имеет место (19), то всегда можно указать такой интегральный оператор FORMULA с теми же собственными функциями, что и у оператора A, для которого выполняется г).

Теперь для самосопряженного оператора (16) с условиями а)–д) приведем такой результат.

Теорема 3. *Если $f \in \overline{\Delta_A}$ (Δ_A – область значения оператора A и $\overline{\Delta_A}$ — ее замыкание в $C[0,1]$) и $\overset{1}{\underset{0}{V}}ar(f) < \infty$, то $f(x)$ разлагается на $[0,1]$ в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям.*

Это есть аналог теоремы Жордана—Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье и получается методом, указанным в [6, 7], с существенным использованием результата, аналогичного теореме 2, и здесь не приводится из-за большого объема изложения.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-00169) и программы «Университеты России» (проект УР.04.01.041).

Библиографический список

1. *Salaff S.* Regular boundary conditions for ordinary differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V.134, № 2. P.355–373.
2. *Salaff S.* Regular boundary conditions for ordinary differential operators // Тез. крат. науч. сообщ. Секция 6. JCM. M., 1966. C.15.
3. *Fiedler H.* Zur Regularitat selbstadjungierte Randwertautgaben // Manuscripta Math. 1972. V.7., № 2. P.185–196.
4. *Минкин А.М.* Регулярность самосопряженных краевых условий // Матем. заметки. 1977. Т. 22, вып. 6. С. 835–846.
5. *Минкин А.М.* Теорема равносходимости для дифференциального оператора: Дис. ... канд. матем. наук. Саратов, 1982.
6. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О равносходимости спектральных разложений самосопряженных интегральных операторов // Современные методы в теории краевых задач. Воронеж, 2000. Ч. 2. С.73–82.
7. *Корнев В.В., Хромов А.П.* О сходимости разложений по собственным функциям в пространствах дифференцируемых функций // Интегральные преобразования и специальные функции: Информ. бюл. 2004. Т. 4, № 1. С.19–31.

УДК 519.48

ПРОДОЛЖЕНИЕ УПОРЯДОЧЕННОСТИ НА МНОЖЕСТВО ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

В.В. Розен

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: rozenvv@info.sgu.ru

Предложен общий метод для продолжения упорядоченности на множество вероятностных мер. Он основан на наличии связи Галуа между всеми продолжениями упорядоченности на множество вероятностных мер и подмножествами изотонных отображений в числовую прямую. Продолжение порядка, которое определено множеством всех изотонных отображений, названо *каноническим.* Для канонического продолжения дано эффективное описание и найдены вероятностные меры, которые являются максимальными в выпуклых многогранниках вероятностных мер. Указаны некоторые приложения рассмотренных методов для задач принятия решений.

An extension of the ordering to the set of probability measures

V.V. Rozen

A general method for extension of the ordering to the set of the probability measured. It based on the Galois connection between all such extensions and subsets of isotone mappings of the given ordered set in the real numbers. The canonical extension is defined as extension determined by the set of all isotone mappings. For canonical extension, an effective description is given and the maximal measures in convex polyhedra are found. Some applications of considered methods for decision making problems are indicated.

Введение

Во многих задачах принятия решения (ЗПР) возникает проблема продолжения упорядоченности, заданной на множестве исходов, на множество вероятностных мер. Если упорядоченность (или квазиупорядоченность) на множестве задана при помощи числовой функции, то ее продолжение на множество вероятностных мер обычно производится по значениям математического ожидания соответствующей случайной величины. Однако указанный метод становится неприемлемым, когда упорядоченность множества задается некоторым бинарным отношением; в то же время именно этот случай наиболее важен для приложений теории принятия решений [1–3]. Укажем основные типы задач принятия решений, для которых требуется построение продолжения порядка на множество вероятностных мер:

а) задачи принятия решения в условиях риска с упорядоченным множеством исходов;

б) смешанные расширения игр упорядоченными исходами;

в) игры на графах с упорядоченными окончательными позициями, имеющие случайные ходы;

г) задачи многокритериальной оптимизации с упорядоченным по важности множеством критериев.

В данной статье вводится общий метод продолжения упорядоченности на множество вероятностных мер, основанный на наличии связи Галуа между продолжениями порядка на множество вероятностных мер и подмножествами изотонных отображений исходного упорядоченного множества в числовую прямую. Особый интерес представляет наименьшее из таких продолжений, названное *каноническим*. Для канонического продолжения дано его эффективное описание и охарактеризованы меры, являющиеся максимальными относительно канонического продолжения в выпуклых многогранниках вероятностных мер.

1. Продолжение порядка на множество вероятностных мер с помощью изотонных отображений

1.1. Под вероятностной мерой на упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$ будем понимать неотрицательную счетно-аддитивную нормированную функцию множества, определенную на некоторой фиксированной σ-алгебре Σ_A подмножеств множества A, содержащей все мажорантно устойчивые в $\langle A, \omega \rangle$ подмножества[1]. Это условие обеспечивает, во-первых, при любом $a \in A$ включение $\{a\} \in \Sigma_A$ и, во-вторых, измеримость относительно такой σ-алгебры любой функции, являющейся изотонным отображением упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в числовую прямую R. Множество всех вероятностных мер на $\langle A, \omega \rangle$ обозначается далее через $\boldsymbol{P}_\omega(A)$. Если отождествить вырожденную вероятностную меру δ_a, сосредоточенную в точке a, с элементом a, то A можно рассматривать как подмножество множества $\boldsymbol{P}_\omega(A)$. Всякое отношение квазипорядка ρ, заданное на $\boldsymbol{P}_\omega(A)$ и содержащее отношение ω, будем называть *расширением* порядка ω на множество вероятностных мер; если ограничение квазипорядка ρ на A совпадает с ω, то будем говорить, что ρ является *продолжением* порядка ω.

Нашей первой задачей является нахождение способов построения продолжений порядка на множество вероятностных мер. Разумеется, если на такое продолжение не накладывать никаких условий, то задача нахождения «какого-нибудь» продолжения решается тривиально (например, можно положить, что две вероятностные меры сравнимы по продолженному порядку тогда и только тогда, когда они вырождены, однако такое продолжение не представляет никакого интереса). Сформулируем три основных неформальных требования к продолжению порядка на множество вероятностных мер:

---

[1] Напомним, что подмножество $B \subseteq A$ называется *мажорантно устойчивым* в упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$, если условия $a \in B$, $a' \overset{\omega}{\geq} a$ влекут $a' \in B$.

1) продолжение порядка ω на множество вероятностных мер должно обладать «хорошими» математическими свойствами;

2) для классов задач принятия решений, в которых используется принятое продолжение порядка на множество вероятностных мер, должны быть реализуемыми основные принципы оптимальности;

3) должна иметься некоторая достаточно естественная связь между оптимальными решениями классов ЗПР, в которых используется принятое продолжение порядка на множество вероятностных мер, и оптимальными решениями классических ЗПР с целевыми функциями.

Укажем теперь общий способ построения продолжения порядка на множество вероятностных мер, удовлетворяющий сформулированным требованиям. Обозначим через $C_0(\omega)$ множество всех ограниченных изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в числовую прямую R.

Предложение 1. Для любой функции $\varphi \in C_0(\omega)$ и вероятностной меры $\mu \in \boldsymbol{P}_\omega(A)$ существует интеграл $\int\limits_A \varphi \, d\mu$.

Для доказательства достаточно убедиться, что φ измерима относительно σ-алгебры Σ_A. В самом деле, при любом $x \in R$ подмножество $A_x = \{a \in A : \varphi(a) < x\}$ является дополнением мажорантно устойчивого в $\langle A, \omega \rangle$ подмножества $\{a \in A : \varphi(a) \geq x\}$, откуда $A_x \in \Sigma_A$.

Далее будем полагать $\overline{\varphi}(\mu) = \int\limits_A \varphi d\mu$. Ясно, что $\overline{\varphi}(\delta_a) = \varphi(a)$ для любой вырожденной меры δ_a; в силу этого функцию $\overline{\varphi}$ будем называть продолжением функции φ на множество вероятностных мер.

Поставим в соответствие каждому подмножеству $H \subseteq C_0(\omega)$ отношение квазипорядка ω^H на $\boldsymbol{P}_\omega(A)$, полагая

$$\mu_1 \overset{\omega^H}{\gtrsim} \mu_2 \Leftrightarrow (\forall \varphi \in H)\overline{\varphi}(\mu_1) \geq \overline{\varphi}(\mu_2) \quad \mu_1, \mu_2 \in \boldsymbol{P}_\omega(A).$$

Из условия $\overline{\varphi}(\delta_a) = \varphi(a)$ сразу следует, что $\omega \subseteq \omega^H$, поэтому при любом $H \subseteq C_0(\omega)$ отношение ω^H является расширением порядка ω на множество вероятностных мер; будем называть его расширением, определяемым подмножеством H. Квазипорядок ω^H продолжает порядок ω тогда и только тогда, когда множество изотонных отображений H аппроксимирует отношение ω, то есть когда справедлива импликация

$$(\forall \varphi \in H)\varphi(a_1) \geq \varphi(a_2) \Rightarrow a_1 \overset{\omega}{\gtrsim} a_2.$$

Каждому отношению квазипорядка ρ на $\boldsymbol{P}_\omega(A)$, являющемуся расширением квазипорядка ω, поставим в соответствие подмножество $H_\rho \subseteq C_0(\omega)$, состоящее из тех отображений φ, для которых $\overline{\varphi}$ изотонно относительно квазипорядка ρ:

$$H_\rho = \{\varphi \in C_0(\omega) : (\forall \mu_1, \mu_2 \in \boldsymbol{P}_\omega(A))(\mu_1 \overset{\rho}{\gtrsim} \mu_2 \Rightarrow \overline{\varphi}(\mu_1) \geq \overline{\varphi}(\mu_2)\}.$$

Непосредственно из определений вытекает следующее предложение.

Предложение 2. Пара отображений (f, g), где $f(H) = \omega^H$, $g(\rho)$, $= H_\rho$ образует связь Галуа между всеми подмножествами изотонных отображений $H \subseteq C_0(\omega)$ и всеми расширениями ρ порядка ω на множество вероятностных мер.

Заметим, что предложение 2 означает справедливость следующих утверждений:

а) $H_1 \subseteq H_2 \Rightarrow \omega^{H_2} \subseteq \omega^{H_1}$;

б) $\rho_1 \subseteq \rho_2 \Rightarrow H_{\rho_2} \subseteq H_{\rho_1}$;

в) $H \subseteq H_{\omega^H}$;

г) $\rho \subseteq \omega^{H_\rho}$.

На основании общих свойств связей Галуа [4] получаем, что существует дуальный изоморфизм между множеством всех расширений вида ω^H и множеством всех подмножеств вида H_ρ. Далее мы ограничимся расширениями вида ω^H.

1.2. Основные типы структур, рассматриваемых на множестве вероятностных мер $\boldsymbol{P}_\omega(A)$, – это выпуклая структура и топология. Выпуклая структура на $\boldsymbol{P}_\omega(A)$ определена в силу того, что для любых вероятностных мер $\mu, \nu \in \boldsymbol{P}_\omega(A)$ их выпуклая комбинация $\alpha\mu + (1-\alpha)\nu$, где $0 \le \alpha \le 1$, также является вероятностной мерой. Топология на $\boldsymbol{P}_\omega(A)$ определяется при помощи сходимости (сходимость последовательности вероятностных мер (μ_n) к вероятностной мере μ означает сходимость числовой последовательности $\int\limits_A \varphi\, d\mu_n$ к $\int\limits_A \varphi\, d\mu$ при любом $\varphi \in C_0(\omega)$). Далее, обе эти структуры переносятся на декартов квадрат множества $\boldsymbol{P}_\omega(A)$.

Основные математические свойства отношений ω^H состоят в следующем.

Предложение 3.

1. Отношение ω^H удовлетворяет условию двусторонней выпуклости:

$$\mu \overset{\omega^H}{\gtrsim} \nu \Leftrightarrow \lambda\mu + (1-\lambda)\theta \overset{\omega^H}{\gtrsim} \lambda\nu + (1-\lambda)\theta \quad (0 < \lambda < 1,\ \mu, \nu, \theta \in \boldsymbol{P}_\omega(A)).$$

Доказательство. Используя, что

$$\overline{\varphi}(\lambda\mu + (1-\lambda)\theta) = \lambda\overline{\varphi}(\mu) + (1-\lambda)\overline{\varphi}(\theta),$$

имеем

$$\lambda\mu + (1-\lambda)\theta \overset{\omega^H}{\gtrsim} \lambda\nu + (1-\lambda)\theta \Leftrightarrow (\forall\varphi\in H)\overline{\varphi}(\lambda\mu + (1-\lambda)\theta) \ge \overline{\varphi}(\lambda\nu + (1-\lambda)\theta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall\varphi\in H)\lambda\overline{\varphi}(\mu) + (1-\lambda)\overline{\varphi}(\theta) \ge \lambda\overline{\varphi}(\nu) + (1-\lambda)\overline{\varphi}(\theta) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall\varphi\in H)\ \overline{\varphi}(\mu) \ge \overline{\varphi}(\nu) \Leftrightarrow \mu \overset{\omega^H}{\gtrsim} \nu.$$

2. Отношение ω^H замкнуто, то есть условия $\mu_n \overset{\omega^H}{\gtrsim} \nu_n$, $\mu_n \to \mu$, $\nu_n \to \nu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ влекут $\mu \overset{\omega^H}{\gtrsim} \nu$.

Доказательство. Надо показать, что при всякой функции $\varphi \in H$ выполняется соотношение $\overline{\varphi}(\mu) \ge \overline{\varphi}(\nu)$. Предположим, что $\overline{\varphi}(\mu) < \overline{\varphi}(\nu)$. Так как $\mu_n \to \mu$, $\nu_n \to \nu$, то $\overline{\varphi}(\mu_n) \to \overline{\varphi}(\mu)$, $\overline{\varphi}(\nu_n) \to \overline{\varphi}(\nu)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные n_1, n_2, при которых $|\overline{\varphi}(\mu_n) - \overline{\varphi}(\mu)| < \varepsilon$ для всех $n_1 > n_2$ и $|\overline{\varphi}(\nu_n) - \overline{\varphi}(\nu)| < \varepsilon$ для всех $n_1 > n_2$. Взяв $\varepsilon < \dfrac{\overline{\varphi}(\nu) - \overline{\varphi}(\mu)}{2}$, получаем, что при $n > \max(n_1, n_2)$ выполняется $\overline{\varphi}(\mu_n) < \overline{\varphi}(\nu_n)$, что противоречит условию $\mu_n \overset{\omega^H}{\gtrsim} \nu_n$.

Покажем теперь, что условия двусторонней выпуклости и замкнутости, которыми обладают квазипорядки вида ω^H, полностью их характеризуют в случае, когда A – конечное множество. Таким образом, указанные условия представляют собой абстрактную характеристику расширений вида ω^H порядка ω, заданного на конечном множестве.

Теорема 1. Пусть ω – отношение порядка на конечном множестве A и квазипорядок ρ является его расширением на множество вероятностных мер. Для того чтобы для некоторого подмножества $H \subseteq C_0(\omega)$ выполнялось $\rho = \omega^H$, необходимо и достаточно, чтобы ρ было двусторонне выпуклым и замкнутым.

Лемма 1. Если квазипорядок $\gtrsim$, заданный на выпуклом компактном подмножестве $K \subseteq R^n$, удовлетворяет условиям двусторонней выпуклости и замкнутости, то он совпадает с ограничением на K квазипорядка, наведенного на R^n некоторым выпуклым замкнутым конусом.

Доказательство. Положим

$$C = \{\lambda(x^1 - y^1) : x^1, y^1 \in K, x^1 \gtrsim \lambda^1, y \geq 0\}.$$

Используя условие двусторонней выпуклости, нетрудно проверить, что C – выпуклый конус. Ввиду компактности множества K и замкнутости квазипорядка $\gtrsim$ этот конус будет замкнутым. Проверим, что $\gtrsim$ совпадает с ограничением на K квазипорядка, наведенного на R^n конусом C, то есть

$$x \gtrsim y \Leftrightarrow (x - y) \in C \quad (x, y \in K). \tag{1}$$

Импликация слева направо в (1) очевидна. Проверим обратную импликацию. Пусть для $x,\ y \in K$ выполняется правая часть (1), то есть $x - y = \lambda(x^1 - y^1)$, где $x^1, y^1 \in K$, $x^1 \gtrsim y^1$, $\lambda \geq 0$. Учитывая, что $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \in K$, получаем из условия $x^1 \gtrsim y^1$ по аксиоме двусторонней выпуклости

$$\frac{\lambda}{\lambda+2}x^1 + \frac{2}{\lambda+2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \gtrsim \frac{\lambda}{\lambda+2}y^1 + \frac{2}{\lambda+2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right),$$

откуда

$$\frac{1}{\lambda+2}x + \frac{\lambda+1}{\lambda+2}\left(\frac{1}{\lambda+1}y + \frac{\lambda}{\lambda+1}x^1\right) \gtrsim \frac{1}{\lambda+2}y + \frac{\lambda+1}{\lambda+2}\left(\frac{1}{\lambda+1}x + \frac{\lambda}{\lambda+1}y^1\right). \tag{2}$$

Так как $x - y = \lambda(x^1 - y^1)$, то полагая $\frac{1}{\lambda+1}x + \frac{\lambda}{\lambda+1}y^1 = \frac{1}{\lambda+1}y + \frac{\lambda}{\lambda+1}x^1 = z$, перепишем (2) в виде $\frac{1}{\lambda+2}x + \frac{\lambda+1}{\lambda+2}z \gtrsim \frac{1}{\lambda+2}y + \frac{\lambda+1}{\lambda+2}z$.

Учитывая, что $z \in K$, и используя аксиому двусторонней выпуклости, получаем отсюда $x \gtrsim y$.

Перейдем к доказательству теоремы 1. В силу предложения 3 требуется установить лишь достаточность. Считая $|A| = n$, отождествим множество вероятностных мер на A со стандартным $(n-1)$-мерным симплексом $S_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, n), \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$. При этом элементы множества A отождествляются с вершинами этого симплекса: $A = (\delta_i)$, $i = 1, \ldots, n$ (δ_i есть n-мерный вектор, i-я компонента которого равна единице, а остальные компоненты – нули). Отношение ρ считается теперь заданным на симплексе S_n, а отношение ω – на множестве его вершин. По лемме 1 квазипорядок ρ совпадает с ограничением на S_n конического квазипорядка, наведенного замкнутым конусом $C = \{\lambda(x^1 - y^1) : x^1, y^1 \in S_n, x^1 \gtrsim \lambda^1, y \geq 0\}$, откуда для любых $x,\ y \in S_n$ справедлива равносильность

$$x \overset{\rho}{\gtrsim} y \Leftrightarrow (x - y) \in C. \tag{3}$$

Поскольку конус C замкнут, выполняется равносильность

$$(x - y) \in C \Leftrightarrow (\forall z \in C^*)(z, x) \geq (z, y), \tag{4}$$

где C^* – конус, двойственный конусу C. Для произвольного n-мерного вектора $z = (z_1, \ldots, z_n)$ положим $\tau_z(\delta_i) = z_i$. τ_z можно рассматривать как отображение из A в R. Для $z \in C^*$ это отображение будет изотонным относительно квазипорядка ω. Действительно, пусть $\delta_i \overset{\omega}{\gtrsim} \delta_j$. Так как $\omega \subseteq \rho$, то $\delta_i \overset{\rho}{\gtrsim} \delta_j$, и в силу (3) получаем $(\delta_i - \delta_j) \in C$; учитывая, что $z \in C$, получаем $(z, \delta_i - \delta_j) \geq 0$, откуда $\tau_z(\delta_i) \geq \tau_z(\delta_j)$. Замечая теперь, что для $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S_n$ выполняется равенство

$$\overline{\tau}_z(x) = \sum_{i=1}^{n} \tau_z(\delta_i) x_i = \sum_{i=1}^{n} z_i x_i = (z, x),$$

получаем из (3), (4) равносильность:

$$x \overset{\rho}{\gtrsim} y \Leftrightarrow (\forall z \in C^*)\, \overline{\tau}_z(x) \geq \overline{\tau}_z(y),$$

что и доказывает теорему 1.

1.3. Для квазипорядков вида ω^H, где $H \subseteq C_0(\omega)$, существует наименьший – им является квазипорядок $\omega^{C_0(\omega)}$. Так как множество отображений $C_0(\omega)$ аппроксимирует квазипорядок ω, то расширение $\omega^{C_0(\omega)}$ будет продолжением порядка ω; будем называть его *каноническим продолжением* порядка ω на множество вероятностных мер и обозначать через $\tilde{\omega}$. В явном виде каноническое продолжение порядка ω задается формулой

$$\mu \overset{\tilde{\omega}}{\gtrsim} \nu \Leftrightarrow (\forall \varphi \in C_0(\omega))\, \overline{\varphi}(\mu) \geq \overline{\varphi}(\nu).$$

В общем случае отношение $\tilde{\omega}$ является отношением квазипорядка на множестве вероятностных мер. Если в качестве Σ_A взять σ-алгебру, порожденную мажорантно устойчивыми в $\langle A, \omega \rangle$ подмножествами, то $\tilde{\omega}$ будет отношением порядка [3]. В частности, в случае конечного множества A каноническое продолжение порядка ω всегда является отношением порядка.

Эффективное выражение отношения $\tilde{\omega}$ основано на следующей теореме.

Теорема 2. Расширения порядка ω на множество вероятностных мер с помощью множества $C_0(\omega)$ всех ограниченных изотонных отображений из A в R и с помощью множества $C^2(\omega)$ всех изотонных отображений из A в двухэлементное множество $\{0, 1\}$ совпадают между собой: $\omega^{C_0(\omega)} = \omega^{C^2(\omega)}$.

Лемма 2. Пусть $C^f(\omega)$ – множество всех изотонных отображений упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ в R, имеющих конечное число значений. Тогда $\omega^{C_0(\omega)} = \omega^{C^f(\omega)}$.

Доказательство. Достаточно проверить включение $\omega^{C^f(\omega)} \subseteq \omega^{C_0(\omega)}$. В самом деле, пусть для $\mu, \nu \in \boldsymbol{P}_\omega(A)$ выполняется $\mu \overset{C^f(\omega)}{\gtrsim} \nu$. Надо показать, что $\overline{\varphi}(\mu) \geq \overline{\varphi}(\nu)$, где $\varphi \in C_0(\omega)$. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ определим функцию φ_k: $A \to R$, полагая $\varphi_k(a) = \frac{m}{k}$, где m – наибольшее целое число, для которого $\frac{m}{k} \leq \varphi(a)$ ("срезка" функции φ по $1/k$). Так как φ ограничена, то φ_k имеет конечное число значений; кроме того, φ_k изотонна. Таким образом, $\varphi_k \in C^f(\omega)$, откуда $\overline{\varphi}_k(\mu) \geq \overline{\varphi}_k(\nu)$. Далее, ввиду того, что $|\varphi_k - \varphi| < \frac{1}{k}$, последовательность φ_k равномерно сходится к φ, поэтому $\overline{\varphi}_k(\mu) \to \overline{\varphi}(\mu)$, $\overline{\varphi}_k(\nu) \to \overline{\varphi}(\nu)$. Учитывая, что $\overline{\varphi}_k(\mu) \geq \overline{\varphi}_k(\nu)$, получаем $\overline{\varphi}(\mu) \geq \overline{\varphi}(\nu)$.

Замечание. Ясно, что в лемме 2 можно заменить $C^f(\omega)$ на множество $C^f_+(\omega)$ всех неотрицательных изотонных отображений, имеющих конечное число значений.

Через cone (H) далее будем обозначать выпуклую коническую оболочку подмножества $H \subseteq C_0(\omega)$.

Лемма 3. Выпуклая коническая оболочка множества $C^2(\omega)$ совпадает с $C_+^f(\omega)$.

Доказательство. Ясно, что $C_+^f(\omega)$ есть выпуклый конус, содержащий $C^2(\omega)$, поэтому cone $(C^2(\omega)) \subseteq C_+^f(\omega)$. Остается проверить обратное включение, то есть что всякое неотрицательное изотонное отображение ψ упорядоченного множества $<A, \omega>$ в R, имеющее конечное число значений, принадлежит выпуклой конической оболочке множества $C^2(\omega)$. Действительно, пусть значения функции ψ суть $r_1 < r_2 < \ldots < r_p$, причем $r_1 \geq 0$. Легко видеть справедливость следующего разложения функции ψ:

$$\psi = r_1\chi_{A_1} + (r_2 - r_1)\chi_{A_2} + \ldots + (r_p - r_{p-1})\chi_{A_p}, \tag{5}$$

где χ_{A_k} – характеристическая функция множества $A_k = \{a \in A : \psi(a) \geq r_k\}$ $(k = 1, \ldots, p)$. Ввиду мажорантной устойчивости подмножества A_k выполняется $\chi_{A_k} \in C^2(\omega)$, и в силу (5) получаем $\psi \in$ cone $(C^2(\omega))$.

Лемма 4. Для любого подмножества $H \subseteq C_0(\omega)$ имеет место равенство $\omega^{\text{cone}\,H} = \omega^H$.

Доказательство. Включение $\omega^{\text{cone}\,H} \subseteq \omega^H$ очевидно. Покажем обратное включение. Пусть $\mu \overset{\omega^H}{\gtrsim} \nu$. Возьмем $\psi \in$ cone (H) . Тогда ψ может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации: $\psi = \sum_{s=1}^{m} c_s\varphi_s$, где $c_s \geq 0$, $\varphi_s \in H (s = \overline{1, m})$. Для любого $s = \overline{1, m}$ выполняется $\overline{\varphi}_s(\mu) \geq \overline{\varphi}_s(\nu)$. Умножая эти неравенства на $c_s \geq 0$, складывая и используя линейность функций $\overline{\varphi}_s$, получаем $\sum_{s=1}^{m} \overline{c_s\varphi_s}(\mu) \geq \sum_{s=1}^{m} \overline{c_s\varphi_s}(\nu)$, откуда $\overline{\varphi}(\mu) \geq \overline{\varphi}(\nu)$. Таким образом, $\mu \overset{\omega^{\text{cone}\,H}}{\gtrsim} \nu$, что доказывает обратное включение.

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из 2–4 лемм. Так как $C^2(\omega)$ совпадает с множеством характеристических функций мажорантно устойчивых в $<A, \omega>$ подмножеств, получаем в качестве следствия теоремы 2 эффективное выражение канонического продолжения порядка на множество вероятностных мер.

Следствие. Условие $\mu \overset{\tilde{\omega}}{\gtrsim} \nu$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mu(B) \geq \nu(B)$ для любого подмножества $B \subseteq A$, мажорантно устойчивого в $<A, \omega>$.

2. Максимальные элементы выпуклых многогранников вероятностных мер

2.1. Рассмотрим упорядоченное множество $<A, \omega>$, на котором зафиксирована σ-алгебра Σ_A, содержащая все мажорантно устойчивые в $<A, \omega>$ подмножества. По-прежнему через $\boldsymbol{P}_\omega(A)$ обозначаем множество определенных на Σ_A вероятностных мер. Ясно, что выпуклая линейная комбинация $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$ вероятностных мер $\mu_1\mu_2 \in \boldsymbol{P}_\omega(A)$, определенная условием

$$[\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2](B) = \lambda_1\mu_1(B) + \lambda_2\mu_2(B) \quad (\lambda_1\lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ B \in \Sigma_A),$$

снова есть вероятностная мера, принадлежащая $\boldsymbol{P}_\omega(A)$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{P}_\omega(A)$ образует выпуклое подмножество в линейном пространстве всех функций, определенных на Σ_A. Для всякого подмножества $M \subseteq \boldsymbol{P}_\omega(A)$ существует его выпуклая оболочка conv M, представляющая собой множество всех выпуклых линейных комбинаций конечного числа вероятностных мер, взятых из M; при этом conv $M \subseteq \boldsymbol{P}_\omega(A)$. Выпуклая оболочка конечного множества вероятностных мер называется *выпуклым многогранником вероятностных мер*. Основной результат данного пункта – теорема 3, дающая описание вероятностных мер, являющихся максимальными элементами относительно канонического продолжения $\tilde{\omega}$ в выпуклых многогранниках вероятностных мер..

2.2. **Теорема 3**. Пусть P – выпуклый многогранник вероятностных мер, заданных на конечном упорядоченном множестве $<A, \omega>$. Для того чтобы вероятностная мера $\mu^0 \in P$ была максимальным относительно $\tilde{\omega}$ элементом многогранника P, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое строго изотонное отображение φ: $A \to R$, для которого $\overline{\varphi}(\mu^0) \geq \overline{\varphi}(\mu)$ при всех $\mu \in P$.

Идея доказательства теоремы 3 состоит в построении такого отображения, которое переводит выпуклый многогранник вероятностных мер в выпуклый многогранник конечномерного линейного пространства, причем так, что максимальные относительно $\tilde{\omega}$ вероятностные меры переходят в его эффективные точки (точки, оптимальные по Парето [5]). Для характеризации эффективных точек выпуклых многогранников в R^m докажем две леммы. Напомним, что вектор $\boldsymbol{x} \in R^m$ называется *положительным*, если все его компоненты положительны; *полуположительным* – если все его компоненты неотрицательны и хотя бы одна компонента положительна.

Лемма 5. Для выпуклого многогранника $Q_0 \subset R^m$, не содержащего полуположительных векторов, существует проходящая через 0 отделяющая гиперплоскость с положительным вектором нормали.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^t$ – вершины многогранника Q_0. Обозначим через K выпуклый конус, порожденный векторами $\{\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^t\}$, то есть $K = \{\sum_{s=1}^{t} \lambda_s \boldsymbol{a}^s : \lambda_s \geq 0 : s = \overline{1,t};\ t = 1,2,\ldots\}$. Как известно [6, лемма 2.6], K – выпуклый замкнутый конус. Покажем, что в нашем случае K не содержит полуположительных векторов. Возьмем $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{a} \neq 0$. Тогда $\boldsymbol{a} = \sum_{s=1}^{t} \lambda_s \boldsymbol{a}^s = \lambda \sum_{s=1}^{t} \lambda'_s \boldsymbol{a}^s$, где $\lambda = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_t) > 0$, $\lambda'_s = \lambda_s/\lambda$. Учитывая, что $\lambda'_s \geq 0$ $(s = 1, \ldots, t)$ и $\sum_{s=1}^{t} \lambda'_s = 1$, получаем $\boldsymbol{a}' = \left(\sum_{s=1}^{t} \lambda'_s \boldsymbol{a}^s\right) \in Q_0$. Если бы вектор $\boldsymbol{a}$ был полуположительным, то полуположительным был бы и вектор $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}/\lambda$ в противоречие с предложением. Учитывая, что K не содержит полуположительных векторов, получаем по теореме 3.6 из [7], что конус $(-K^*)$ содержит положительный вектор $\boldsymbol{c}$ (через K^* обозначается конус, двойственный конусу K). Для любого $\boldsymbol{y} \in K$ выполняется $(-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \geq 0$, и так как $Q_0 \subseteq K$, то $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \leq 0$ для всех $\boldsymbol{y} \in Q_0$. Проходящая через 0 гиперплоскость с вектором нормали $\boldsymbol{c}$ является искомой.

Лемма 6. Пусть Q – выпуклый многогранник в R^m. Для того чтобы точка $\boldsymbol{y}^0 \in Q$ была эффективной в Q, необходимо и достаточно, чтобы существовал положительный вектор $\boldsymbol{c} \in R^m$, для которого $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}^0) \geq (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y})$ при всех $\boldsymbol{y} \in Q$.

Достаточность получается непосредственно. Необходимость сразу следует из леммы 5 с учетом того, что точка $\boldsymbol{y}^0$ является эффективной в Q тогда и только тогда, когда $(Q - \boldsymbol{y}^0)$ не содержит полуположительных векторов.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ – перечень всех мажорантно устойчивых в $<A, \omega>$ подмножеств. По следствию 1 теоремы 2 выполняется равносильность:

$$\mu_1 \overset{\tilde{\omega}}{\gtrsim} \mu_2 \Leftrightarrow (\mu_1(A_1),\ldots,\mu_1(A_m)) \geqq (\mu_2(A_1),\ldots,\mu_2(A_m)), \tag{6}$$

где $\geqq$ есть покомпонентное упорядочение в R^m. Равносильность (6) означает, что отображение ξ, которое каждой вероятностной мере $\mu \in \boldsymbol{P}_\omega(A)$ ставит в соответствие m-мерный вектор $\xi(\mu) = (\mu(A_1), \ldots, \mu(A_m))$, является изоморфизмом квазиупорядоченного множества $\langle \boldsymbol{P}_\omega(A), \tilde{\omega} \rangle$ в упорядоченное множество $\langle R^m, \geqq \rangle$. Отсюда следует, что максимальными относительно $\tilde{\omega}$ вероятностными мерами будут в точности те, образы которых при отображении ξ являются эффективными точками. Далее, отображение ξ переводит выпуклую линейную комбинацию вероятностных мер в выпуклую линейную комбинацию (с теми же коэффициентами) соответствующих m-мерных векторов, а значит, выпуклые многогранники вероятностных мер — в выпуклые многогранники в R^m. Учитывая лемму 6, получаем следующий результат.

Лемма 7. Вероятностная мера $\mu^0 \in P$ является максимальным относительно $\tilde{\omega}$ элементом выпуклого многогранника P тогда и только тогда, когда существует положительный вектор $\boldsymbol{c} \in R^m$, для которого $(\boldsymbol{c}, \xi(\mu^0)) \geq (\boldsymbol{c}, \xi(\mu))$ при всех $\mu \in P$.

Для завершения доказательства теоремы 3 требуется осуществить "возврат" в A. Полагая $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, отождествим вероятностные меры на A с точками $(n-1)$-мерного стандартного симплекса S_n. Построенное выше отображение ξ может быть расширено до отображения $\xi : R^n \to R^m$ условием $\xi(x_1, \ldots, x_n) = (\sum\limits_{a_i \in A_1} x_i, \ldots, \sum\limits_{a_i \in A_m} x_i)$. При этом ξ, очевидно, будет линейным отображением R^n в R^m, следовательно, для ξ существует сопряженное отображение $\xi^* : R^n \to R^m$, то есть

$$(\xi^*(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, \xi(\boldsymbol{x})). \tag{7}$$

В терминах сопряженного отображения ξ^* лемма 7 переформулируется следующим образом.

Лемма 8. Вероятностная мера $x^0 \in P$ является максимальным относительно $\tilde{\omega}$ элементом выпуклого многогранника $P \subseteq S_n$ тогда и только тогда, когда существует положительный вектор $\boldsymbol{c} \in R^m$, для которого $(\xi^*(\boldsymbol{c}), \boldsymbol{x}^0) \geq (\xi^*(\boldsymbol{c}), \boldsymbol{x})$ при всех $x \in P$.

Так как для конечного множества A образ $\overline{\varphi}(\boldsymbol{x})$ есть $(\varphi, \boldsymbol{x})$, получаем, что лемма 8 отличается от теоремы 3 лишь тем, что в последней под знаком квантора существования стоит строго изотонное отображение φ вместо $\xi^*(\boldsymbol{c})$. Мы утверждаем, что на самом деле лемма 8 равнозначна теореме 3. Для этого достаточно убедиться, что вектор $\xi^*(\boldsymbol{c})$ при положительном $\boldsymbol{c} \in R^m$ определяет строго изотонное отображение упорядоченного множества A в R, и обратно, всякое строго изотонное отображение из A в R может быть представлено таким способом (с точностью до постоянного слагаемого). Проверим вначале, что сопряженное отображение ξ^* определяется равенством

$$\xi^*(y_1, \ldots, y_m) = (\sum_{a_1 \in A_j} y_j, \ldots, \sum_{a_n \in A_j} y_j). \tag{8}$$

В силу единственности сопряженного отображения достаточно установить равенство (7). Действительно, полагая $(i, j) \in \rho \Leftrightarrow a_i \in A_j$, имеем

$$(\xi^*(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{a_i \in A_j} y_j) x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{a_i \in A_j} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in \rho<i>} x_i y_j = \sum_{(i,j) \in \rho} x_i y_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in \overset{-1}{\rho} <j>} x_i y_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{a_i \in A_j} x_i y_j = \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{a_i \in A_j} x_i = (\boldsymbol{y}, \xi(\boldsymbol{x})).$$

Убедимся теперь, что при положительном векторе $\boldsymbol{y} \in R^m$ вектор $\xi^*(\boldsymbol{y})$ определяет строго изотонное отображение упорядоченного множества $<A, \omega>$ в R. Действительно, если $a_{i_1} \overset{\omega}{<} a_{i_2}$, то каждое мажорантно устойчивое в $<A, \omega>$ подмножество, содержащее a_{i_1}, содержит также и a_{i_2}, при этом мажорантно устойчивое подмножество $\omega <a_{i_2}>$ содержит a_{i_2}, но не содержит a_{i_1}; учитывая, что все компоненты вектора $\boldsymbol{y}$ положительны, получаем согласно (8) $\sum\limits_{a_{i_1} \in A_j} y_j < \sum\limits_{a_{i_2} \in A_j} y_j$.

Обратно, пусть φ – некоторое строго изотонное отображение из A в R. Заметим, что каково бы ни было строго изотонное отображение φ_0 из A в R, найдется $\delta > 0$, при котором отображение $\varphi - \delta\varphi_0$ изотонно (достаточно положить $\delta < \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$), где

$$\alpha_1 = \min_{a_{i_2} > a_{i_1}} (\varphi(a_{i_2}) - \varphi(a_{i_1})),\ \alpha_2 = \max_{a_{i_2} > a_{i_1}} (\varphi_0(a_{i_2}) - \varphi_0(a_{i_1})).$$

Зафиксируем какой-нибудь положительный вектор $\boldsymbol{y}_0 \in R^m$. В силу отмеченного выше найдется $\delta > 0$, при котором отображение $\psi = \varphi - \delta\xi^*(\boldsymbol{y}_0)$ является изотонным. Не нарушая общности, считаем, что значения ψ неотрицательны (в противном случае рассматриваем далее функцию $\psi + \alpha$, имеющую неотрицательные значения). Пусть $z \in R^m$ – вектор, для которого в обозначениях леммы 3

$$z_1 = r_1,\ z_k = r_k - r_{k-1} \quad (k = 1, \ldots, p),$$

а остальные компоненты равны нулю. Согласно (5) $\psi = \xi^*(z)$; получаем, учитывая линейность отображения ξ^* : $\varphi = \delta\xi^*(\boldsymbol{y}_0) + \psi = \xi^*(\delta\boldsymbol{y}_0) + \xi^*(z) = \xi^*(\delta\boldsymbol{y}_0 + z)$. Так как вектор $\boldsymbol{y}_0$ положителен и вектор z неотрицателен, то вектор $\boldsymbol{y} = \delta\boldsymbol{y}_0 + z$ положителен и $\varphi = \xi^*(\boldsymbol{y})$. Теорема полностью доказана.

Библиографический список

1. *Розен В.В.* Смешанные расширения игр с упорядоченными исходами // ЖВМ и МФ. 1976. № 6. С. 1436–1450.
2. *Розен В.В.* Об упорядочиваемости множества вероятностных мер // Изв. вузов. Сер. Матем. 1988. № 11. С. 72–74.
3. *Розен В.В.* О мерах на упорядоченных множествах // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1993. Вып. 11. С. 35–39.
4. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М., 1984.
5. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
6. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М., 1972.
7. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М., 1972.