— пропускную способность сети Г: $\lambda = (0.722, 0.920, 0.581, 0.616)$, $\Lambda = 2.839$. Стационарные вероятности $P(D)$ и $P(F)$ равны соответственно 0,894 и 0,106.

Для сети массового обслуживания с числом систем обслуживания $I = 4$, числом требований в сети $N = 6$, вектором $\mu = (1.2, 1.25, 1.0, 1.1)$ и маршрутной матрицей (3), но имеющей абсолютно надежные системы обслуживания, характеристики принимают значения

$$\lambda = (0.842, 0.895, 0.537, 0.752), \Lambda = 3.026.$$

Из сравнения полученных результатов видно, что в сети обслуживания с ненадежными СМО наблюдается перераспределение потоков в системах обслуживания. Пропускная способность этой сети обслуживания меньше, чем в сети обслуживания с надежными СМО.

Рассмотренный класс сетей массового обслуживания с переменным числом систем обслуживания может быть использован в качестве моделей дискретных стохастических систем с сетевой структурой и ненадежными элементами (гибких производственных систем, сетей передачи данных, информационно-вычислительных сетей и т. п.).

Библиографический список

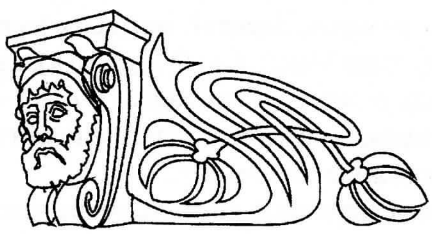
1. *Economides A.A., Silvester J.A.* Optimal routing in a network with unreliable links // IEEE INFOCOM'88. 1988. Aug. P. 288–297.
2. *Chao X.* A queueing network model with catastrophes and product form solution // Oper. Res. Let. 1995. V. 18. P. 75–79.
3. *Chakka R., Mitrani I.* Approximate solutions for open networks with breakdowns and repairs // Stochastic Networks — Theory and applications / Eds F.P. Kelli, S. Zachary, I. Ziedins. Oxford, 1996. Chapt. 16. P. 267–280.
4. *Vinod B., Altiok T.* Approximating unreliable queueing networks under the assumption of exponentiality // J. Oper. Res. Soc. 1986. V. 37, N 3. P. 309–316.
5. *Митрофанов Ю.И.* Основы теории сетей массового обслуживания. Саратов, 1993.

УДК 519.21

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ КОНЕЧНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АВТОМАТОВ

В.А. Твердохлебов
Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ информатики
и информационных технологий
E-mail: vtverd@sgu.ssu.runnet.ru

В данной работе вводится новая геометрическая модель автомата и изложены методы анализа, синтеза, распознавания с использованием этой модели.



Geometrical images of finite state machines

V.A. Tverdokhlebov

In this work a new way of defining finite state machines (FSM) is being suggested. The discrete word geometry is built for that purpose, in which machine image is expressed as a set of lines. The methods of synthesis and analysis of geometrical images of FSMs and their features are researched. The new way of defining the FSMs allows analyzing the machine's behavior, excluding the exhausting recursive procedure of defining the initial fragments of machine functioning.

Разработка фрагмента теории геометрических образов автоматов является, по мнению автора статьи, необходимой для развития теории автоматов по крайней мере, при решении задач и проблем, связанных с анализом, синтезом и распознаванием конкретных форм поведения автоматов и законов функционирования автоматов. Такая «встреча» теории автоматов с геометрией согласуется с ролью и значением геометрии даже в специальных справочных изданиях, в которых обобщены и приведены наиболее общие представления о геометрии. Отмечается, что «взаимопроникновение геометрии и других областей математики столь тесно, что часто границы оказываются условными» [1]. Здесь же указано важнейшее свойство геометрии, характеризующее такое влияние геометрии на теорию чисел, которое полностью относится и к теории автоматов: «некоторые предложения, почти очевидные при рассмотрении фигур в n-мерном пространстве, имеют глубокие следствия в теории чисел» [1]. Ещё одна из причин разработки геометрического подхода к теории автоматов отражена в замечании: «Общая роль геометрии в математике состоит также в том, что с нею связано идущее от пространственных представлений точное синтетическое мышление, часто позволяющее охватить в целом то, что достигается анализом и выкладками лишь через длинную цепь шагов» [1].

В классе динамических систем содержится подкласс конечных детерминированных систем в форме конечных детерминированных автоматов. Модель такого автомата была предложена в 1943 г. американскими учеными Мак-Каллоком и Питсом [2]. Эта модель была исторически включена в область приложений, содержащую объекты малой размерности. Модель сформировалась на явном указании всех элементов множеств состояний, входных и выходных сигналов. В связи с этим были разработаны способы задания модели: табличный, матричный, диаграммный.

Расширение области приложений и развитие теории автоматов привели к разделению конструктивного использования автоматных моделей и методического использования результатов теории автоматов. Конструктивное применение автоматных моделей ограничивалось или приложением к объектам малых размеров множеств сигналов и состояний, или к решению только некоторых конкретных вопросов. Например, структурная теория автоматов позволяет описывать структуры достаточно больших объектов, но представляет рекурсивно их функционирование.

В работах [3–22] предложен и по ряду основных положений разработан геометрический подход к представлению законов функционирования конечных дискретных динамических систем. В качестве базовой математической модели рассмотрен конечный детерминированный автомат типа Мили $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X и Y — конечные непустые множества состояний, входных и входных сигналов, а δ и λ — отображения вида $\delta : S \times X \to S$ и $\lambda : S \times X \to Y$, являющиеся совместно с уравнениями $s(t+1) = \delta(s(t), x(t))$ и $y(t) = \lambda(s(t), x(t))$ законами функционирования автомата A.

Геометрическое представление законов функционирования автомата разработано в связи с тем, что задание функций δ и λ таблицами, матрицами, каноническими уравнениями, диаграммами Мура и т.п. [23–26], имеет рекурсивный характер и явно определяет только начальные этапы функционирования. В диаграммах Мура поведение автомата представлено явно и в целом, но не систематизировано и не базируется на развитом математическом аппарате.

Геометрический образ γ_s, где $s \in S$, инициального автомата (A, s) представляется заданным явно и полностью на всём множестве последовательностей входных сигналов X^*. Целью геометрического подхода является исключение рекурсии в построении форм поведения автомата и переориентация методов решения задач распознавания, анализа и синтеза автоматов, управления автоматами на явное полное представление законов функционирования автоматов геометрическими фигурами. В указанных работах построены дискретные словарные геометрии Γ_0 и Γ_1, у которых пространства образованы упорядочением соответственно множеств точек $X^* \times Y^*$ и $X^* \times Y$. Линейный порядок, определяющий расположение элементов множеств X^* и Y^*на осях систем координат, позволяет определять номера элементов $p \in X^*$ и $q \in Y^*$. Это означает, что геометриям Γ_0 и Γ_1 сопоставляются геометрии Γ_3 и Γ_4 соответственно с множествами точек $N \times N$ и $N \times \{1, 2, \ldots, k\}$, то есть геометрии с целочисленными (положительными) координатами точек. Аналитический и вычислительный аппараты классической геометрии оказываются применимыми к анализу и синтезу геометрических образов автоматов.

К основным результатам, изложенным в работах [3–21], относятся следующие:

1. Правила построения геометрических образов автоматов в геометриях Γ_0 и Γ_1.

2. Критерии, выделяющие из множества ломаных линий в геометриях Γ_0 и Γ_1 те, которые являются геометрическими образами инициальных автоматов.

3. Формулы, определяющие по слову $p \in X^*$ (слову $q \in Y^*$) его номер на оси системы координат.

4. Выявленное свойство: для любого $s \in S$ геометрический образ γ_s инициального автомата (A, s) построен из начальных частей длины m, где $m = |X|$, геометрических образов $\gamma_{s'}$ инициальных автоматов (A, s'), $s' \in S$.

5. Формулы, определяющие номера первых координат точек, образующих геометрический образ γ_d для $d = \delta(s, p)$ по известному слову $p \in X^*$.

6. Разработка рекуррентного задания геометрического образа инициального автомата, представленного последовательностью точек образа.

7. Выявленное свойство: для геометрического образа инициального автомата рекуррентная форма определяется графом с конечным числом компонентов связности, в каждом компоненте точно один цикл или петля, вершины циклов могут быть корнями деревьев.

8. Показано, что идея Р. Арбиба [27–29] о дискретном аналоге непрерывности (ξ-непрерывность) может быть расширена до внесения в дискретное пространство структурированных подпространств, каждое из которых характеризует:

- функционирование автомата;
- постановку задачи;
- ограничение по ресурсам, наличию свойств фазовых траекторий и т.д.;
- свойства искомых фазовых траекторий.

В данной работе содержатся результаты дальнейших исследований по теме, показано более точное строение геометрических образов автоматов и изложен формальный аппарат для анализа: первое и второе базовые разбиения осей координат, последовательность χ_i, $i = 1, 2, \ldots$, разбиений и их свойства. Основным результатом является выделение класса автоматов, у которых геометрический образ оказывается периодическим, и исследование некоторых свойств связи длины периода с числом m, где $m = |X|$.

Геометрический образ γ_s инициального конечного детерминированного автомата (A, s), $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, понимается как множество точек w_s, где $w_s = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \overline{\lambda}(s, p))\}$ и $\overline{\lambda}(s, p)$ — последняя буква слова $\lambda(s, p)$, упорядоченное в геометрии Γ_1 по порядкам ω_1 и ω_2. Порядок ω_1 определяется исходным на множестве X и двумя следующими правилами:

1. Если $|p_1| < |p_2|$, то $(p_1, p_2) \in \omega_1$.

2. Пусть $|p_1| < |p_2|$ и $p_1 \neq p_2$. Если существуют такие q_1, x, x', q_2, q_3, что $p_1 = q_1 x q_1$, $p_2 = q_1 x' q_3$ и $(x, x') \in \omega_1$, то $(p_1, p_2) \in \omega_1$.

1. Дискретные словарные геометрии и геометрические образы автоматов

На рис. 1 показан геометрический образ автомата в геометрии Γ_0 и в геометрии Γ_1, на оси ординат которой расположены элементы множества Y.

Определение 1. Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — конечный детерминированный автомат и $s \in S$. Ломаной линией, определяющей в геометрии Γ_0 внешнее поведение инициального автомата (A, s) будем называть граф $G = (W, U)$, где множество вершин графа $W = \bigcup_{p \in X^*} \{(p, \lambda(s, p))\}$, а множество U ребер графа состоит из ребер, соединяющих вершины с первыми компонентами, непосредственно соседними по порядку ω_1. Для так определенных ломаных линий будем использовать обозначение γ_s.

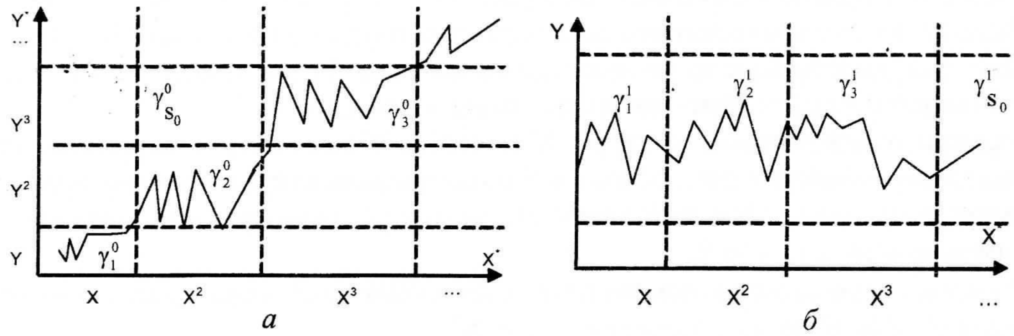


Рис. 1. Геометрические образы автомата: a – в дискретной словарной геометрии Γ_0; $б$ – в геометрии Γ_1

2. Критерий для выделения геометрических образов в классе ломаных линий

Законы функционирования конечных детерминированных автоматов, представленные геометрическими образами, выделяют во множестве ломаных линий подмножество линий.

Определение 2. Ломаная линия γ геометрии Γ_0 называется регулярной, если существуют такие КД-автоматы $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ и $s \in S$, что $\gamma = \gamma_s$.

Определение 3. Ломаную линию геометрии Γ_0 будем называть функциональной, если определяющий ее граф является цепью.

Определение 4. Ломаная линия γ геометрии Γ_0 называется диагональной, если для каждой точки $(p, q) \in \{\gamma\}$ выполняется равенство $|p| = |q|$.

Определение 5. Для любых слов $p \in X^*$ и $q \in Y^*$ введем обозначение

$$K(p, q) = \{p\} \cdot X \times \{q\} \cdot Y.$$

Множества точек $K(p, q)$ будем называть базовой клеткой (или просто клеткой) геометрии Γ_0.

Определение 6. Ломаная линия γ геометрии Γ_0 называется связной, если для любой её точки (p, q), где $p \in X^*$ и $q \in Y^*$, и для любого $x \in X$ существует $y \in Y$, такой, что точка (px, qx) является точкой линии γ.

Определение 7. Пусть γ_s — геометрический образ инициального конечного детерминированного автомата (A, s). Введём обозначение: для любого $p \in X^*$ $\gamma_s(p)$ — часть линии γ_s, определённая на множестве точек $\{px_1, px_2, \ldots, px_m,\}$ оси абсцисс.

Теорема 1. Для того чтобы ломаная линия γ геометрии Γ_0 была регулярной, необходимо, чтобы

1) граф, определяющий ломаную γ, был цепью,

2) для любого слова $p \in X^*$ существовало слово $q \in Y^*$, где $|p| = |q|$, при котором $\{\gamma(p)\} \subset \{K(p,q)\}$.

Теорема 2. Ломаная линия γ геометрии Γ_0 является регулярной тогда и только тогда, когда она функциональная, диагональная и связная.

Принципиально важным оказалось, что критерий регулярности ломаной линии в геометрии Γ_1 выражается через простое условие: ломаная линия γ геометрии Γ_1 является регулярной тогда и только тогда, когда для каждого $p \in X^*$ линия γ определена и определена однозначно.

3. Структура геометрических образов

Геометрический образ γ_s инициального конечного детерминированного автомата (A, s) определяет функционирование автомата A для состояния δ(s, p), где p $\in$ X*. Следовательно, если p $\in$ X*, то геометрический образ γ_d для d = δ(s, p) может быть извлечён из линии γ_s.

Теорема 3. Для каждой регулярной ломаной линии γ геометрии Γ_0 и для каждого слова p $\in$ X* ломаная линия γ(p) конгруэнтна некоторой ломаной линии вида $\gamma'(\varepsilon)$, где $\gamma'(\varepsilon)$ — начальный отрезок геометрического образа для некоторого s $\in$ S.

4. Числовые представления геометрических образов автоматов

Порядки расположения входных и выходных слов на осях словарных геометрий позволяют слова взаимно однозначно заменить числами на основании следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть $p \in X^*$ и $p = x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, где $k \in N^+$. Тогда номер r (p) слова p по порядку ω_1 определяется равенством

$$r(p) = \sum_{j=1}^{k} r(x_{i_j}) \cdot |X|^{j-1} - 1.$$

Доказательство. Слово p имеет длину k, и ему по порядку ω_1 предшествует $a = \sum_{j=1}^{k-1} |X|^j$ слов меньшей длины. Для того чтобы определить число слов, предшествующих по порядку ω_1 в блоке слов длины k слову p, разобьем множество предшествующих слов на блоки:

$$\begin{array}{ccc} x_1 \ldots x_1 & x_{i_k} x_1 \ldots x_1 & x_{i_k} \ldots x_{i_2} x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{i_k} x_1 \ldots x_1 & x_{i_k} x_{i_{k-1}} x_1 \ldots x_1 \ldots & x_{i_k} \ldots x_{i_2} x_{i_1} \end{array}$$

В каждом j-м блоке — $(r(x_{i_j}) - 1) \cdot |X|^{j-1}$ слов. Следовательно, в блоке длины k слову p предшествует $b = \sum_{j=1}^{k} (r(x_{i_j}) - 1) \cdot |X|^{j-1}$ слов.

Получаем: $r(p) = a + b = \sum_{j=1}^{k} r(x_{i_j}) \cdot |X|^{j-1} - 1.$

Теорема позволяет для любых входного слова $p \in X^*$ и выходного слова $q \in Y^*$ вычислить их номера $r_1(p)$ и $r_2(q)$ в соответствии с порядками ω_1 и ω_2 расположения множеств X^* и Y^* на осях системы координат. Если на оси ординат расположены только элементы множества Y по порядку ω_3, то выходное слово $q = y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_k}$ имеет номер

$$r_3(q) = (r_3(y_{j_1}), r_3(y_{j_2}), \ldots, r_3(y_{j_k})).$$

(Если выходное слово q определено состоянием s и входным словом $p = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, то $y_{j_1} = \lambda(s, x_{i_1})$, $y_{j_2} = \lambda(\delta(s, x_{i_1}), x_{i_2})$, $\ldots$, $y_{j_k} = \lambda(\delta(s, x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}), x_{i_k})$ для автоматов типа Мили и $y_{j_1} = \mu(\delta(s, x_{i_1}))$, $y_{j_2} = \mu(\delta(s, x_{i_1} x_{i_2}))$, $\ldots$, $y_{j_k} = \mu(\delta(s, p))$ для автоматов типа Мура.)

Теорема 5. Пусть $p \in X^*$ и $x \in X$ — точки на оси (X^*, ω_1) геометрии Γ_0. Тогда разность $r_1(px) - r_1(p)$ определяется по формуле

$$r_1(px) - r_1(p) = (|X| - 1) r_1(p) + r_1(x).$$

Проверка эквивалентности состояний автомата, минимизация автоматов, распознавание автоматов средствами эксперимента и другие задачи решаются на основе анализа инициальных автоматов. Возможности инициального автомата и всех инициальных автоматов, выделяемых достижимыми состояниями, представлены в геометрических образах. В геометрическом образе γ_s инициального автомата $(A = (S, X, Y, \delta, \lambda), s \in S)$ геометрический образ $\gamma_{s'}$ инициального автомата (A, s'), $s' = \delta(s, p)$, $p \in X^*$, может быть выделен указанием отрезков на оси абсцисс, на которых определен геометрический образ $\gamma_{s'}$. В связи с этим введем понятие дерева функционирования инициального автомата и построим правила вычисления отрезков на оси абсцисс.

Определение 8. Деревом D_s^A функционирования инициального детерминированного автомата типа Мура $(A = (S, X, Y, \delta, \lambda), s_0 \in S)$ будем называть граф с размеченными вершинами и дугами $G_s^A = (X^*, \rho \subset X^* \times X^*)$, у которого:

- из каждой вершины $p \in X^*$ исходит точно $m = |X|$ дуг (p, px), где $x \in X$, взаимно однозначно помеченных элементами множества X;

- каждая вершина $p \in X^*$ имеет метку $(\delta(s_0, p), \mu(\delta(s_0, p)))$.

Теорема 6. Пусть γ_{s_0} — геометрический образ в геометрии Γ_1 некоторого инициального конечного детерминированного автомата (A, s_0) с множеством входных сигналов $X p \in X^*$ $(p \neq \varepsilon)$ и s — преемник состояния s_0 по входному слову p.

Тогда образ γ_s инициального автомата (A, s) образован точками, первые координаты которых имеют номера r, определяемые неравенством

$$\sum_{j=0}^{\upsilon}|X|^{j}+r_1(p)\cdot|X|^{\upsilon}\le r\le\sum_{j=0}^{\upsilon-1}|X|^{j}+(r_1(p)+1)\cdot|X|^{\upsilon}-1,\ \text{где}\ \upsilon\in N^+.$$

Доказательство. Для доказательства сопоставим инициальному автомату (A, s_0) дерево функционирования $D_{s_0}^A$, в котором расположим геометрический образ γ_{s_0}, совмещая элементы множества X^* в соответствии с порядком ω_1 с вершинами дерева (см. определение 6). Выберем в дереве $D_{s_0}^A$ поддерево D_s^A с корнем, номер которого определяется как номер слова p, где $s = \delta(s_0, p)$. Дерево $D_{s_0}^A$ и любое его поддерево D_a^A (a — состояние, достижимое из s_0) совместимы по вершинам, если полагать, что пути, исходящие из a, являются продолжениями путей, исходящих из s_0.

Дерево $D_{s_0}^A$ и любое его поддерево D_a^A на каждом уровне k, $k \ge 1$, имеют точно $|X|^k$ вершин. Это позволяет:

- определить для каждого уровня k дерева $D_{s_0}^A$ номер $m^1 + m^2 + \ldots + m^{k-1} + 1$ левой крайней вершины и номер $m^1 + m^2 + \ldots + m^k$ правой крайней вершины $(m = |X|)$;

- по номеру $r_1(p)$ корня поддерева D_s^A определить для любого уровня υ поддерева D_s^A номера $\omega_{1\upsilon}$ левой крайней вершины поддерева на υ-м уровне и номер $\omega_{2\upsilon}$ правой крайней вершины.

Таким образом, имеем

$\omega_{1\upsilon} = U_{\upsilon-1} + U_\upsilon + 1$, $\omega_{2\upsilon} = \omega_{1\upsilon} + m^\upsilon + 1$, где $U_{\upsilon-1}$ — число вершин дерева $D_{s_0}^A$ на уровнях с 1-го по $(k + \upsilon - 1)$-й, U_υ — число вершин $(k + \upsilon)$-го уровня дерева $D_{s_0}^A$, предшествующих вершине $r_1(p)$. Получаем

$$U_{\upsilon-1}=\sum_{j=1}^{k+\upsilon-1}m^j,\ U_\upsilon=r_1(p)-U_{\upsilon-1}-1.$$

Суммирование дает неравенство, указанное в теореме. Структура, показывающая взаиморасположение точек образа автомата с учетом порядка элементов множества X^*, представлена на рис. 2.

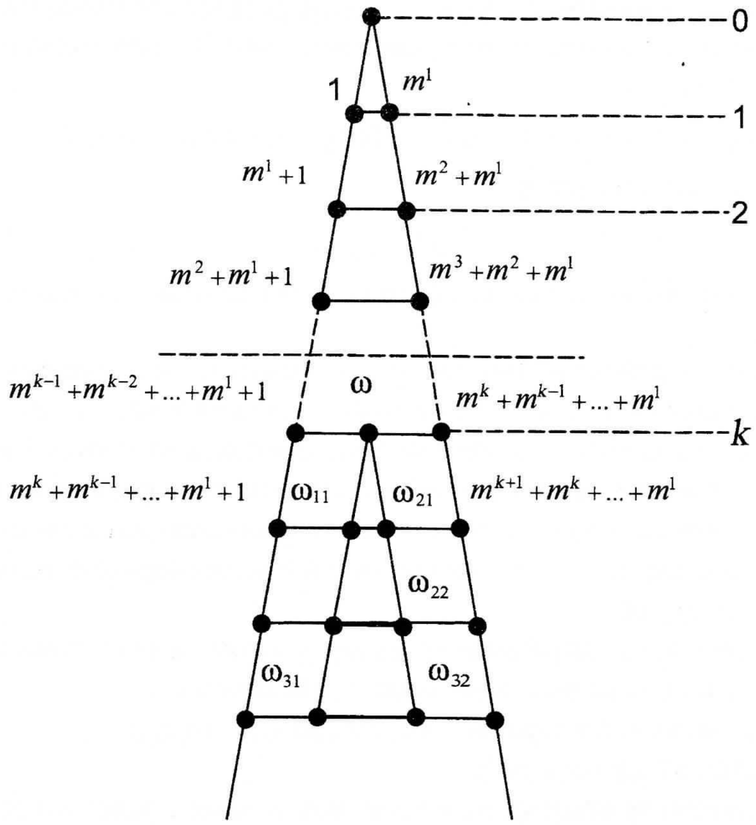


Рис. 2. Совмещение поддеревьев, определяющих функционирование инициальных автоматов

Пусть γ_s — геометрический образ в геометрии Γ_1. Каждому отрезку оси абсцисс соответствует часть (отрезок) геометрического образа γ_s. Введем два варианта разбиений оси абсцисс на такие отрезки, которые выделяют части γ_s, характерные для поведения автомата.

Определение 8. Пусть элементы множества X^*, где $|X| = m$, расположены на оси абсцисс системы координат геометрии Γ_1 в соответствии с порядком ω_1.

1. Разбиение оси абсцисс на отрезки, определяемые множествами точек $X^1, X^2, \ldots, X^j, \ldots$, будем называть первым базовым разбиением и обозначать $\eta_1(X^*)$.

2. Разбиение оси абсцисс на отрезки длины m будем называть вторым базовым разбиением и обозначать $\eta_2(X^*)$.

Разбиения $\eta_1(X^*)$ и $\eta_2(X^*)$ выделяют на оси абсцисс части, позволяющие определять такие последовательности отрезков, которые представляют геометрические образы состояний, достижимых из состояния s.

Лемма 1. Пусть γ_s — геометрический образ инициального конечного детерминированного автомата (A, s), где $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, $s \in S$ и $|X| = m$.

Для любого $p \in X^*$ отрезок $[px_1, px_2, \ldots, px_m]$ во втором базовом разбиении $\eta_2(X^*)$ оси абсцисс выделяет в геометрическом образе γ_s часть

$$[(px_1, Y_{v_1}), (px_2, Y_{v_2}), \ldots, (px_m, Y_{v_m})],$$

определяющую равенства

$$\lambda(\delta(s,p),x_1) = Y_{v_1}, \ \ \lambda(\delta(s,p),x_2) = Y_{v_2}, \ \ldots, \ \lambda(\delta(s,p),x_m) = Y_{v_m}, \tag{1}$$

то есть определяет функцию λ на множестве $\{\delta(s, p)\} \times X$.

Утверждение леммы 1 очевидно следует из интерпретации геометрического образа γ_s.

На основании леммы 1 получаем, что разбиению $\eta_2(X^*)$ соответствуют последовательность состояний

$$s, \delta(s,x_1),\ \delta(s,x_2),\ \delta(s,x_3), \ldots,\ \delta(s,x_m),\ \delta(s,x_1x_1),\ \ldots,\ \delta(s,p), \ldots \tag{2}$$

и последовательность таких частей γ_s

$$\gamma_s^1, \gamma_s^2, \ldots, \gamma_s^i, \ldots \tag{3}$$

каждая из которых определяет равенства вида (1) для состояния, ассоциированного с этой частью.

Принципиальные сложности возникают при определении по геометрическому образу γ_s функции переходов δ автомата A. Для бесконечной последовательности состояний (2) из геометрического образа γ_s выделяют бесконечную последовательность заданий функции λ для состояний автомата. Если автомат конечный, то на множестве состояний, представленных в последовательности (2), имеется конечное число классов эквивалентности состояний. Возникают задача определения классов эквивалентных состояний и задача определения переходов состояний из одного класса в другой.

Задача определения по геометрическому образу γ_s перехода из состояния $\delta(s, p)$ под действием входного сигнала x_i решается следующими действиями:

1) на оси абсцисс выделяется отрезок $\alpha = [px_ix_1, px_ix_2, \ldots, px_ix_m]$;

2) полагается $\delta(\delta(s,p),x_i) = \delta(s,px_i)$.

Полученное равенство не отвечает на вопрос, между какими классами эквивалентных состояний устанавливает связь входной сигнал x_i.

Задача определения по геометрическому образу γ_s классов эквивалентных состояний требует формулировок предположений, условий и ограничений.

Геометрический образ γ_s уже систематизирован первым базовым разбиением $\eta_1(X^*)$ оси абсцисс и связью отрезков разбиения с частями γ_s. Для каждого достижимого из s состояния $u = \delta(s, p)$, где $p \in X^*$, геометрический образ γ_u инициального автомата (A, u) должен иметь аналогичное распределение частей на оси абсцисс. В геометрический образ γ_u входят части геометрического образа γ_s, связанные с последовательностью множеств точек $\{p\}\cdot X^1, \{p\}\cdot X^2, \ldots, \{p\}\cdot X^j, \ldots$ оси абсцисс. В отличие от γ_s, указанные части не непосредственно следуют друг за другом, а разделены увеличивающимися промежутками на оси абсцисс.

Теорема 7. Пусть слова p, $p^1 \in X^*$ находятся на оси абсцисс в отношении непосредственного следования $p \prec p^1$ по порядку ω_1. Тогда для любого j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, первый элемент множества $\{p^1\}\cdot X^j$ непосредственно следует за последним элементом множества $\{p\}\cdot X^j$.

Доказательство. Перечислим варианты отношений между непосредственно соседними по порядку ω_1 словами $p, p^1 \in X^* (p \neq p^1)$:

$$|p| = |p^1|, \tag{4}$$

$$|p| = |p^1| + 1, \tag{5}$$

$$p = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \;\&\; p \neq x_m^k, \tag{6}$$

$$p = x_m^k \;\&\; p^1 = x_1^{k+1}. \tag{7}$$

Для каждого конкретного случая непосредственного следования слова p^1 за словом p отношение $p \prec p^1$ совмещается с одним из следующих наборов: $\{(4), (6)\}$, $\{(5), (7)\}$.

Рассмотрим вариант условий (4) и (6). Последний элемент ξ_1, где $\xi_1 = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k} x_{i_m}$, множества $p \cdot X^j$ будет непосредственно предшествовать первому элементу ξ_2 множества $p^1 \cdot X^j$, так как элемент ξ_2 имеет вид $\xi_2 = p^1 x_1^j$. Непосредственное следование ξ_2 за ξ_1 по порядку ω_1 объясняется правилом порядка для слов равной длины: следование одного слова за другим словом определяется следованием их первых слева различных префиксов одинаковой длины. Структура слова ξ_1 показывает, что отношения слов ξ_1 и ξ_2 будут определяться отношением их префиксов p и p^1.

Вариант совмещения условия (5) с отношением $p \prec p^1$ возможен только при условии (7): $p = x_m^k$ и $p^1 = x_1^{k+1}$. Последний элемент множества $\{p\} \cdot X^j$ имеет вид $\xi_1 = x_m^{k+j}$, а первый элемент ξ_2 множества $\{p^1\} \cdot X^j$ определяется равенством $\xi_2 = x_1^{(k+1)+j}$. Между словами ξ_1 и ξ_2 по порядку ω_1 других слов нет. Слово меньшей длины ξ_1 предшествует слову большей длины ξ_2. Следовательно, ξ_2 непосредственно следует за ξ_1.

Первое базовое разбиение $\eta_1(X^*)$ оси абсцисс определяет отрезки оси, для которых номера первых и номера последних точек определяются построением порядка ω_1. Связи отрезков и номеров первых и последних точек отрезков, представленных в таблице, сформулированы в виде теоремы 8.

№	Отрезок разбиения $\eta_1(X^*)$	Номер первой точки отрезка	Номер последней точки отрезка
1	$[x_1, ..., x_m]$	1	m
2	$[x_1 x_1, ..., x_m x_m]$	$m+1$	$m+m^2$
3	$[x_1 x_1 x_1, ..., x_m x_m x_m]$	$m+m^2+1$	$m+m^2+m^3$
...	...	...	...
j	$[x_1^j, ..., x_m^j]$	$m+m^2+...+m^{j-1}+1$	$m+m^2+...+m^j$
...	...	...	...

Теорема 8. Пусть множество X^* упорядочено на оси абсцисс в соответствии с порядком ω_1, на нем имеется первое базовое разбиение $\eta_1(X^*)$ и отрезки разбиения занумерованы. Тогда отрезок с номером j, $j \geq 2$ имеет первую точку с номером $m+m^2+...+m^{j-1}+1$ и последнюю точку с номером $m+m^2+...+m^j$ по порядку ω_1.

Для того чтобы в геометрическом образе γ_s инициального конечного детерминированного автомата (A, s), где $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ и $s \in S$, выделить части, образующие геометрический образ γ_ω, где $\omega = \delta(s, p)$ и $p \in X^*$, рассмотрим бесконечную последовательность $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_j, ...$ разбиений оси абсцисс и частей оси абсцисс на отрезки. Введём следующие обозначения:

χ_1 — разбиение оси абсцисс на отрезки длины m,

χ_2 — разбиение части оси абсцисс без первых m точек на отрезки длины m^2,

χ_3 — разбиение части оси абсцисс без первых $m + m^2$ точек на отрезки длины m^3,

...

χ_j — разбиение части оси абсцисс без первых $m + m^2 + ... + m^{j-1}$ точек на отрезки длины m^j.

Теорема 9. Пусть γ_s — геометрический образ инициального конечного детерминированного автомата (A, s), где $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, $s \in S$.

Для любого слова $p \in X^*$ $(p \neq \varepsilon)$ геометрический образ γ_u, где $u = \delta(s, p)$, инициального автомата (A, u) образован последовательностью частей геометрического образа γ_s:

$$\gamma_u = \gamma_1^u \gamma_2^u ... \gamma_j^u ..., \tag{8}$$

где каждая j-я часть γ_j^u является частью γ_s, ассоциированной с отрезком оси абсцисс, первая точка которого имеет номер по порядку ω_1

$$m + m^2 + ... + (i-1) \cdot m^j + 1; \tag{9}$$

последняя точка которого имеет номер по порядку ω_1

$$m + m^2 + ... + i \cdot m^j, \tag{10}$$

где i — номер слова p по порядку ω_1 на оси абсцисс.

Доказательство. Каждое входное слово $p \in X^*$ однозначно определяет p — преемник состояния s: $u = \delta(s, p)$. Множество всех слов X^* в алфавите X и множество отрезков второго базового разбиения $\eta_2(X^*)$ взаимно однозначно соответствуют. Пусть слово p по порядку ω_1 имеет номер i. Покажем, что для каждого j, $j \geq 1$, γ_s^j является частью γ_s, определенной на i-м по порядку отрезке разбиения χ_j. Это означает, что геометрический образ γ_u состоит из частей геометрического образа γ_s, определяемых i-ми отрезками каждого из разбиений $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_j, ...$. На оси абсцисс такие отрезки имеют вид

$$[px_1, ..., px_m], [px_1x_1, ..., px_mx_m], ..., [px_1^j, ..., px_m^j], ...$$

Номера этих отрезков в соответствующих разбиениях χ_j, $j = 1, 2, ...$, совпадают и равны номеру слова p по порядку ω_1. Это следует из теоремы 7 (для p есть цепочка длины i слов от первого ε до слова p) и теоремы 8, определяющей номера первого и последующего элементов первого отрезка в каждом разбиении χ_j.

Рассмотрим проблему проверки эквивалентности состояний по геометрическому образу γ_s для достижимых из s состояний $\delta(s, p_1) = u$ и $\delta(s, p_2) = v$, где $p_1, p_2 \in X^*$ и $p_1 \neq p_2$. Состояния u и v имеют геометрические образы γ_u и γ_v, которые можно представить последовательностями частей образа γ_s:

$$\gamma_{u} \cdot = \gamma_1^u \gamma_2^u, ..., \gamma_j^u, ..., \tag{11}$$

$$\gamma_{v} \cdot = \gamma_1^v \gamma_2^v, ..., \gamma_j^v, ... \tag{12}$$

Из теоремы 9 следует, что для каждого j, $j = 1,2, ..., \gamma_j^u$ и γ_j^v являются отрезками одного и того же разбиения χ_j и зависят от номеров слов p_1 и p_2. Очевидно, что состояния u и v эквивалентны тогда и только тогда, когда $\gamma_j^u = \gamma_j^v$ для всех значений j.

Проверка эквивалентностей состояний по геометрическому образу требует сравнения двух бесконечных последовательностей (11) и (12) бесконечного геометрического образа γ_s. В общем случае эффективная проверка невозможна. Только принятие дополнительных предположений, условий и ограничений позволяет выделять случаи эффективной проверки по геометрическому образу эквивалентности состояний. Одним из фундаментальных предположений о свойствах геометрических образов является предположение о том, что геометрический образ γ_s — это периодическая ломаная линия. Прежде чем рассмотрим периодические геометрические образы, сформируем метод проверки k-эквивалентности состояний.

Определение 10. Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — конечный детерминированный автомат. Состояния s и s' называются k-эквивалентными ($k \geq 1$), если выполняется условие

$$(\forall p \in X^*)\{|p| \leq k \rightarrow \lambda(s, p) = \lambda(s', p)\}.$$

Метод проверки по геометрическому образу γ_s k-эквивалентности состояний $u = \delta(s, p_1)$ и $v = \delta(s, p_2)$ заключается в следующем.

1. Для слов p_1 и p_2 определяются номера по порядку ω_1 по формуле

$$r(p_a) = \sum_{v=1}^{c} r(x_{i_v}^a) \cdot |X|^{v-1} - 1, \quad a = 1, 2, \tag{13}$$

где $p_1 = x_{i_1}^1 x_{i_2}^1 \ldots x_{i_c}^1$, $p_2 = x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \ldots x_{i_c}^2$.

2. По формулам (9) и (10) вычисляются границы k отрезков, а по ним соответствующие последовательности частей геометрического образа γ_s: $\gamma_1^u, \gamma_2^u, \ldots, \gamma_k^u$ и $\gamma_1^v, \gamma_2^v, \ldots, \gamma_k^v$.

3. Проверяется выполнимость набора равенств $\gamma_j^u = \gamma_j^v$, $1 \leq j \leq k$.

Известно [25–26], что если для некоторого k классы k-эквивалентных состояний совпадают с классами $(k + 1)$-эквивалентных состояний, то эти классы являются классами эквивалентных состояний. Следует подчеркнуть, что это важнейшее утверждение не применимо без дополнительного (и очень тяжело проверяемого) ограничения в случае проверки эквивалентности по геометрическому образу. Дополнительное условие заключается в том, что уже все достижимые из s состояния автомата представлены при определении k-эквивалентности состояний. Новые состояния, не эквивалентные уже представленным в рассмотренном начальном отрезке геометрического образа, могут потребоваться для образования связей входных сигналов и выходных сигналов при увеличении начального отрезка геометрического образа.

Перейдем к исследованию периодических геометрических образов, так как для них свойство периодичности оказывается заменой условий и ограничений, дополнительно требующихся при анализе, синтезе, распознавании и управлении автоматами. Уточним понятие периодического геометрического образа, полагая, что оно соответствует по свойствам периодической ломаной линии в геометрии Γ_1.

Периодом периодической ломаной линии будем называть наименьший по длине (числу точек) период. Одной из основных характеристик периодического геометрического образа будет отношение длины периода и числа $m = |X|$.

Теорема 10. Пусть выполнены условия:

γ_s — периодический с периодом длины d, $d > 1$, геометрический образ инициального конечного детерминированного автомата (A, s), где $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, $s \in S$;

$m = |X|$ $(m \geq 2)$;

$p_1, p_2 \in X^*$ и α, β — номера соответственно слов p_1 и p_2 по порядку ω_1;

$d < m$ и d не является кратным m.

Состояния $\delta(s, p_1)$ и $\delta(s, p_2)$ автомата A эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$(\exists n \in N)|\alpha - \beta| \cdot m = n \cdot d. \tag{14}$$

Доказательство. Покажем необходимость. Пусть условие (14) не выполняется, т. е., для любого $n \in N |\alpha - \beta| \cdot m \neq n \cdot d$, $\alpha \neq \beta$. Две части периодического геометрического образа, ассоциированные с отрезками a и b разбиения χ_1, конгруэнтны (могут быть совмещены параллельным движением вдоль оси абсцисс) тогда и только тогда, когда между первыми точками отрезков a и b расположено $n \cdot d$ точек при некотором целом положительном n. Пусть с первой точкой отрезка a ассоциируется v-я точка периода, а с первой точкой отрезка b ассоциируется 1-я точка периода и $v \neq 1$. Тогда первая справа точка периода с наибольшим значением второй компоненты (по порядку ω_2 на оси ординат) расположится в частях геометрического образа γ_s, ассоциированных с отрезками a и b, на различных расстояниях от начала отрезков. Это означает, что такие части геометрического образа определяют состояния $\delta(s, p_1)$ и $\delta(s, p_2)$, которые не являются 1-эквивалентными и, следовательно, не эквивалентны.

Пусть условие (14) выполняется для некоторого n_0, т. е. $|\alpha_0 - \beta_0| \cdot m_0 = n_0 \cdot d_0$. Введем обозначения $u = \delta(s, p_1)$ и $v = \delta(s, p_2)$. На основании теоремы 9 из частей геометрического образа γ_s можно составить геометрические образы γ_u и γ_v, где $\gamma_u = \gamma_1^u \gamma_2^u, \ldots, \gamma_j^u, \ldots$ и $\gamma_v = \gamma_1^v \gamma_2^v, \ldots, \gamma_j^v, \ldots$, соответственно инициальных автоматов (A, u) и (A, v). Для каждого $j, j \geq 1$, части γ_j^u и γ_j^v ассоциируются с отрезками разбиения χ_i. Первые точки таких отрезков имеют номера по порядку ω_1:

$$m + m^2 + \ldots + \alpha \cdot m^j + 1 \text{ и } m + m^2 + \ldots + \beta \cdot m^j + 1.$$

Между первыми точками отрезков имеется $|\alpha - \beta| \cdot m^j$ точек. Условие (14) дает 1-эквивалентность состояний u и v. Умножая обе части равенства (14), получаем условие 2-эквивалентности состояний u и v : $|\alpha - \beta| \cdot m^2 = (n_0 \cdot m) \cdot d$, где $n_0 \cdot m$ — число периодов, укладывающихся между первыми точками отрезков разбиения χ_2. В общем случае умножение обеих частей равенства (14) на множитель m^{j-1} дает условие j-эквивалентности состояний u и v: $|\alpha - \beta| \cdot m^j = (n_0 \cdot m^{j-1}) \cdot d$. Следовательно, состояния $u = \delta(s, p_1)$ и $v = \delta(s, p_2)$ k-эквивалентны для любого $k = 1, 2, \ldots$. Такие состояния являются эквивалентными.

Теорема 10 имеет два важнейших применения. Во-первых, она позволяет по величинам m и d определять число классов эквивалентных состояний для автоматов с периодическими геометрическими образами. Во-вторых, для автоматов с периодическими геометрическими образами отношение 1-эквивалентности совпадает с отношением эквивалентности состояний.

Библиографический список

1. Математика// Большой энциклопедический словарь. М., 1999.
2. *McCulloch W. S., Pitts W.H.* A logical calculis of the ideas immanent in nervous activity // Bull. Math. Biophys. 1943. V. 5. P. 115–133.
3. *Твердохлебов В.А.* Техническое диагностирование в геометрической интерпретации задач, моделей и методов // Автоматизация проектирования дискретных систем: Материалы Междунар. конф. Минск, 1995. Т. 1. С. 97.
4. *Твердохлебов В.А.* Распознавание автоматов на основе геометрической интерпретации // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XI Междунар. конф. М., 1996. С.191.
5. *Резчиков А.Ф., Твердохлебов В.А.* Управление и диагностирование в сложных системах. Саратов, 1997.
6. *Твердохлебов В.А.* Техническое диагностирование в геометрической интерпретации // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: Материалы Междунар. конф. Саратов, 1997. С.137–140.
7. *Твердохлебов В.А.* Дискретные словарные геометрии для анализа и синтеза математических автоматов // Вопросы преобразовательной техники, частотного электропривода и управления: Межвуз. науч. сб. Саратов, 1998. С. 71–79.
8. *Твердохлебов В.А.* Дискретные словарные геометрии для анализа и синтеза математических автоматов // Докл. Академии военных наук. Саратов, 1999. №1. С. 100–113.
9. *Твердохлебов В.А.* Синтез и анализ геометрических образов конечных автоматов // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XII Междунар. конф. М., 1999. Ч. II. С. 225.
10. *Твердохлебов В.А.* Техническое диагностирование на основе распознавания свойств переходов и выходов автоматов // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. Харьков, 2000. №4. С. 45–47.
11. *Смирнов А.К., Твердохлебов В.А.* Управление жизненными циклами сложных систем. Саратов, 2000.
12. *Твердохлебов В.А.* Дискретное управление в толе-

рантных и импликативных пространствах // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: Материалы Междунар. конф. Саратов, 2002. С. 211–215.

13. *Tverdokhlebov V.A.* Discrete space for trajectories of diagnostic symptoms // Радиоэлектроника и информатика. Харьков, 2003. №3. С.121.

14. *Твердохлебов В.А.* Дискретное пространство для образов поведения конечных автоматов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов, 2003. Вып. 5. С. 163–174.

15. *Твердохлебов В.А.* Дискретные пространства в задачах управления и диагностирования // Докл. АВН / Поволж. отд-ние. 2003. № 9. С. 102–108.

16. *Твердохлебов В. А.* Построение и анализ геометрических образов конечных автоматов // Проблемы точной механики и управления: Сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов, 2004. С. 94–100.

17. *Твердохлебов В. А.* Рекуррентность геометрических образов // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте. 2004. Вып. 4–5. С. 88–90.

18. *Tverdokhlebov V.A.* The general features of geometrical images of finite state machines // Proc. of East-West Design & Test Workshop (EWDTW'2004), Alushta, 2004. P. 243–247.

19. *Твердохлебов В. А.* Основные свойства геометрических образов автоматов // Проблемы точной механики и управления: Сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов, 2004. С. 187–192.

20. *Твердохлебов В. А., Еременко Р. Н., Путятинский С.Е.* Анализ представления иррациональных последовательностей функциями *k*-значной логики // Там же. С. 170–175.

21. *Твердохлебов В. А.* Дискретные системы и геометрические образы их функционирования // Автоматизация проектирования дискретных систем: Материалы 5-й Междунар. конф. Минск, 2004. Т. 1. С. 217–226.

22. *Твердохлебов В. А.* Дискретные пространства в задачах управления и диагностирования // Там же. Т.2. С. 104–113.

23. *Мур Э.* Умозрительные эксперименты с последовательными машинами // Автоматы: Сб. ст. / Под ред. К. Шеннона, Д. Маккарти. М., 1956. С. 179–213.

24. *Гилл А.* Введение в теорию конечных автоматов. М., 1966.

25. *Глушков В.М.* Синтез цифровых автоматов. М., 1962.

26. *Брауер В.* Введение в теорию конечных автоматов. М., 1987.

27. *Arbib M.* Automata theory and control theor: a rapprochement // Automatica. 1966. V. 3. P. 161–189.

28. *Arbib M.* Tolerance automata // Kybernetic. 1967. V. 3. P. 223–233/

29. *Каллман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., 1971.