.$$

Положим

$$Z(\gamma) = \gamma\, P_0(\gamma)\bar{P}_0(\gamma) + Q(\gamma)\bar{Q}(\gamma).$$

Тогда $Z(\gamma)$ — многочлен степени $\le \max\{1 + 2(m-1), 2(n-1-m)\} = \max\{2m-1, 2m\} = 2m = n-1$.

Далее,

$$Z(\gamma_j) = \gamma_j P_0(\gamma_j)\bar{P}_0(\gamma_j) + \frac{1}{\gamma_j^{2m}} P_1(\gamma_j)\bar{P}_1(\gamma_j) = \gamma_j (P_0(\gamma_j)\bar{P}_0(\gamma_j) - P_1(\gamma_j)\bar{P}_1(\gamma_j)) = 0 \quad \text{по лемме.}$$

Поэтому $Z(\gamma) = 0$, и при $\gamma > 0$ имеем

$$0 = Z(\gamma) = |\sqrt{\gamma} P_0(\gamma)|^2 + |Q(\gamma)|^2.$$

Отсюда $P_0(\gamma) = Q(\gamma) = 0$ при $\gamma > 0$, а потому и при любых комплексных γ. Отсюда $x_i = 0$ ($i = 0, \ldots, n-1$). Противоречие. Теорема доказана.

2. Равносходимость разложений по собственным функциям интегральных операторов

В статье [6] рассмотрен интегральный оператор

$$Af = \int_0^1 A(x,t) f(t)\, dt \qquad x \in [0,1], \tag{19}$$

ядро которого $A(x, t)$ симметрично: $A(x,t) = \overline{A(x,t)}$. Кроме того, предполагается, что выполнены условия:

а) при некотором натуральном n производные

$$A_{x^s t^j} = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t) \qquad (s, j = 0, \ldots, n)$$

непрерывны при $t \le x$ и $t \ge x$;

б) скачки

$$p_{sj}(t) = \Delta A_{x^s t^j}\Big|_{x=t} = A_{x^s t^j}\Big|_{x=t+0} - A_{x^s t^j}\Big|_{x=t-0}$$

принадлежат $C^{n-1-j}[0,1]$ ($j = \overline{0, n-1}$);

в) ноль не является собственным значением оператора A;

г) $\Delta A_{x^j}\Big|_{x=t} = i^n \delta_{j,n-1}$ ($j = 0, \ldots, n$), где δ_{jk} – символ Кронекера;

д) $\mathop{Var}\limits_{0\ \ x}^{1} A_{x^n(x,t)}$ ограничена по t.

При выполнении этих требований в [6] получен следующий результат **(теорема равносходимости)**: *существует такая последовательность номеров $\{k_l\}$, что для всякой функции $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\delta \in (0,1/2)$*

$$\lim_{l\to\infty} \left\| S_{k_l}(f) - \sigma_l(f) \right\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0, \tag{20}$$

где $S_k(f)$ и $\sigma_k(f)$ – частичные суммы рядов Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям оператора A и обычной тригонометрической системе (k – число членов).

Условия а), б), д) ослабить нельзя. Условие в) необходимо, а условие г) говорит о каноническом виде интегрального оператора, для которого имеет место равносходимость, точнее, если имеет место (19), то всегда можно указать такой интегральный оператор FORMULA с теми же собственными функциями, что и у оператора A, для которого выполняется г).

Теперь для самосопряженного оператора (16) с условиями а)–д) приведем такой результат.

Теорема 3. *Если* $f \in \overline{\Delta_A}$ (Δ_A *– область значения оператора A и* $\overline{\Delta_A}$ *— ее замыкание в* $C[0,1]$) *и* $\overset{1}{\underset{0}{V}} ar(f) < \infty$, *то* $f(x)$ *разлагается на* $[0,1]$ *в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям.*

Это есть аналог теоремы Жордана—Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье и получается методом, указанным в [6, 7], с существенным использованием результата, аналогичного теореме 2, и здесь не приводится из-за большого объема изложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-00169) и программы «Университеты России» (проект УР.04.01.041).

Библиографический список

1. *Salaff S.* Regular boundary conditions for ordinary differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V.134, № 2. P.355–373.

2. *Salaff S.* Regular boundary conditions for ordinary differential operators // Тез. крат. науч. сообщ. Секция 6. JCM. М., 1966. С.15.

3. *Fiedler H.* Zur Regularitat selbstadjungierte Randwertautgaben // Manuscripta Math. 1972. V.7., № 2. P.185–196.

4. *Минкин А.М.* Регулярность самосопряженных краевых условий // Матем. заметки. 1977. Т. 22, вып. 6. С. 835–846.

5. *Минкин А.М.* Теорема равносходимости для дифференциального оператора: Дис. ... канд. матем. наук. Саратов, 1982.

6. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости спектральных разложений самосопряженных интегральных операторов // Современные методы в теории краевых задач. Воронеж, 2000. Ч. 2. С.73–82.

7. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О сходимости разложений по собственным функциям в пространствах дифференцируемых функций // Интегральные преобразования и специальные функции: Информ. бюл. 2004. Т. 4, № 1. С.19–31.

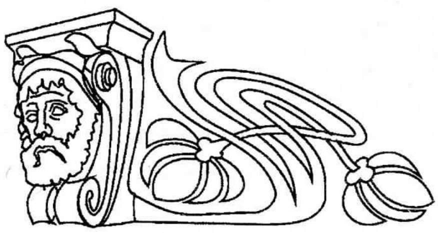
УДК 519.48

ПРОДОЛЖЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОСТИ НА МНОЖЕСТВО ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

В.В. Розен

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: rozenvv@info.sgu.ru

Предложен общий метод для продолжения упорядоченности на множество вероятностных мер. Он основан на наличии связи Галуа между всеми продолжениями упорядоченности на множество вероятностных мер и подмножествами изотонных отображений в числовую прямую. Продолжение порядка, которое определено множеством всех изотонных отображений, названо *каноническим.* Для канонического продолжения дано эффективное описание и найдены вероятностные меры, которые являются максимальными в выпуклых многогранниках вероятностных мер. Указаны некоторые приложения рассмотренных методов для задач принятия решений.



An extension of the ordering to the set of probability measures

V.V. Rozen

A general method for extension of the ordering to the set of the probability measured. It based on the Galois connection between all such extensions and subsets of isotone mappings of the given ordered set in the real numbers. The canonical extension is defined as extension determined by the set of all isotone mappings. For canonical extension, an effective description is given and the maximal measures in convex polyhedra are found. Some applications of considered methods for decision making problems are indicated.