УДК 514.765

О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. II

Н. П. Можей

Можей Наталья Павловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Беларусь, 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, д. 6, mozheynatalya@mail.ru

Одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связей между кривизной и топологической структурой многообразия. В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе псевдоримановых многообразий, например в классе однородных псевдоримановых многообразий. Настоящая статья является продолжением одноименной работы (части 1). В статье определены основные понятия – изотропно-точная пара, псевдориманово однородное пространство, аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, связность Леви–Чевита, тензор Риччи, Риччи-плоское, Эйнштейново, Риччи-параллельное, локально-симметрическое, конформно-плоское пространства. В работе для трехмерных псевдоримановых однородных пространств определено, при каких условиях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим или конформно-плоским. Кроме этого, для всех указанных пространств выписаны в явном виде связности Леви–Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: группа преобразований, псевдориманово многообразие, тензор Риччи, Эйнштейново пространство, конформно-плоское пространство.

Поступила в редакцию: 03.11.2018 / Принята: 31.01.2019 / Опубликована: 01.06.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-172-184

Окончание. Начало см.: Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 1. С. 29–41.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию многообразий Эйнштейна, локально-симметрических, Риччи-параллельных и конформно-плоских многообразий посвящены работы многих математиков. Локально-симметрические пространства введены П. А. Широковым и Э. Картаном. Естественные обобщения симметрических пространств привели к другим, не менее интересным классам пространств, одним из которых является класс псевдоримановых пространств с параллельным тензором Риччи, теория которых сводится к теории Эйнштейновых пространств (в книге А. Бессе [1] собраны факты по Эйнштейновым многообразиям, полученные различными авторами, см. также обзор М. Вана [2]). Многомерным обобщением двумерных многообразий с локально изотермической координатной системой [3] являются конформно-плоские многообразия (см., например, [1]). В случае многообразий постоянной скалярной кривизны класс конформно-плоских многообразий содержится в классе эйнштейновоподобных многообразий в смысле А. Грея [4]. Исследованию многообразий указанных классов посвящены работы М. А. Акивиса, В. В. Гольдберга, Н. Кюйпера, Д. В. Алексеевского, Б. Н. Кимельфельда, Е. Д. Родионова, В. В. Славского, О. Ковальского, С. Никшевича и др. (см., например, [5–8]); задача описания многообразий каждого типа не решена в полном объеме, но для некоторых классов пространств получен ответ (подробнее см. обзор [9]).

Настоящая статья является продолжением одноименной работы (части 1), при изложении сохранены обозначения, введенные ранее. В работе продолжается изучение геометрических свойств трехмерных псевдоримановых однородных пространств, в части 2 внимание сосредоточено на однородных пространствах, не допускающих риманову метрику. В ней приведены основные факты по указанным пространствам и их классификация, далее изучена геометрия каждого класса, а именно для трехмерных псевдоримановых однородных пространств выписаны в явном виде связности Леви – Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, тензоры Риччи и определено, в каких случаях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим либо конформно-плоским.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть M — дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\overline{G}$, $G = \overline{G}_x$ — стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \overline{G})$ равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли $(\overline{G}, G)$, где $G \subset \overline{G}$ (см., например, [10]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы Ли $\overline{G}$, а $\mathfrak{g}$ — подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}$.

Псевдориманово однородное пространство задается тройкой $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, где $\overline{G}$ — связная группа Ли, M является связным гладким многообразием с транзитивным действием $\overline{G}$, а $\mathbf{g}$ — инвариантная псевдориманова метрика на M. Инвариантные псевдоримановы метрики $\mathbf{g}$ на M находятся во взаимно-однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G-модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ ([11]). Существует единственное (с точностью до эквивалентности) псевдориманово однородное пространство $(\overline{G}, M, \mathbf{g})$, соответствующее $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$, такое, что M односвязно и G связна [12]. Будем называть тройку $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *локально псевдоримановым однородным пространством*. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

2. ТРЕХМЕРНЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Локально псевдоримановы однородные пространства, не допускающие риманову метрику (только псевдориманову), описаны в работе [13]:

Теорема 1. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *— локально псевдориманово однородное пространство, не допускающее риманову метрику,* $\operatorname{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ *и* $\mathfrak{g} \neq \{0\}$. *Оно эквивалентно только одной из троек, приведенных в табл. 1* (e_i $(i = \overline{1,3})$ *— базис* $\mathfrak{g}$, u_1, u_2, u_3 *— базис* $\mathfrak{m}$, *нумерация пар соответствует приведенной в [14]*).

Таблица 1 / Table 1

Локально псевдоримановы пространства / Locally pseudo-Riemannian spaces

B	Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ / Pair $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$	1.1.1, $\lambda = -1$, $\bar{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{so}(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$, $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \ a \neq 0$	$\begin{array}{c\|cccc} 1.1.2,\ \lambda = -1 & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & u_2 & 0 & 0 & u_2 \\ u_3 & 0 & 0 & -u_2 & 0 \end{array}$ $\begin{array}{c\|cccc} 1.1.6 & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \ a \neq 0$	1.1.5, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,1)$, $\begin{array}{c\|cccc} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
$B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \ ab \neq 0$	$\begin{array}{c\|cccc} 1.1.7,\ \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & u_1 & -u_2 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & e_1 + u_3 & 0 \\ u_2 & u_2 & -e_1 - u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
$B = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{array}{c\|cccc} 1.8.1,\ 1.8.4,\ 1.8.5 & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & \delta e_1 \\ u_3 & -u_2 & 0 & -\delta e_1 & 0 \end{array}$ $\delta = 0, 1, -1$ $\begin{array}{c\|cccc} 1.8.3 & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 & 0 & u_2 + \alpha e_1 \\ u_3 & -u_2 & -u_1 & -u_2 - \alpha e_1 & 0 \end{array}$ $\begin{array}{c\|ccccc} 2.21.1,\ \lambda = 0 & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

Окончание табл. 1 / End of Table 1

B	Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ / Pair $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$
$B = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3.4.1, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2,1) \rightthreetimes \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1)$, $\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1, 0$	$\begin{array}{c\|cccc} 1.8.2,\ \bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} & e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$
$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$	$\begin{array}{c\|ccccc} 2.21.4 & e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_1 & 0 & u_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & -u_2 & -u_3 & 0 \end{array}$ 3.4.2, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(2,2) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, $\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array}$ 3.4.3, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}(3,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, $\begin{array}{c\|cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array}$

3. ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Тензоры кручения $T \in \operatorname{Inv} {T_2}^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in \operatorname{Inv} {T_3}^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид $T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = \Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} - \Lambda(y)x_{\mathfrak{m}} - [x, y]_{\mathfrak{m}}$, $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$. *Псевдориманова связность*, соответствующая форме B, находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x,y]_{\mathfrak{m}} + u(x,y), \quad \text{где} \quad 2B(u(x,y),z) = B(x,[z,y]_{\mathfrak{m}}) + B([z,x]_{\mathfrak{m}},y)$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{m}$. Существует единственная псевдориманова связность без кручения, называемая *Леви – Чевита связностью*. Тензор Риччи определяется через тензор кривизны следующим образом: $\mathrm{Ric}(x,y) = \mathrm{tr}\{z \to R(z,x)y\}$, где x, y, z — произвольные касательные вектора на многообразии.

С тензором Риччи связано несколько геометрических свойств многообразия. Многообразие $(M, \mathbf{g})$ называется *Риччи-плоским*, если тензор Риччи тождественно равен нулю. Более общее условие – многообразие является *Эйнштейновым*, если $\mathrm{Ric} = \lambda\mathbf{g}$ для некоторой константы λ. Условие *Риччи-параллельности* — ковариантная производная тензора Риччи равна нулю. Если ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, т.е. $\Lambda(R) = 0$, многообразие называется *локально-симметрическим*.

Равенство нулю тензора Коттона (тензора Схоутена – Вейля):

$$C(x,y,z) = \nabla_z \mathrm{Ric}(x,y) - \nabla_y \mathrm{Ric}(x,z) + \frac{1}{2(n-1)}\left(\nabla_y R\mathbf{g}(x,z) - \nabla_z R\mathbf{g}(x,y)\right),$$

где $x, y, z \in \mathfrak{m}$ (а R — скалярная кривизна) в размерности $n = 3$ является необходимым и достаточным условием того, что многообразие является *конформно-плоским* [15].

Теорема 2. *Пусть* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$ *— одно из трехмерных локально псевдоримановых однородных пространств, представленных в теореме 1. Риччи-плоские, Эйнштейновы, Риччи-параллельные, локально-симметрические и конформно-плоские пространства выписаны в табл. 2 и 3.*

Таблица 2 / Table 2

Риччи-плоские, Эйнштейновы и Риччи-параллельные пространства
Ricci-flat, Einstein and Ricci-parallel spaces

Пара Pair	Риччи-плоское Ricci-flat	Эйнштейново Einstein	Риччи-параллельное Ricci-parallel
1.1.1	да	да ($\lambda = 0$)	да
1.1.2	нет	да ($\lambda = -1/(2a)$)	да
1.1.5	нет	нет	да
1.1.6	нет	нет	нет
1.1.7	нет	при $b = a$ ($\lambda = -1/(2a)$)	при $b = a$
1.8.1	да	да ($\lambda = 0$)	да
1.8.2	нет	при $\varepsilon = 0$ ($\lambda = 1/(2a)$)	при $\varepsilon = 0$
1.8.3	при $\alpha = 0$	при $\alpha = 0$ ($\lambda = 0$)	при $\alpha = 0$
1.8.4	нет	нет	да
1.8.5	нет	нет	да
2.21.1	да	да ($\lambda = 0$)	да
2.21.4	нет	да ($\lambda = 1/(2a)$)	да
3.4.1	да	да ($\lambda = 0$)	да
3.4.2	нет	да ($\lambda = 2/a$)	да
3.4.3	нет	да ($\lambda = -2/a$)	да

Таблица 3 / Table 3

Локально-симметрические и конформно-плоские пространства
Locally symmetric and conformally flat spaces

Пара Pair	Локально-симметрическое Locally-symmetric	Конформно-плоское Conformally-flat
1.1.1	да	да ($R = 0$)
1.1.2	да	да ($R = -3/(2a)$)
1.1.5	да	да ($R = -2/a$)
1.1.6	нет	нет ($R = a/2$)
1.1.7	при $b = a$	при $b = a$ ($R = (b-4a)/(2a^2)$)
1.8.1	да	да ($R = 0$)
1.8.2	при $\varepsilon = 0$	при $\varepsilon = 0$ ($R = 3/(2a)$)
1.8.3	при $\alpha = 0$	да ($R = 0$)
1.8.4	да	да ($R = 0$)
1.8.5	да	да ($R = 0$)
2.21.1	да	да ($R = 0$)
2.21.4	да	да ($R = 3/(2a)$)
3.4.1	да	да ($R = 0$)
3.4.2	да	да ($R = 6/a$)
3.4.3	да	да ($R = -6/a$)

Доказательство. Поскольку ограничение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, связность однозначно определяется значениями на $\mathfrak{m}$. Будем выписывать ее через $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R будем выписывать значениями $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а кручения T — значениями $T(u_1,u_2)$, $T(u_1,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Рассмотрим, например, случай 1.8.2. Аффинная связность имеет вид [13] (по умолчанию все параметры принадлежат $\mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -p_{12} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{11}+p_{12} & q_{12}+p_{13} \\ 0 & 0 & q_{11}+2p_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ -p_{12} & r_{11}+q_{12} & r_{12}+q_{13} \\ 0 & -p_{12} & r_{11}+2q_{12}+p_{13} \end{pmatrix}.$$

Связность является связностью Леви – Чевита при выполнении следующих условий:

$$(2p_{12}-1)a = 0,\ -(2p_{12}-1)a = 0,\ 2p_{13}a = 0,\ -(2p_{12}-1)a = 0,\ 2q_{12}a = 0,$$
$$(2p_{12}-1)a = 0,\ -2(q_{12}+p_{13})a = 0,\ 2q_{13}a + 2\varepsilon p_{12} = 0,\ (2p_{12}-1)a = 0,\ 2r_{11}a = 0,$$
$$-(2p_{12}-1)a = 0,\ -2(r_{11}+q_{12})a = 0,\ 2r_{12}a - 2\varepsilon p_{12} + 2\varepsilon = 0,\ 2(r_{11}+2q_{12}+p_{13})a = 0,$$
$$-2r_{12}a - 2q_{13}a - 2\varepsilon = 0,\ 2r_{13}a + 2\varepsilon r_{11} + 4\varepsilon q_{12} + 2\varepsilon p_{13} = 0,$$

т. е. при $r_{12} = -\varepsilon/(2a)$, $p_{12} = 1/2$, $p_{13} = 0$, $q_{12} = 0$, $q_{13} = r_{12}$, $r_{11} = 0$, $r_{13} = 0$. Полученная связность имеет вид, представленный в табл. 4.

Тензор кривизны $R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x,y])$ инвариантной аффинной связности:

$$R(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} 0 & p_{12}^2 - p_{12} & 3p_{13}p_{12} - p_{13} \\ 0 & 0 & p_{12}^2 - p_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix} -p_{12}^2+p_{12} & q_{12}p_{12}-p_{13}p_{12}-q_{12} & p_{12}q_{13}+2p_{13}q_{12}+p_{13}^2-q_{13} \\ 0 & -q_{11}-p_{12} & q_{12}p_{12}+2p_{13}p_{12}-q_{12}-p_{13} \\ 0 & 0 & p_{12}^2-q_{11}-2p_{12} \end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=$$

$$=\begin{pmatrix} -q_{12}p_{12}-r_{11} & -r_{12}p_{12}+q_{12}^2-p_{12}q_{13}-r_{12} & -2p_{12}r_{13}+3q_{12}q_{13}+q_{13}p_{13}-r_{12}p_{13}-r_{13} \\ -p_{12}^2+p_{12} & -p_{13}p_{12}-r_{11}-q_{12} & q_{12}^2+2p_{13}q_{12}+p_{13}^2-r_{12}p_{12}-r_{12}-q_{13} \\ 0 & -p_{12}^2+p_{12} & q_{12}p_{12}+p_{13}p_{12}-r_{11}-2q_{12}-p_{13} \end{pmatrix}.$$

Таблица 4 / Table 4

Аффинные связности / Affine connections

Пара / Pair	Аффинная связность / Affine connection
1.1.1, 1.1.5	нулевая
1.1.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/(2a) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/(2a) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a/2 & 0 & 0 \\ 0 & a/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -b/(2a) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/(2a) \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & b/(2a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.1	нулевая
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\varepsilon/(2a) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon/(2a) & 0 \\ -1/2 & 0 & -\varepsilon/a \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1.8.4, 1.8.5	нулевая
2.21.1	нулевая
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.1–3.4.3	нулевая

Алгебра Ли группы голономии инвариантной связности $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ — это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots$, где V — подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])|x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$.

Для связности Леви – Чевита (т.е. при $r_{12}=-\varepsilon/(2a)$, $p_{12}=1/2$, $p_{13}=0$, $q_{12}=0$, $q_{13}=r_{12}$, $r_{11}=0$, $r_{13}=0$) тензор кривизны имеет вид, представленный в табл. 5, а алгебра голономии — вид, представленный в табл. 6.

Тензор кручения примет вид $T(u_1,u_2)=(2p_{12}-1,0,0)$, $T(u_1,u_3)=$ $=(p_{13}-r_{11},2p_{12}-1,0)$, $T(u_2,u_3)=(q_{13}-r_{12},p_{13}-r_{11},2p_{12}-1)$, при $r_{12}=-\varepsilon/(2a)$, $p_{12}=1/2$, $p_{13}=0$, $q_{12}=0$, $q_{13}=r_{12}$, $r_{11}=0$, $r_{13}=0$ тензор кручения нулевой. Тогда тензор Риччи $\mathrm{Ric}(x,y)=\mathrm{tr}\{z\to R(z,x)y\}$ имеет вид

$$\mathrm{Ric}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_{12}^2+2p_{12} \\ 0 & 2p_{12}^2-2p_{12} & 2p_{13}p_{12}-q_{12}p_{12}+r_{11}+2q_{12} \\ -2p_{12}^2+2p_{12} & q_{12}p_{12}-2p_{13}p_{12}-2q_{12}-r_{11} & S \end{pmatrix},$$

где $S = p_{12}q_{13} + 4p_{13}q_{12} + 2p_{13}^2 - 2q_{13} + q_{12}^2 - r_{12}p_{12} - r_{12}$, т.е. для связности Леви – Чевита тензор Риччи примет вид, представленный в табл. 7.

Таблица 5 / Table 5

Тензоры кривизны / Curvature tensors

Пара / Pair	Тензор кривизны / Curvature tensor
1.1.1	нулевой
1.1.2	$\begin{pmatrix} -1/(4a) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(4a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(4a) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 1/(4a) & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.5	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.6	$\begin{pmatrix} 3a/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3a/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a^2/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a/4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2/4 \\ a/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} -(-3b+4a)/(4a) & 0 & 0 \\ 0 & (-3b+4a)/(4a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b^2/(4a^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/(4a) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2/(4a^2) \\ b/(4a) & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.1	нулевой
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & \varepsilon/(4a) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon/a & 0 \\ 1/4 & 0 & 5\varepsilon/(4a) \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.21.1	нулевой
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.1	нулевой
3.4.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Таблица 6 / Table 6

Алгебры голономии / Holonomy algebras

Пара Pair	Алгебра голономии Holonomy algebra	Пара Pair	Алгебра голономии Holonomy algebra
1.1.1	нулевая	1.8.1	нулевая
1.1.5	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.1.6	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & -ap_2 \\ 0 & -p_1 & -ap_3 \\ p_3 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & -(b/a)p_2 \\ 0 & -p_1 & -(b/a)p_3 \\ p_3 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$	1.1.2	$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & -ap_2 \\ 0 & -p_1 & -ap_3 \\ p_3 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2-(\varepsilon/a)p_3 & (\varepsilon/a)p_1 \\ p_3 & 0 & p_2 \\ 0 & p_3 & -p_1 \end{pmatrix}$	1.8.3	при $\alpha \neq 0$ — $\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $\alpha = 0$ — нулевая
1.8.4	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.8.5	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.21.1	нулевая	3.4.1	нулевая
2.21.4	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 \\ p_3 & 0 & p_2 \\ 0 & p_3 & -p_1 \end{pmatrix}$	3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 \\ p_3 & 0 & p_2 \\ 0 & p_3 & -p_1 \end{pmatrix}$

Таблица 7 / Table 7

Тензоры Риччи / Ricci tensors

Пара Pair	Тензор Риччи Ricci tensor	Пара Pair	Тензор Риччи Ricci tensor
1.1.1	нулевой	1.8.1	нулевой
1.1.5	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1.1.6	$\begin{pmatrix} 0 & a/2 & 0 \\ a/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2/2 \end{pmatrix}$
1.1.7	$\begin{pmatrix} 0 & (b-2a)/(2a) & 0 \\ (b-2a)/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2/(2a^2) \end{pmatrix}$	1.1.2	$\begin{pmatrix} 0 & -1/(2a) & 0 \\ -1/(2a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$
1.8.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3\varepsilon/(2a) \end{pmatrix}$	1.8.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$
1.8.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	1.8.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2.21.1	нулевой	3.4.1	нулевой
2.21.4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 2 \\ 0 & \mp 2 & 0 \\ \pm 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Пространство является Риччи-плоским (тензор Риччи равен нулю) при $p_{12} = 0$, $q_{13} = 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 + q_{12}^2/2 - r_{12}/2$, $r_{11} = -2q_{12}$ либо при $p_{12} = 1$, $q_{13} = 4p_{13}q_{12} + 2p_{13}^2 + q_{12}^2 - 2r_{12}$, $r_{11} = -2p_{13} - q_{12}$. Для метрической связности получаем, что пространство не может являться Риччи-плоским.

Пространство является Эйнштейновым при $\mathrm{Ric} = \lambda B$, т.е. при $\lambda a = -2p_{12}(p_{12}-1)$, $\lambda\varepsilon = (p_{12}q_{13} + 4p_{13}q_{12} + 2p_{13}^2 - 2q_{13} + q_{12}^2 - r_{12}p_{12} - r_{12})$, $r_{11} = -2p_{13}p_{12} + q_{12}p_{12} - 2q_{12}$ либо при $\lambda = 0$, $p_{12} = 0$, $q_{13} = 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 + q_{12}^2/2 - r_{12}/2$, $r_{11} = -2q_{12}$, либо при $\lambda = 0$, $p_{12} = 1$, $q_{13} = 4p_{13}q_{12} + 2p_{13}^2 + q_{12}^2 - 2r_{12}$, $r_{11} = -2p_{13} - q_{12}$. Для случая $r_{12} = -\varepsilon/(2a)$, $p_{12} = 1/2$, $p_{13} = 0$, $q_{12} = 0$, $q_{13} = r_{12}$, $r_{11} = 0$, $r_{13} = 0$ (т.е. для связности Леви – Чевита) получаем, что пространство является Эйнштейновым при $\varepsilon = 0$ ($\lambda = 1/(2a)$).

Пространство является Риччи-параллельным, если ковариантная производная тензора Риччи равна нулю, т.е. если либо $p_{13} = 0$, $q_{12} = 0$, $q_{13} = -r_{12}(p_{12} + 1)/p_{12}$, $r_{11} = 0$, $r_{13} = 0$, либо $p_{12} = 0$, $q_{13} = 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 + q_{12}^2/2 - r_{12}/2$, $r_{11} = -2q_{12}$, либо $p_{12} = 0$, $q_{13} = 2p_{13}q_{12} + p_{13}^2 + q_{12}^2/2 - r_{12}/2$, $r_{11} = -3q_{12}/2 - p_{13}/2$, либо $p_{12} = 0$, $p_{13} = -q_{12}$, $r_{11} = -q_{12}$, либо $p_{12} = 1$, $p_{13} = -r_{11}/2 - q_{12}/2$, $q_{13} = -r_{11}q_{12} - q_{12}^2/2 + r_{11}^2/2 - 2r_{12}$. Для связности Леви – Чевита видим, что пространство является Риччи-параллельным при $\varepsilon = 0$.

Пространство является локально-симметрическим при $\Lambda(R) = 0$, т.е. при $p_{12} = 0$, $q_{12} = -2p_{13}$, $q_{13} = -3p_{13}^2$, $r_{11} = 2p_{13}$, $r_{12} = 4p_{13}^2$, $r_{13} = p_{13}(\varepsilon + 11ap_{13}^2)/a$ либо при $p_{12} = 0$, $p_{13} = 0$, $q_{12} = 0$, $q_{13} = 0$, $r_{11} = 0$, либо при $p_{12} = 0$, $p_{13} = 0$, $q_{13} = 0$, $r_{11} = -5/4q_{12}$, $r_{12} = q_{12}^2$, $r_{13} = -\varepsilon q_{12}/a$, либо при $p_{12} = 1$, $p_{13} = 0$, $q_{13} = q_{12}^2 - 2r_{12}$, $r_{11} = -q_{12}$, $r_{13} = q_{12}(q_{12}^2 - 2r_{12})$, либо при $\varepsilon p_{12}^2 = ar_{12}(p_{12} + 1)$, $p_{13} = 0$, $q_{12} = 0$, $q_{13}p_{12} = -r_{12}(p_{12} + 1)$, $r_{11} = 0$, $r_{13} = 0$. Для метрической связности, т.е. случая $r_{12} = -\varepsilon/(2a)$, $p_{12} = 1/2$, $p_{13} = 0$, $q_{12} = 0$, $q_{13} = r_{12}$, $r_{11} = 0$, $r_{13} = 0$, пространство является локально-симметрическим при $\varepsilon = 0$.

Пространство является конформно-плоским при равенстве нулю тензора Коттона (скалярная кривизна $R = -6p_{12}(p_{12} - 1)/a$). В случае связности Леви – Чевита пространство является конформно-плоским при $\varepsilon = 0$ ($R = 3/(2a)$).

Рассмотрим теперь, например, случай 2.21.4. Аффинная связность имеет вид [13]

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Связность является связностью Леви – Чевита при $(2p_{12} - 1)a = 0$, т.е при $p_{12} = 1/2$, и имеет вид, представленный в табл. 4.

Тензор кривизны инвариантной аффинной связности:

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{12}^2 - p_{12} & 0 \\ 0 & 0 & p_{12}^2 - p_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -p_{12}^2 + p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{12}^2 - p_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{12}^2 + p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{12}^2 + p_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

При $p_{12} = 1/2$ тензор кривизны имеет вид, представленный в табл. 5, а алгебра голономии — вид, представленный в табл. 6. Тензор кручения — $(2p_{12} - 1, 0, 0)$, $(0, 2p_{12} - 1, 0)$, $(0, 0, 2p_{12} - 1)$, при $p_{12} = 1/2$ тензор кручения нулевой. Тензор Риччи

$$\mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_{12}^2 + 2 \cdot p_{12} \\ 0 & 2p_{12}^2 - 2p_{12} & 0 \\ -2p_{12}^2 + 2p_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. для связности Леви – Чевита тензор Риччи имеет вид, представленный в табл. 7.

Пространство является Риччи-плоским (тензор Риччи равен нулю) при $p_{12} = 0$ или $p_{12} = 1$, т.е. для метрической связности пространство не является Риччи-плоским. Пространство всегда является Эйнштейновым, так как $\mathrm{Ric} = \lambda B$ при $\lambda = -2(p_{12} - 1)p_{12}/a$. Для случая $p_{12} = 1/2$ получаем, что пространство является Эйнштейновым (при $\lambda = 1/(2a)$). Пространство является Риччи-параллельным при любых значениях параметра, в том числе и для $p_{12} = 1/2$ (т.е. для связности Леви – Чевита). Пространство всегда является локально-симметрическим (в том числе и для случая $p_{12} = 1/2$). Пространство является конформно-плоским при любых значениях параметра (скалярная кривизна $R = -6(p_{12} - 1)p_{12}/a$), в том числе и для связности Леви – Чевита ($R = 3/(2a)$).

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Прямыми вычислениями для всех псевдоримановых однородных пространств получаем, что связности Леви – Чевита имеют вид, приведенный в табл. 4, а их тензоры кривизны – вид, приведенный в табл. 5 (тензоры кручения во всех случаях нулевые).

Алгебры голономии указанных связностей приведены в табл. 6.

Тензоры Риччи найденных связностей приведены в табл. 7, а скалярные кривизны R – в табл. 3. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для трехмерных псевдоримановых однородных пространств, не допускающих риманову метрику (только псевдориманову), определено, при каких условиях пространство является Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально-симметрическим или конформно-плоским. Кроме этого, для всех указанных пространств выписаны в явном виде связности Леви – Чевита, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Библиографический список

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна : в 2 т. М. : Мир, 1990. Т. 1, 318 с. ; Т. 2, 384 с.
2. *Wang M.* Einstein metrics from symmetry and Bundle Constructions // Surveys in Differential Geometry. VI : Essays on Einstein Manifolds. Boston, MA : International Press, 1999. P. 287–325.
3. *Решетняк Ю. Г.* Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны // Сиб. матем. журн. 1960. Т. 1, № 1. С. 88–116 ; Т. 1, № 2. С. 248–276.
4. *Gray A.* Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. 1978. Vol. 7, iss. 3. P. 259–280. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00151525
5. *Алексеевский Д. В., Кимельфельд Б. Н.* Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 1. С. 103–110.
6. *Kowalski O., Nikcevic S.* On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds // Geom. Dedicata. 1996. Vol. 62. P. 65–72. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00240002
7. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Матем. тр. 2006. Т. 9, № 1. С. 130–168.
8. *Родионов Е. Д.* Односвязные компактные стандартные однородные Эйнштейновы многообразия с группой голономии SO(n) // Изв. АлтГУ. 1997. № 1 (3). С. 7–10.

9. *Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 37. Геометрия. С. 1–78.
10. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп Ли преобразований. М. : Физматлит, 1995. 384 с.
11. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry : in 2 vols. N. Y. : John Wiley and Sons. Vol. 1, 1963. 330 p. ; Vol. 2, 1969. 488 p.
12. *Можей Н. П.* Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах. I // Изв. вузов. Матем. 2013. № 12. С. 51–68.
13. *Можей Н. П.* Аффинные связности на трехмерных псевдоримановых однородных пространствах. II // Изв. вузов. Матем. 2014. № 6. С. 33–48.
14. *Можей Н. П.* Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. 394 с.
15. *Garcia A., Hehl F. W., Heinicke C., Macias A.* The Cotton tensor in Riemannian spacetimes // Classical and Quantum Gravity. 2004. Vol. 21, № 4. P. 1099–1118.

Образец для цитирования:
Можей Н. П. О геометрии трехмерных псевдоримановых однородных пространств. II // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 172–184. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-172-184

On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. II

N. P. Mozhey

Natalya P. Mozhey, https://orcid.org/0000-0001-9237-7208, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 6 P. Brovki St., Minsk 220013, Belarus, mozheynatalya@mail.ru

The problem of establishing links between the curvature and the topological structure of a manifold is one of the important problems of the geometry. In general, the purpose of the research of manifolds of various types is rather complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of pseudo-Riemannian manifolds, for example, in the class of homogeneous pseudo-Riemannian manifolds. This paper is a continuation of the part I. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a pseudo-Riemannian homogeneous space, an affine connection, curvature and torsion tensors, Levi – Cevita connection, Ricci tensor, Ricci-flat, Einstein, Ricci-parallel, locally symmetric, conformally flat space are defined. In this paper, for all three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces, it is determined under what conditions the space is Ricci-flat, Einstein, Ricci-parallel, locally symmetric or conformally flat. In addition, for all these spaces, Levi – Cevita connections, curvature and torsion tensors, holonomy algebras, scalar curvatures, Ricci tensors are written out in explicit form. The results can find applications in mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are reduced to the study of invariant objects on homogeneous spaces.

Keywords: transformation group, pseudo-Riemannian manifold, Ricci tensor, Einstein space, conformally flat space.

Received: 03.11.2018 / Accepted: 31.01.2019 / Published: 01.06.2020

The end. The previous part was published in: Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2020, vol. 20, iss. 1, pp. 29–41.

References

1. Besse A. *Mnogoobraziya Eynshteyna* [Einstein Manifolds: in 2 vols]. Moscow, Mir, 1990, vol. 1, 318 p.; vol. 2, 384 p. (in Russian).
2. Wang M. Einstein metrics from symmetry and Bundle Constructions. In: *Surveys in Differential Geometry. VI: Essays on Einstein Manifolds*. Boston, MA, International Press, 1999, pp. 287–325.
3. Reshetnyak Yu. G. Isothermal coordinates in manifolds of bounded curvature. *Sib. Matem. Zhurn.*, 1960, vol. 1, no. 1, pp. 88–116; vol. 1, no. 2, pp. 248–276 (in Russian).
4. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein. *Geom. Dedicata*, 1978, vol. 7, iss. 3, pp. 259–280. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00151525
5. Alekseevsky D. V., Kimelfeld B. N. Classification of homogeneous conformally flat Riemannian manifolds. *Math. Notes*, 1978, vol. 24, no. 1, pp. 559–562.
6. Kowalski O., Nikcevic S. On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds. *Geom. Dedicata*, 1996, vol. 62, pp. 65–72. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00240002
7. Rodionov E. D., Slavsky V. V., Chibrikova L. N. Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces. *Sib. Adv. Math.*, 2007, vol. 17, pp. 186–212. DOI: https://doi.org/10.3103/S1055134407030030
8. Rodionov E. D. Compact simply connected standard homogeneous Einstein manifolds with holonomy group $SO(n)$. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya of Altai State University], 1997, no. 1 (3), pp. 7–10 (in Russian).
9. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavsky V. V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds. *J. Math. Sci.*, 2007, vol. 146, pp. 6313–6390. DOI: https://doi.org.10.1007/s10958-007-0472-z
10. Onishchik A. L. *Topologiya tranzitivnykh grupp Li preobrazovaniy* [Topology of transitive transformation groups]. Moscow, Fizmatlit, 1995. 384 p. (in Russian).
11. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry*: in 2 vols. New York, John Wiley and Sons,1963, vol. 1, 330 p.; 1969, vol. 2, 448 p.
12. Mozhey N. P. Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. I. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, iss. 12, pp. 44–62. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X13120050
13. Mozhei N. P. Affine connections on three-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous spaces. II. *Russ. Math.*, 2014, vol. 58, iss. 6, pp. 28–43. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X14060048
14. Mozhey N. P. *Trekhmernye izotropno-tochnye odnorodnye prostranstva i sviaznosti na nikh* [Three-dimensional isotropy-faithful homogeneous spaces and connections on them]. Kazan, KFU Publishing House, 2015. 394 p. (in Russian).
15. Garcia A., Hehl F. W., Heinicke C., Macias A. The Cotton tensor in Riemannian spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 2004, vol. 21, no. 4, pp. 1099–1118.

Cite this article as:

Mozhey N. P. On the Geometry of Three-dimensional Pseudo-Riemannian Homogeneous Spaces. II. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 172–184 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-172-184