УДК 519.872

О ЗАМКНУТЫХ СЕТЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЧИСЛОМ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

И.Е. Тананко
Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: tanatkoie@info.sgu.ru

Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания с возможными поломками в каждом приборе. Когда поломка имеет место в некотором приборе, все требования переходят в работоспособную систему обслуживания немедленно, и прибор отправляется на восстановление. Получено стационарное распределение вероятностей числа требований в системах обслуживания и показано, что решение имеет форму произведения.

About closed queuing networks with variable number of queues

I.E. Tananko

Consider a closed queueing network with the possibility of breakdowns at each server. When a breakdown occurs at one server, all customers there are transferred in queue with operational server immediately, and the server is then sent for repair. Steady-state probability of the queue sizes is obtained, and is shown to have a product form solution.

Сети массового обслуживания применяются в качестве математических моделей дискретных стохастических систем, имеющих ненадежные элементы. Например, в работе [1] исследуется маршрутизация требований в сети обслуживания с определенной вероятностью возникновения ошибки в момент завершения обслуживания требований. Анализу открытой сети обслуживания, в которой в момент отказа прибора уничтожаются требования, посвящена работа [2]. Приближенный метод анализа открытой сети обслуживания с независимыми отказами и восстановлениями систем обслуживания представлен в [3]. В работе [4] задача анализа ненадежной сети обслуживания сведена к решению задачи анализа классической замкнутой сети обслуживания. Целью данной работы является разработка метода анализа замкнутых сетей массового обслуживания с переменным числом систем обслуживания.

Пусть Γ — замкнутая сеть массового обслуживания, состоящая из I систем массового обслуживания (СМО) C_i, $i = 1, 2, \dots, I$, типа $M \mid M \mid 1$. В сети находится N требований одного класса. Переходы требований между системами обслуживания в процессе эволюции сети Γ определяются неприводимой маршрутной матрицей $\Theta = \theta(_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, I$. Обозначим $L = \{1, 2, \dots, I\}$ множество номеров систем обслуживания. Предполагается, что в каждой из систем обслуживания C_i, $i \in L$, в процессе функционирования сети Γ, может изменяться параметр функции распределения длительности обслуживания требований, последовательно принимая значения из множества $\{\mu_i, \bar{\mu}_i\}$, где $\mu_i > 0$ и $\bar{\mu}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, I$. *Состоянием структуры* сети массового обслуживания $\Gamma(m)$ назовем вектор $m = (m_i)$, где $m_i \in \{\mu_i, \bar{\mu}_i\}$ — состояние прибора системы массового обслуживания C_i, $i = 1, 2, \dots, I$. Систему C_i, $i \in L$, с $m_i > 0$ ($m_i = 0$) будем называть системой обслуживания с исправным прибором (с неисправным прибором) или просто исправной СМО (неисправной СМО). Множество состояний структур сети Γ обозначим Ω. Длительности использования системой C_i интенсивностей μ_i или $\bar{\mu}_i$ являются экспоненциально распределенными случайными величинами с параметрами α_i и β_i соответственно, $i = 1, 2, \dots, I$.

В момент перехода системы C_i, $i \in L$, из исправного в неисправное состояние происходят следующие события: элементы θ_{ij} и θ_{ji}, $j = 1, 2, \dots, I$, становятся равными нулю до момента восстановления прибора i-й системы обслуживания; все требования, находившиеся в системе C_i, поступают в систему обслуживания с исправным прибором или остаются в системе C_i, если в сети Γ остается только одна исправная СМО; маршрутные вероятности $\theta_{ji} > 0$ систем $C_j, j \in L$, распределяются между оставшимися в i-й строке ненулевыми элементами маршрутной матрицы Θ пропорционально их значениям.

Таким образом, порядок маршрутной матрицы $\Theta(m)$ равен числу ненулевых элементов вектора m. Общее число требований в сети обслуживания не меняется.

Сеть обслуживания $\Gamma(m)$, $m \in \Omega$, назовем сетью обслуживания с *определенной структурой*, если соответствующая этой сети маршрутная матрица является неприводимой. В противном случае сеть обслуживания назовем сетью обслуживания с *неопределенной структурой*. Полагаем, что в сети обслуживания с неопределенной структурой обслуживание требований не производится ни одной из систем обслуживания. Будем считать, что для каждого состояния структуры $m \in \Omega$ известна определенность структуры сети обслуживания Γ.

Пусть D — множество состояний структур, образующих сети $\Gamma(m)$ с определенной структурой, $F = \Omega/D$ — множество состояний структур, образующих сети $\Gamma(m)$ с неопределенной структурой, $P(D)$ и $P(F)$ — стационарные вероятности соответственно того, что сеть обслуживания имеет определенную и неопределенную структуру.

Очевидно, что наличие в сети Γ ненадежных систем обслуживания оказывает существенное влияние на процесс функционирования этой сети обслуживания.

Функционирование сети Γ можно рассматривать как два протекающих одновременно процесса: 1) процесс отказов и восстановлений систем массового обслуживания и 2) вложенный в него процесс обслуживания и переходов требований между системами сети обслуживания. Предполагается, что отказы и восстановления систем обслуживания независимы.

Пусть длительность переходного процесса, вызванного изменением состояния структуры, существенно меньше длительности пребывания сети обслуживания в любом из состояний структуры, т. е.

$$\min_i \mu_i >> \max_j \{\alpha_j, \beta_j\}.$$

Поэтому в дальнейшем, пренебрегая переходным процессом, будем считать, что стационарный режим функционирования сети обслуживания Γ наступает сразу с момента изменения ее параметров.

Найдем вероятностно-временные характеристики сети массового обслуживания с переменным числом систем обслуживания.

Вероятность $p_i(\mu_i)$ того, что система C_i находится в исправном состоянии и обслуживает требования с интенсивностью μ_i, определяется

$$p_i(\mu_i) = \alpha_i^{-1}/(\alpha_i^{-1} + \beta_i^{-1}) = \beta_i/(\alpha_i + \beta_i),\ i = 1, 2, \ldots, I.$$

Аналогично для системы C_i, находящейся в неисправном состоянии, справедливо выражение

$$p_i(\bar{\mu}_i) = \beta_i^{-1}/(\alpha_i^{-1} + \beta_i^{-1}) = \alpha_i/(\alpha_i + \beta_i),\ i = 1, 2, \ldots, I.$$

Вероятность того, что сеть Γ находится в состоянии структуры $m \in \Omega$, определяется

$$P(m) = \prod_{i=1}^{I} \frac{\gamma_i(m_i)}{\alpha_i + \beta_i}, \quad m \in \Omega, \tag{1}$$

где

$$\gamma_i(m_i) = \begin{cases} \alpha_i, & m_i = 0, \\ \beta_i, & m_i = \mu_i. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\sum_{m\in\Omega} P(m) = 1.$$

Стационарные вероятности $P(D)$ и $P(F)$ пребывания сети Г соответственно в множествах состояний структур D и F:

$$P(D) = \sum_{m\in D} P(m),\ P(F) = \sum_{m\in F} P(m).$$

Вероятности (1) используются в качестве весовых коэффициентов при вычислении вероятностно-временных характеристик сети Г.

Сеть обслуживания, пребывающая в состоянии структуры $m \in D$, является связной подсетью систем обслуживания C_i с $m_i > 0$. Из этого следует, что функционирование подсети $\Gamma(m)$ можно рассматривать как функционирование сети обслуживания с надежными системами обслуживания. Характеристики подсети $\Gamma(m)$, $m \in D$, могут быть вычислены известными методами [5].

Выражение для определения Y — искомой характеристики систем обслуживания или сети D, функционирующей в пространстве состояний структуры Г, имеет вид

$$Y = \frac{1}{P(D)} \sum_{m\in D} y(m)P(m), \tag{2}$$

где $y(m)$ — характеристика подсети $\Gamma(m)$. Характеристики сети Г, находящейся в пространстве состояний структуры Ω, определяются из выражения

$$Y = \sum_{m\in\Omega} y(m)P(m).$$

Математическое ожидание длительности пребывания сети Г в состоянии структуры m определяется из выражения

$$\mathrm{T}_m = \left[\sum_{i=1}^{I} \gamma_i(m_i)\right]^{-1}, \quad m \in \Omega.$$

Пример. Пусть Г — замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с одним классом требований, $I = 4$, $N = 6$, $\mu = (1.2, 1.25, 1.0, 1.1)$, $\bar{\mu} = (0.0, 0.0, 0.0, 0.0)$, $\alpha = (0.002, 0.001, 0.001, 0.002)$, $\beta = (0.02, 0.03, 0.03, 0.01)$, маршрутной матрицей

$$\Theta(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $m = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$.

Видно, что из всевозможных состояний структур сети Г только состояния $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, $(\mu_1, \mu_2, 0, \mu_4)$, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, 0)$, $(\mu_1, \mu_2, 0, 0)$ и $(0, \mu_2, \mu_3, 0)$ принадлежат множеству D.

Используя выражения (1) и (2), определим $\lambda = (\lambda_i)$ — вектор интенсивностей потоков требований в системы обслуживания — и

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i$$

— пропускную способность сети Γ: $\lambda = (0.722, 0.920, 0.581, 0.616)$, $\Lambda = 2.839$. Стационарные вероятности $P(D)$ и $P(F)$ равны соответственно 0,894 и 0,106.

Для сети массового обслуживания с числом систем обслуживания $I = 4$, числом требований в сети $N = 6$, вектором $\mu = (1.2, 1.25, 1.0, 1.1)$ и маршрутной матрицей (3), но имеющей абсолютно надежные системы обслуживания, характеристики принимают значения

$$\lambda = (0.842, 0.895, 0.537, 0.752),\ \Lambda = 3.026.$$

Из сравнения полученных результатов видно, что в сети обслуживания с ненадежными СМО наблюдается перераспределение потоков в системах обслуживания. Пропускная способность этой сети обслуживания меньше, чем в сети обслуживания с надежными СМО.

Рассмотренный класс сетей массового обслуживания с переменным числом систем обслуживания может быть использован в качестве моделей дискретных стохастических систем с сетевой структурой и ненадежными элементами (гибких производственных систем, сетей передачи данных, информационно-вычислительных сетей и т. п.).

Библиографический список

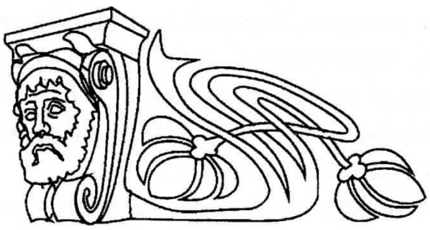
1. *Economides A.A., Silvester J.A.* Optimal routing in a network with unreliable links // IEEE INFOCOM'88. 1988. Aug. P. 288–297.
2. *Chao X.* A queueing network model with catastrophes and product form solution // Oper. Res. Let. 1995. V. 18. P. 75–79.
3. *Chakka R., Mitrani I.* Approximate solutions for open networks with breakdowns and repairs // Stochastic Networks — Theory and applications / Eds F.P. Kelli, S. Zachary, I. Ziedins. Oxford, 1996. Chapt. 16. P. 267–280.
4. *Vinod B., Altiok T.* Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality // J. Oper. Res. Soc. 1986. V. 37, N 3. P. 309–316.
5. *Митрофанов Ю.И.* Основы теории сетей массового обслуживания. Саратов, 1993.

УДК 519.21

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ КОНЕЧНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АВТОМАТОВ

В.А. Твердохлебов
Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ информатики
и информационных технологий
E-mail: vtverd@sgu.ssu.runnet.ru

В данной работе вводится новая геометрическая модель автомата и изложены методы анализа, синтеза, распознавания с использованием этой модели.



Geometrical images of finite state machines

V.A. Tverdokhlebov

In this work a new way of defining finite state machines (FSM) is being suggested. The discrete word geometry is built for that purpose, in which machine image is expressed as a set of lines. The methods of synthesis and analysis of geometrical images of FSMs and their features are researched. The new way of defining the FSMs allows analyzing the machine's behavior, excluding the exhausting recursive procedure of defining the initial fragments of machine functioning.

Разработка фрагмента теории геометрических образов автоматов является, по мнению автора статьи, необходимой для развития теории автоматов по крайней мере, при решении задач и проблем, связанных с анализом, синтезом и распознаванием конкретных форм поведения автоматов и законов функционирования автоматов. Такая «встреча» теории автоматов с геометрией согласуется с ролью и значением геометрии даже в специальных справочных изданиях, в которых обобщены и приведены наиболее общие представления о геометрии. Отмечается, что «взаимопроникновение геометрии и других областей математики столь тесно, что часто