УДК 517.968.23

Об одном исключительном случае первой основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге

Н. Р. Перельман

Перельман Наталья Романовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аналитических и цифровых технологий, Смоленский государственный университет, Россия, 214000, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4, perelmannr@gmail.com

В данной статье рассматривается невырожденная (не редуцируемая к двухэлементной) трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций в исключительном случае, т. е. когда один из коэффициентов краевого условия обращается в нуль в конечном числе точек контура. В качестве контура берется единичная окружность. Для этого случая строится алгоритм решения задачи, заключающийся в сведении краевых условий данной задачи к системе из четырех уравнений типа Фредгольма второго рода. Для этого краевая задача для бианалитических функций представляется в виде двух краевых задач типа Карлемана в классе аналитических функций, затем с помощью введения вспомогательных функций эти задачи представляются в виде скалярных задач Римана в исключительном случае. Воспользовавшись известными формулами для решения таких задач, сводим каждое из краевых условий задач типа Карлемана для аналитических функций к паре хорошо изученных уравнений типа Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: краевая задача, сдвиг Карлемана, бианалитическая функция.

Поступила в редакцию: 25.03.2019 / Принята: 28.06.2019 / Опубликована: 01.06.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-185-192

ВВЕДЕНИЕ

Важным направлением в современной теории краевых задач комплексного анализа является изучение многоэлементных краевых задач для аналитических и полианалитических функций. При этом особое место занимают так называемые задачи со сдвигом, т. е. задачи, краевые условия которых представляют собой линейные соотношения между предельными значениями искомых функций, вычисленными в различных точках границы.

Одной из таких задач и является первая основная трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций. Впервые эта задача была поставлена в монографии К. М. Расулова [1, с. 287] и в дальнейшем исследовалась при различных предположениях относительно коэффициентов задачи (см. [2–4]). В частности, в совместной статье К. М. Расулова и автора [2] рассматривался невырожденный случай этой задачи, т. е. ситуация, когда данная задача не вырождается в двухэлементные краевые задачи без сдвига.

Однако в указанной работе рассматривался только так называемый нормальный подслучай невырожденного случая, когда коэффициенты задачи нигде не обращаются в нуль на контуре. Поэтому в настоящей работе будем рассматривать исключительный случай данной задачи, т. е. ситуацию, когда один из коэффициентов задачи может обращаться в нуль на контуре (в конечном числе точек).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть L — единичная окружность на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, T^+ — единичный круг, ограниченный L, а T^- — дополнение $T^+ \cup L$ до полной комплексной плоскости.

Будем говорить, что бианалитическая в области T^+ функция, т. е. решение уравнения $\partial^2 F(z)/\partial \overline{z}^2 = 0$ в T^+, принадлежит классу $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, если она непрерывно продолжима на контур L вместе со своими частными производными первого порядка, причем так, что граничные значения этой функции и указанных производных удовлетворяют условию Гёльдера.

Рассмотрим следующую краевую задачу.

Найти все функции $F(z) \in A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + G_{12}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}} + g_1(t); \tag{1}$$

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial y} = G_{21}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - G_{22}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial y}} + ig_2(t). \tag{2}$$

Здесь $G_{kj}(t), g_k(t) (k = 1, 2; j = 1, 2)$ — заданные на L функции класса $H^{(1)}(L)$, $G_{k1}(t) \neq 0$, $\alpha(t)$ — функция сдвига контура L, удовлетворяющая условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t,$$

причем $\alpha'(t) \in H(L)$ и $\alpha'(t) \neq 0$.

В краевом условии (2) множитель (-1) перед $G_{22}(t)$ и i перед $g_2(t)$ берутся для удобства в дальнейших обозначениях.

Также, без ограничения общности, целесообразно добавить к условиям рассматриваемой задачи следующее «начальное» условие:

$$F(0) = 0.$$

Следуя монографии [1], сформулированную задачу назовем *первой основной трехэлементной краевой задачей типа Карлемана для бианалитических функций* (кратко — $\mathrm{K}_{1,2}$).

2. УСТАНОВЛЕНИЕ УСЛОВИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ЗАДАЧИ $\mathrm{K}_{1,2}$

Как уже показано в статье [2], задача $\mathrm{K}_{1,2}$ легко редуцируется к двум следующим задачам:

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = t^{-1}\alpha(t)G_{k1}\Phi_k^+(t) + t\alpha(t)G_{k2}\overline{\Phi_k^+(t)} + \alpha(t)g_k(t), \quad k = 1, 2, \tag{3}$$

где $\Phi_k^+(z) = z\varphi_0'(z) + \varphi_1'(z) + (-1)^{k-1}z\varphi_1(z)$; $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$ — аналитические компоненты искомой бианалитической функции $F(z)$, т. е. $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)$ и $\varphi_0(z), \varphi_1(z) \in A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$.

Задача (3) (для каждого фиксированного k) является трехэлементной односторонней задачей типа Карлемана в классе $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ аналитических в круге T^+ функций, непрерывно продолжимых на контур L вместе со своими частными производными первого порядка (см., например, [2]).

В работе [2] также сформулированы условия

$$\begin{cases} a_{1,0} - a_{2,0} = 0, \\ a_{1,0} + a_{2,0} - a_{1,2} + a_{2,2} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

(где $a_{k,m} = \Phi_k^{+(m)}(0)/m!$, $k = 1, 2$, $m = 0, 2$) равносильности задачи $\mathrm{K}_{1,2}$ паре краевых задач типа (3), а также указан способ получения решений задачи $\mathrm{K}_{1,2}$ из решений задач (3).

Там же показано, что при выполнении следующих условий относительно коэффициентов задач (3)

$$G_{k1}(t)G_{k1}[\alpha(t)] + \overline{G_{k2}(t)}G_{k2}[\alpha(t)] \equiv 1, \tag{5}$$

$$G_{k1}[\alpha(t)]G_{k2}(t) + \overline{G_{k1}(t)}G_{k2}[\alpha(t)] \equiv 0, \tag{6}$$

$$G_{k1}[\alpha(t)]g_k(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \equiv 0 \tag{7}$$

указанные задачи не редуцируются к двухэлементным задачам без сдвига (см. также [5]).

Будем называть задачу $\mathrm{K}_{1,2}$, которая равносильна паре задач вида (3) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (5)–(7), *невырожденной*.

Следуя [2], будем решать задачу (3) (для каждого фиксированного значения k) при следующих предположениях:

1) $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L;

2) на контуре L выполняются условия (5)–(7).

Отметим, что предположение 1) сделано для определенности и случай прямого сдвига исследуется совершенно аналогично.

Если выполняются указанные предположения, то возникают следующие три важных подслучая (см., например, [6], [7, с. 114]):

а) $G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - 1 \equiv 0$;

б) $G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - 1 \neq 0$;

в) $G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - 1$ обращается в нуль в отдельных точках контура L.

В работе [2] подробно рассмотрены случаи а) и б). Здесь же остановимся на исследовании подслучая в).

3. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ (3) В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Пусть $\alpha(t)$ — функция обратного сдвига контура L, для коэффициентов задачи (3) выполняются условия невырожденности (5)–(7), а также

$$G_{k1}[\alpha(t_n)]G_{k1}(t_n) - 1 = 0, \quad t_n \in L, \quad k = 1, 2. \tag{8}$$

Заметим, что в силу условий (5) в тех точках $t_n \in L$, где выполняется (8), будет также верно равенство $G_{k2}(t_n) = 0$, т. е. t_n являются нулями функции $G_{k2}(t)$.

Заметим, что последнее условие может выполняться для функций $G_{2k}(t)$ различных видов. В данной работе остановимся на следующем конкретном, но достаточно общем виде функции $G_{k2}(t)$:

$$G_{k2}(t) = b_k(t)\prod(t - \beta_{j_k})^{\rho_{j_k}}, t, \beta_{j_k} \in L, k = 1, 2, \tag{9}$$

где $b_k(t) \in H(L)$, $b_k(t) \neq 0$ на L, $\beta_{j_k}(j_k = 1, 2, ..., \nu_k)$ — нули $G_{k2}(t)$, ρ_{j_k} — кратности этих нулей.

Назовем задачу (3), в которой коэффициент $G_{k2}(t)$ имеет вид (9), *трехэлементной односторонней задачей типа Карлемана в исключительном случае*. Построим конструктивный алгоритм решения этой задачи.

1. Рассмотрим более общую, чем (3), задачу для двух неизвестных аналитических функций класса $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ $\Phi_k^+(z)$ и $\widetilde{\Phi}_k^+(z)$:

$$\Phi_k^+(t) = B_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + A_k(t)\widetilde{\Phi}_k^+(t) + H_k(t), \tag{10}$$

где $B_k(t) = t^2 G_{k2}(t)/G_{k1}(t)$, $A_k(t) = t/(\alpha(t)G_{k1}(t))$, $H_k(t) = -tg_k(t)/G_{k1}(t)$.

2. Введем вспомогательную функцию

$$\Phi_k^-(z) = \overline{\Phi_k^+(\frac{1}{z})}, \quad z \in T^-, \quad k = 1, 2.$$

Она обладает тем свойством, что во всех точках единичной окружности будет выполняться следующее условие «симметрии» (см. [8, с. 97]):

$$\Phi_k^-(t) = \overline{\Phi_k^+(t)}, \quad t \in L, \quad k = 1, 2. \tag{11}$$

3. Представим краевое условие (10) для каждого фиксированного k $(k = 1, 2)$ в следующем виде:

$$\Phi_k^+(t) = \prod (t - \beta_{j_k})^{\rho_{j_k}} B_k^*(t)\Phi_k^-(t) + H_k^*(t), \tag{12}$$

где $B_k^*(t) = -t^2 b_k(t)/G_{k1}(t)$, $H_k^*(t) = A_k(t)\phi(t) + H_k(t)$, $\phi_k(t) = \overline{\Phi_k^+[\alpha(t)]}$.

Заметим, что считая $H_k^*(t)$ временно известной функцией, получаем из (12) краевое условие «исключительного случая» скалярной задачи Римана, подробно изученной Л. А. Чикиным (см. [9]).

4. Если $\chi_k^* = Ind B_k^*(t) \geqslant 0$, то общее решение (12) имеет вид (см., например, [7, 10])

$$\begin{cases} \Phi_k^+(z) = Y_k^+(z) + X_{1k}^+(z) \prod (t - \beta_{j_k})^{\rho_{j_k}} P_{\chi_k^*}(z), & z \in T^+, \\ \Phi_k^-(z) = Y_k^-(z) + X_{1k}^-(z) P_{\chi_k^*}(z), & z \in T^-, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$Y_k^+(z) = X_{1k}^+(z)[\Psi_k^+(z) - Q_{\rho_k - 1}(z)], \quad z \in T^+,$$
$$Y_k^-(z) = \frac{X_{1k}^-(z)[\Psi_k^-(z) - Q_{\rho_k - 1}(z)]}{\prod (t - \beta_{j_k})^{\rho_{j_k}}}, \quad z \in T^-,$$
$$\Psi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{H_k^*(\tau)}{X_{1k}^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z},$$

$Q_{\rho_k - 1}(z) = C_{\rho_k - 1} z^{\rho_k - 1} + ... + C_1 z + C_0$ — определенный многочлен, для которого выполняются равенства

$$Q_{\rho_k - 1}^{(m)}(\beta_{j_k}) = \Psi_k^{-(m)}(\beta_{j_k}),$$

$$m = 0, 1, ..., \rho_{j_k - 1}; j_k = 1, 2, ..., \nu_k; \rho_k = \sum_{j_k = 1}^{\nu_k} \rho_{j_k};$$

$X_{1k}^{\pm}(z)$ — канонические функции обычной задачи Римана с коэффициентом $B_k^*(t)$, $P_{\chi_k^*}(z)$ — многочлен степени χ_k^* с произвольными комплексными коэффициентами.

Если $\chi_k^* < 0$, то при условии выполнения $-\chi_k^* - 1$ условий разрешимости

$$C_{\rho_k-1} = C_{\rho_k-2} = ... = C_{\rho_k+\chi_k^*+1} = 0, \tag{14}$$

где C_n — комплексные числа, являющиеся коэффициентами разложения

$$\Psi_k^-(z) - Q_{\rho_k-1}(z) = -C_{\rho_k-1}z^{\rho_k-1} - C_{\rho_k-2}z^{\rho_k-2} - ... - C_0 + C_{-1}\frac{1}{z} + C_{-2}\frac{1}{z^2} + ...,$$

$$C_{-n} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{H_k^*(\tau)\tau^{n-1}}{X_{1k}^+(\tau)}d\tau,$$

задача (12) имеет единственное решение, которое задается формулой (13), где $P_{\chi_k^*}(z) \equiv 0$.

5. Перейдя с использованием формул Сохоцкого (см. [11, с. 238]) к предельным значениям функций $\Phi_k^+(z)$ и $\Phi_k^-(z)$ и потребовав от этих предельных значений, чтобы они удовлетворяли условию «симметрии» (11), получаем следующее интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода относительно функции $\phi_k(t) = \widetilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$:

$$(T_1\phi_k)(t) \equiv \phi_k(t) + \int\limits_L D_{1k}(t,\tau)\phi_k(\tau)d\tau + \overline{\int\limits_L R_{1k}(t,\tau)\phi_k(\tau)d\tau} = r_{1k}(t), \tag{15}$$

ядра и свободный член которого определенным образом выражаются через коэффициенты задачи (12).

Заметим, что уравнения такого типа подробно исследованы, например, в монографии Н. И. Мусхелишвили [12, с. 364] (см. также [13–15]).

6. Если уравнение (15) разрешимо и найдено его общее решение $\phi_k(t) = \widetilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$, то находим с использованием (13) пару функций $(\Phi_k^+(z), \widetilde{\Phi}_k^+(z))$, являющихся общим решением вспомогательной задачи (10).

7. Чтобы выбрать из полученных пар функций решение задачи (3), нужно потребовать выполнения условия $\Phi_k^+(z) \equiv \widetilde{\Phi}_k^+(z)$ всюду в T^+ или, как следствие, $\Phi_k^+(t) = \widetilde{\Phi}_k^+(t) = \phi_k[\alpha(t)], t \in L$, что с учетом вида граничных значений функций $\Phi_k^+(t)$ равносильно интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$(T_2\phi_k)(t) \equiv \phi_k(t) + \int\limits_L D_{2k}(t,\tau)\phi_k(\tau)d\tau = r_{2k}(t), t \in L,$$

где $D_{2k}(t,\tau), r_{2k}(t)$ определенным образом выражается через коэффициенты исходной задачи.

4. ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

Таким образом, все вышесказанное можно подытожить следующей теоремой.

Теорема. *Пусть в краевых условиях* (1)–(2) *задачи* $\mathrm{K}_{1,2}$ $\alpha(t)$ — *обратный сдвиг контура* L *(*L *— единичная окружность),* $G_{k1}(t) \neq 0$*, коэффициенты задачи удовлетворяют условиям невырожденности* (5)–(7) *и* $G_{k2}(t)$ *имеет вид* (9).

Тогда решение задачи $\mathrm{K}_{1,2}$ *в классе* $A_2(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ *при* $\chi_k^* \geqslant 0$ *равносильно решению четырех уравнений типа Фредгольма следующего вида:*

$$(T_m\phi_m)(t) \equiv \phi_m(t) + \int\limits_L D_m(t,\tau)\phi_m(\tau)d\tau + \overline{\int\limits_L R_m(t,\tau)\phi_m(\tau)d\tau} = r_m(t), \quad m = 1,2,3,4$$

(где ϕ_m — неизвестные функции, $D_m(t,\tau)$, $R_m(t,\tau)$, $r_m(t)$ — определенным образом выражаются через коэффициенты исходной задачи, причем $R_2(t,\tau) = R_4(t,\tau) \equiv 0$), для решений которых выполняются условия (4).

Если же $\chi_k^* < 0$, то добавляются условия разрешимости (14) *и все многочлены с произвольными комплексными коэффициентами $P_{\chi_m^*}(z)$, входящие в состав ядер и правых частей уравнений, полагаются тождественно равными нулю.*

Библиографический список

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : Изд-во СГПУ, 1998. 345 с.
2. *Перельман Н. Р., Расулов К. М.* Трехэлементная задача типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 18–26. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-18-26
3. *Расулов К. М., Титов О. А.* Об исследовании первой основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2005. Вып. 6. С. 148–154.
4. *Перельман Н. Р.* О решении первой трехэлементной задачи типа Карлемана для бианалитических функций в невырожденном случае // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : материалы междунар. конф. «Герценовские чтения–2011». LXIV. СПб. : БАН, 2011. С. 152–156.
5. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977. 448 с.
6. *Расулов К. М.* Метод интегральных «ловушек» для решения трехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2012. Вып. 2. С. 191–212.
7. *Расулов К. М.* Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск : Изд-во СмолГУ, 2013. 189 с.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
9. *Чикин Л. А.* Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Учен. зап. Казан. ун-та. 1953. Т. 113, № 10. С. 57–105.
10. *Перельман Н. Р., Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача для аналитических функций с обратным сдвигом Карлемана в исключительном случае // Вестн. БГУ. 2012. № 4 (2). С. 44–51.
11. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. М. : Наука, 1967–1968. Т. 1. Начала теории. 488 с.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 513 с.
13. *Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Изв. СмолГУ. 2008. № 2 С. 94–104.
14. *Расулов К. М.* О решении трехэлементной односторонней краевой задачи со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка. 2010. № 3 (102). С. 31–37.
15. *Расулов К. М.* О решении трехэлементной краевой задачи со сдвигом Карлемана для аналитических функций в невырожденном случае // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2012. № 34. С. 43–52.

Образец для цитирования:
Перельман Н. Р. Об одном исключительном случае первой основной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 185–192. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-185-192

On One Exceptional Case of the First Basic Three-Element Carleman-Type Boundary Value Problem for Bianalytic Functions in a Circle

N. R. Perelman

Natalia R. Perelman, https://orcid.org/0000-0002-3792-9134, Smolensk State University, 4 Przheval'skogo St., Smolensk 214000, Russia, perelmannr@gmail.com

This article considers a non-degenerate (nonreducible to two-element) three-element problem of Carleman type for bianalytic functions in an exceptional case, that is, when one of the coefficients of the boundary condition vanishes at a finite number of contour points. The unit circle is taken as the contour. For this case, an algorithm for solving the problem is constructed, which consists in reducing the boundary conditions of this problem to a system of four Fredholm type equations of the second kind. For this, the boundary value problem for bianalytic functions is represented as two boundary value problems of Carleman type in the class of analytic functions, then, by introducing auxiliary functions, these problems are represented as scalar Riemann problems in the exceptional case. Using the well-known formulas for solving such problems, we reduce each of the boundary conditions of Carleman-type problems for analytic functions to a pair of well-studied equations of the Fredholm type of the second kind.

Keywords: boundary value problem, Carleman shift, bianalytic function.

Received: 25.03.2019 / Accepted: 28.06.2019 / Published: 01.06.2020

References

1. Rasulov K. M. *Kraevye zadachi dlya polianaliticheskikh funktsiy i nekotorye ikh prilozheniya* [Boundary-value problems for polyanalytic functions and some of their applications]. Smolensk, Izd-vo Smolenskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 1998. 345 p. (in Russian).
2. Perelman N. R., Rasulov K. M. Three-element problem of Carleman type for bianalitic functions in a circle. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 18–26 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-2-18-26
3. Rasulov K. M., Titov O. A. On the study of the first basic three-element Carleman type boundary value problem for bianalytic functions in a circle. *Sistemy komp'yuternoy matematiki i ikh prilozheniya* [Computer mathematics systems and their applications: Proc. Int. Conf.]. Smolensk, Izd-vo Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2005, iss. 6, pp. 148–154 (in Russian).
4. Perelman N. R. On the solution of the first three-element Carleman type problem for bianalytic functions in the nondegenerate case. *Nekotorye aktual'nye problemy sovremennoy*

matematiki i matematicheskogo obrazovaniya: materialy mezhdunar. konf. “Gertsenovskie chteniya–2011”. LXIV [Some Pressing Problems of Modern Mathematics and Mathematical Education: Proc. Int. Conf. “Herzen Readings–2011”. LXIV]. St. Petersburg, BAN Publ., 2011, pp. 152–156 (in Russian).

5. Litvinchuk G. S. *Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with shift*. Dordrecht, Boston, Kluwer Academic Publ., 2000. 378 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-011-4363-9 (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1977. 448 p.).
6. Rasulov K. M. The integral trap method for solving a three-element boundary value problem with Carleman shift in classes of analytic functions. *Sistemy komp’yuternoy matematiki i ikh prilozheniya* [Computer mathematics systems and their applications: Proc. Int. Conf.]. Smolensk, Izd-vo Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2012, iss. 2, pp. 191–212 (in Russian).
7. Rasulov K. M. *Metod sopriazheniya analiticheskikh funktsiy i nekotorye ego prilozheniya* [Conjugation method of analytic functions and some of its applications]. Smolensk, Izd-vo Smolenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2013. 189 p. (in Russian).
8. Gakhov F. D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (in Russian).
9. Chikin L. A. Special cases of the Riemann boundary value problem and singular integral equations. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta* [Scientific Notes of Kazan University], 1953, vol. 113, no. 10, pp. 57–105 (in Russian).
10. Perelman N. R., Rasulov K. M. Three-Element One-Sided Boundary Value Problem for Analytic Functions with a Reverse Shift of Carleman in Exceptional Case. *Izv. Brjanskogo Gos. Univ.* [The Bryansk State University Herald], 2012, no. 4 (2), pp. 44–51 (in Russian).
11. Markushevich A. I. *Teoriya analiticheskikh funktsiy* [The theory of analytic functions: in 2 vols.]. Moscow, Nauka, 1967–1968. Vol. 1. 488 p. (in Russian).
12. Mushelishvili N. I. *Singulyarnye integral’nye uravneniya* [Singular integral equations]. Moscow, Nauka, 1968. 513 p. (in Russian).
13. Rasulov K. M. Three-element one-sided boundary value problem with Carleman shift in classes of analytic functions in a circle. *Izvestiya SmolGU*, 2008, no. 2, pp. 94–104 (in Russian).
14. Rasulov K. M. On the solution of a three-element one-sided boundary value problem with a Carleman shift in classes of analytic functions in a circle. *Vesnik Hrodzienskaha dziaranaha univiersiteta imia Janki Kupaly. Ser. 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka*, 2010, no. 3 (102), pp. 31–37 (in Russian).
15. Rasulov K. M. On the solution of a three-element boundary value problem with a Carleman shift for analytical functions in the nondegenerate case. *Vestnik Yuzhno-Ural’skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2012, no. 34, pp. 43–52 (in Russian).

Cite this article as:

Perelman N. R. On One Exceptional Case of the First Basic Three-Element Carleman-Type Boundary Value Problem for Bianalytic Functions in a Circle. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 185–192 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-185-192