



# МЕХАНИКА

УДК 539.3

## Нестационарная электромагнитоупругость пьезоэлектриков с учетом диффузии

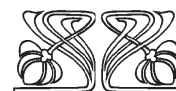
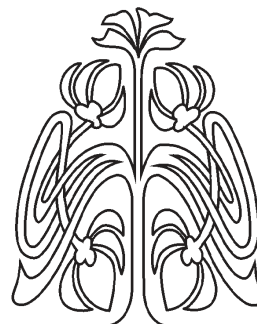
**Н. А. Зверев, А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский**

Зверев Николай Андреевич, магистрант кафедры сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, nikolayzverev1995@gmail.com

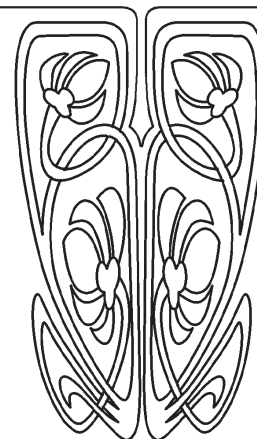
Земсков Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладных программных средств и математических методов, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4; старший научный сотрудник лаборатории динамических испытаний, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 119192, г. Москва, Мичуринский просп., д. 1, azemskov1975@mail.ru

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией динамических испытаний, НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова, Россия, 119192, г. Москва, Мичуринский просп., д. 1; заведующий кафедрой сопротивления материалов, динамики и прочности машин, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, tdvhome@mail.ru

В работе рассматривается модель линейной теории деформирования упругих сред с учетом диффузии и пьезоэффекта, описывающая связь между механическими деформациями, массопереносом и внутренним электрическим полем. Используется одномерная модель электромагнитомехано-диффузии в прямоугольной декартовой системе координат. На современном уровне излагаются методы решения соответствующих начально-краевых задач, основанные на применении интегрального преобразования Лапласа и разложении в тригонометрические ряды Фурье. На основе решения модельных задач показано влияние эффекта связанности полей на процессы динамического деформирования, массопереноса и распространения электромагнитных волн. Результаты вычислений представлены в аналитической форме и в виде графиков.



**НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ**





**Ключевые слова:** электромагнитоупругость, пьезоэлектромагнетизм, механодиффузия, нестационарные задачи.

Поступила в редакцию: 25.04.2019 / Принята: 26.06.2019 / Опубликовано: 01.06.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-193-204>

## ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени в научной литературе накопилось достаточно много работ, посвященных моделированию взаимодействия нестационарных полей различной физической природы. Постоянно возрастающий интерес к исследованиям в этой области связан с необходимостью получения качественных и количественных оценок взаимодействия механических, диффузионных, электромагнитных и прочих процессов как для практического применения, так и во избежание негативных эффектов, проявляющихся в результате воздействия указанных возмущений на конструкции и их отдельные элементы.

Среди современных публикаций, посвященных этой проблеме, можно отметить [1–19]. В частности, в работах [1–11] дополнительно учитывается влияние температурного поля, а в работах [12–19] учитываются электромагнитные эффекты. Анализ нестационарных процессов в начальный момент времени, помимо всего прочего, требует учета релаксации тепловых и диффузионных возмущений [1, 2, 4–6, 8, 9, 11–13].

Следует отметить, что связанность физических полей, анизотропия и нестационарность рассматриваемых процессов вносят существенные трудности в моделирование процессов, проходящих в твердых телах. В работе рассматривается нестационарная задача электромагнитоупругой диффузии в пьезоэлектрических телах. Для преодоления сложностей, связанных с решением соответствующей начально-краевой задачи, предполагается, что обратный пьезоэффект отсутствует, что, в свою очередь, позволяет рассматривать задачу упругой диффузии отдельно от задачи электродинамики. В этом случае возможно представление искомых величин (перемещений, приращений концентрации диффузанта, напряженностей электрического и магнитного полей) в виде рядов по системе собственных функций упругодиффузионного оператора. Аналогичный подход был использован при моделировании электромагнитоупругих процессов при наличии обратного пьезоэффекта [20].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается одномерная нестационарная задача об определении напряженно-деформированного состояния и распространении электромагнитных волн в  $N$ -компонентном пьезоэлектрическом слое, находящемся под воздействием поверхностных электромагнитоупругодиффузионных возмущений. Физико-механические процессы в прямоугольной декартовой системе координат описываются системой, состоящей из линейных уравнений движения и массопереноса, а также из линеаризованных уравнений Максвелла [12–15, 20] (штрих означает производную по координате,



точка — производную по времени):

$$\ddot{u} = u'' - \sum_{q=1}^N \alpha_q \dot{\eta}'_q, \quad \dot{\eta}'_q = D_q \eta''_q - \Lambda_q u''' \quad (q = \overline{1, N}), \quad (1)$$

$$E' = -\mu_h \dot{H} - \Gamma \dot{u}' - \sum_{q=1}^N X_q \dot{\eta}'_q, \quad -H' = \varepsilon_e \dot{E} + K \dot{u}' + \sum_{q=1}^N B_q \dot{\eta}'_q.$$

Здесь все величины являются безразмерными и для них приняты следующие обозначения:

$$x = \frac{x_1}{L}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad E = \frac{E_2}{E^*}, \quad H = \frac{4\pi c H_3}{E^*}, \quad C_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}^*}{C_{1111}^*}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}^*}{\rho},$$

$$\alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad D_q = \frac{D_{11}^{(q)}}{CL}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(q)} \alpha_{11}^{(q)}}{\rho R T_0 C L}, \quad \varepsilon_e = \frac{C \varepsilon_{22}^{(e)}}{4\pi c^2}, \quad \mu_h = 4\pi C \mu_{33}^{(h)},$$

$$\Gamma = \frac{C \gamma_{112}}{c E^*}, \quad K = \frac{4\pi C \kappa_{113}}{E^*}, \quad B_q = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(q)} E^* \beta_2^{(q)}}{4\pi \rho R T_0 C L}, \quad X_q = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(q)} \chi_3^{(q)} E^*}{(4\pi)^2 \rho c R T_0 C L},$$

где  $t$  — время;  $x_i$  — прямоугольные декартовы координаты;  $\rho$  — плотность среды;  $u_i$  — компоненты вектора перемещений;  $T_0$  — начальная температура среды;  $n_0^{(q)}$ ,  $\eta^{(q)}$  и  $m^{(q)}$  — начальная концентрация, приращение концентрации и молярная масса  $q$ -го компонента вещества;  $c$  — скорость света;  $C_{ijkl}^*$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $\varepsilon_{ij}^{(e)}$  и  $\mu_{ij}^{(h)}$  — компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей;  $\kappa_{ijk}$  и  $\gamma_{ijk}$  — компоненты тензоров пьезоэлектрических и пьезомагнитных постоянных;  $\alpha_{ij}^{(q)}$  — коэффициенты объемного расширения вследствие диффузии;  $D_{ij}^{(q)}$  — коэффициенты самодиффузии;  $E_i$  и  $H_i$  — компоненты векторов электрической и магнитной напряженностей;  $L$  — толщина слоя;  $E^*$  — масштабное значение электрической напряженности. Коэффициенты  $\beta_i^{(q)}$  и  $\chi_i^{(q)}$  характеризуют связь электромагнитного и диффузионного полей.

Начально-краевые условия имеют следующий вид:

$$E|_{x=0} = 0, \quad E|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad (\Lambda_q u'' - D \eta'_q)|_{x=1} = 0,$$

$$u|_{x=0} = f_1(\tau), \quad (\Lambda_q u'' - D \eta'_q)|_{x=0} = f_{q+1}(\tau), \quad (2)$$

$$E|_{\tau=0} = 0, \quad H|_{\tau=0} = 0, \quad u|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \quad \eta|_{\tau=0} = 0,$$

где  $f_k$  ( $k = \overline{1, N+1}$ ) — поверхностные возмущения.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача решается в два этапа. Вначале рассматриваем задачу механодиффузии. Ее решение в пространстве преобразования Лапласа имеет вид [21] (индекс  $L$  означает трансформанту Лапласа,  $s$  — параметр преобразования Лапласа,  $\lambda_n = \pi n$ ):

$$u^L(x, s) = \sum_{k=1}^{N+1} G_{1k}^L(x, s) f_k^L(s), \quad \eta_q^L(x, s) = \sum_{k=1}^{N+1} G_{q+1,k}^L(x, s) f_k^L(s). \quad (3)$$

Здесь  $G_{mk}^L(x, s)$  — трансформанты Лапласа поверхностных функций Грина задачи упругой диффузии, которые определяются следующим образом [21]:

$$G_{1k}^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad G_{q+1,k}^L(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{q+1,k}^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad (4)$$



$$G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, s) = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}, \quad G_{q+1,k}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} - \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{k1}}{s + D_q \lambda_n^2} + \frac{2\delta_{q+1,k}}{s + D_q \lambda_n^2},$$

$$P(\lambda_n, s) = (s^2 + \lambda_n^2) \prod_{j=1}^N (s + D_j \lambda_n^2) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \prod_{r=1, r \neq j}^N (s + D_r \lambda_n^2),$$

$$Q_q(\lambda_n, s) = (s + D_q \lambda_n^2) P(\lambda_n, s),$$

$$P_{11}(\lambda_n, s) = 2\lambda_n \left[ \prod_{j=1}^N (s + D_j \lambda_n^2) - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \lambda_n^2 \prod_{r=1, r \neq j}^N (s + D_r \lambda_n^2) \right],$$

$$P_{1,q+1}(\lambda_n, s) = 2\lambda_n \alpha_q \prod_{r=1, r \neq q}^N (s + D_r \lambda_n^2), \quad P_{q+1,k}(\lambda_n, s) = \Lambda_q \lambda_n^3 P_{1k}(\lambda_n, s).$$

Решение задачи электродинамики ищем в форме ( $0 < \xi < 1$ )

$$\begin{Bmatrix} E(x, \tau) \\ H(x, \tau) \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^2 \int_0^\tau \int_0^1 \begin{Bmatrix} G_l^E(x, \xi, \tau - t) \\ G_l^H(x, \xi, \tau - t) \end{Bmatrix} F_l(\xi, t) dt d\xi,$$

что соответствует следующему представлению в пространстве преобразования Лапласа:

$$\begin{Bmatrix} E^L(x, s) \\ H^L(x, s) \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^2 \int_0^1 \begin{Bmatrix} G_l^{EL}(x, \xi, s) \\ G_l^{HL}(x, \xi, s) \end{Bmatrix} F_l^L(\xi, s) d\xi. \quad (5)$$

Здесь  $G_l^{EL}$  и  $G_l^{HL}$  — трансформанты объемных функций Грина задачи электродинамики. Сами функции Грина  $G_l^E$  и  $G_l^H$  являются решением следующих задач ( $\delta_{ml}$  — символ Кронекера,  $\delta(x - \xi, \tau)$  — функция Дирака):

$$G_l^{E'} = -\mu_h \dot{G}_l^H - \delta_{1l} \delta(x - \xi, \tau), \quad -G_l^{H'} = \varepsilon_e \dot{G}_l^E + \delta_{2l} \delta(x - \xi, \tau), \quad (6)$$

$$G_l^E|_{x=0} = 0, \quad G_l^E|_{x=1} = 0. \quad (7)$$

Функции  $F_l(x, \tau)$  в соответствии с (1) определяются следующим образом:

$$F_1(x, \tau) = \Gamma \dot{u}' + \sum_{q=1}^N X_q \dot{\eta}_q, \quad F_2(x, \tau) = K \dot{u}' + \sum_{q=1}^N B_q \dot{\eta}_q.$$

В пространстве преобразования Лапласа они имеют вид

$$F_1^L(x, s) = s \left( \Gamma u^{L'} + \sum_{q=1}^N X_q \eta_q^L \right), \quad F_2^L(x, s) = s \left( K u^{L'} + \sum_{q=1}^N B_q \eta_q^L \right). \quad (8)$$

Теперь для нахождения объемных функций Грина  $G_l^E$  и  $G_l^H$  применяем интегральное преобразование Лапласа по времени к задаче (6), (7) и разложение искомых функций в тригонометрические ряды Фурье по синусам и по косинусам:

$$\mu_h s G_1^{HLc}(0, s) = -1, \quad (9)$$

$$\lambda_n G_l^{ELs}(\lambda_n, s) + \mu_h s G_l^{HLc}(\lambda_n, s) = -2\delta_{1l} \cos \lambda_n \xi, \quad (10)$$

$$-\varepsilon_e s G_l^{ELs}(\lambda_n, s) + \lambda_n G_l^{HLc}(\lambda_n, s) = 2\delta_{2l} \sin \lambda_n \xi; \quad (11)$$



$$\begin{Bmatrix} G_l^{EL}(x, \xi, s) \\ G_l^{HL}(x, \xi, s) \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} G_l^{ELs}(\lambda_n, \xi, s) \sin \lambda_n x \\ G_l^{HLc}(\lambda_n, \xi, s) \cos \lambda_n x \end{Bmatrix}; \quad (12)$$

$$\begin{Bmatrix} G_l^{ELs}(\lambda_n, \xi, s) \\ G_l^{HLc}(\lambda_n, \xi, s) \end{Bmatrix} = 2 \int_0^1 \begin{Bmatrix} G_l^{EL}(x, \xi, s) \sin \lambda_n x \\ G_l^{HL}(x, \xi, s) \cos \lambda_n x \end{Bmatrix} dx, \quad (13)$$

$$G_l^{HLc}(0, \xi, s) = \int_0^{1v} G_l^{HL}(x, \xi, s) dx. \quad (14)$$

Решение системы (9)–(11) находим по формулам Крамера

$$\begin{aligned} G_1^{ELs}(\lambda_n, \xi, s) &= -2W_1^L(\lambda_n, s) \cos \lambda_n \xi, & G_2^{ELs}(\lambda_n, \xi, s) &= -2\mu_h W_2^L(\lambda_n, s) \sin \lambda_n \xi, \\ G_1^{HLc}(\lambda_n, \xi, s) &= -2\varepsilon_e W_2^L(\lambda_n, s) \cos \lambda_n \xi, & G_2^{HLc}(\lambda_n, \xi, s) &= 2W_1^L(\lambda_n, s) \sin \lambda_n \xi, \\ G_1^{HLc}(0, \xi, s) &= -\varepsilon_e W_2^L(0, s), & a^2 &= \varepsilon_e \mu_h, \\ W_1^L(\lambda_n, s) &= \frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + a^2 s^2}, & W_2^L(\lambda_n, s) &= \frac{s}{\lambda_n^2 + a^2 s^2}, & W_2^L(0, s) &= \frac{c}{a^2 s}. \end{aligned}$$

Переходя в пространство оригиналов, в соответствии с (12)–(14) получаем функции Грина задачи (6) и (7) [22]:

$$\begin{aligned} G_l^E(x, \xi, \tau) &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} [\delta_{1l} W_1(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n \xi + \mu_h \delta_{2l} W_2(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n \xi] \sin \lambda_n x, \\ G_l^H(\lambda_n, \xi, \tau) &= -\delta_{1l} \varepsilon_e \left[ W_2(0, \tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} W_2(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n \xi \cos \lambda_n x \right] + \\ &+ 2\delta_{2l} \sum_{n=1}^{\infty} W_1(\lambda_n, s) \sin \lambda_n \xi \cos \lambda_n x, \end{aligned}$$

где

$$W_1(\lambda_n, \tau) = \frac{1}{a} \sin \frac{\lambda_n \tau}{a}, \quad W_2(\lambda_n, s) = \frac{1}{a^2} \cos \frac{\lambda_n \tau}{a}, \quad W_2(0, \tau) = \frac{1}{a^2} H(\tau).$$

Далее, для упрощения вычислений в граничных условиях (2) полагаем  $f_{q+1}(\tau) \equiv 0$ .

По формулам (8) с учетом (3) находим трансформанты объемных возмущений задачи электродинамики, которые представляем следующим образом [23]:

$$\begin{aligned} F_k^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} s f_1^L(s) F_k^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x = \sum_{n=1}^{\infty} s f_1^L(s) F_k^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \\ F_1^{Lc}(\lambda_n, s) &= \Gamma \lambda_n G_{11}^{Ls}(\lambda_n, s) + \sum_{q=1}^N X_q G_{q+1,1}^{Lc}(\lambda_n, s), \\ F_2^{Lc}(\lambda_n, s) &= K \lambda_n G_{11}^{Ls}(\lambda_n, s) + \sum_{q=1}^N B_q G_{q+1,1}^{Lc}(\lambda_n, s), \end{aligned} \quad (15)$$

$$F_k^{Ls}(\lambda_n, s) = -2\lambda_n \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \Delta_{kn} F_k^{Lc}(\lambda_n, s), \quad \Delta_{kn} = \frac{1 - (-1)^{k-n}}{\lambda_k^2 - \lambda_n^2}.$$



Теперь, подставляя полученные равенства в (5), получаем напряженности электрического и магнитного полей в пространстве преобразования Лапласа:

$$E^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} E^{Ls}(\lambda_n, s) \sin \lambda_n x, \quad H^L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} H^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad (16)$$

$$\begin{Bmatrix} E^{Ls}(\lambda_n, s) \\ H^{Lc}(\lambda_n, s) \end{Bmatrix} = -\frac{s f_1^L(s)}{\lambda_n^2 + a^2 s^2} \begin{Bmatrix} \lambda_n F_1^{Lc}(\lambda_n, s) + \mu_h s F_2^{Ls}(\lambda_n, s) \\ \varepsilon_e s F_1^{Lc}(\lambda_n, s) - \lambda_n F_2^{Ls}(\lambda_n, s) \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

### 3. РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР

Для расчета рассматриваем пьезокерамический материал со следующими характеристиками [24]:

$$\begin{aligned} \kappa_{112} &= -1.8381 \cdot 10^8 \text{ Гс}, & \gamma_{112} &= 2 \cdot 10^{-11} \text{ Гс}, & \varepsilon_{22}^{(e)} &= 1.59, & \mu_{33}^{(h)} &= 1.244 \cdot 10^{-8}, \\ \alpha_{11}^{(1)} &= 5 \cdot 10^{13} \frac{\text{Эрг}}{\text{моль}}, & D_{11}^{(1)} &= 7.74 \cdot 10^{-10} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, & T_0 &= 800 \text{ К}, & L &= 0.1 \text{ см}, \\ R &= 8.31 \cdot 10^7 \frac{\text{Эрг}}{\text{моль} \cdot \text{К}}, & \rho &= 3.96 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, & \nu &= 0.25, & m^{(q)} &= 26.98 \frac{\text{г}}{\text{моль}}, \\ C_{1111} &= 4.44 \cdot 10^{12} \frac{\text{ДИН}}{\text{см}^2}, & \beta_2^{(1)} &= 3 \cdot 10^{-6} \text{ Гс}, & \chi_2^{(1)} &= 1 \cdot 10^{-23} \text{ Гс}, & n_0^{(q)} &= 0.95. \end{aligned}$$

Полагаем в граничных условиях (2)  $f_1(\tau) = \tau e^{-\alpha\tau}$ ,  $f_{q+1}(\tau) = 0$ . Тогда коэффициенты рядов в формулах (3), (16) и (17) с учетом (4) примут вид

$$\begin{aligned} u^{Ls}(\lambda_n, s) &= \frac{G_{11}^{Ls}(\lambda_n, s)}{(s + \alpha)^2}, & \eta_q^{Lc}(\lambda_n, s) &= \frac{G_{q+1,1}^L(\lambda_n, s)}{(s + \alpha)^2}, \\ \begin{Bmatrix} E^{Ls}(\lambda_n, s) \\ H^{Lc}(\lambda_n, s) \end{Bmatrix} &= -\frac{s}{(s + \alpha)^2 (\lambda_n^2 + a^2 s^2)} \begin{Bmatrix} \lambda_n F_1^{Lc}(\lambda_n, s) + \mu_h s F_2^{Ls}(\lambda_n, s) \\ \varepsilon_e s F_1^{Lc}(\lambda_n, s) - \lambda_n F_2^{Ls}(\lambda_n, s) \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оригиналы этих выражений определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u^s(\lambda_n, \tau) &= \sum_{j=1}^{N+2} A_{11}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau} + B_{11}(\lambda_n, \tau), \\ \eta_q^c(\lambda_n, \tau) &= \sum_{j=1}^{N+3} A_{q+1,1}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau} + \tilde{A}_{q+1,1}(\lambda_n) e^{-D_q \lambda_n^2 \tau} + B_{q+1,1}(\lambda_n, \tau). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $s_j(\lambda_n)$  ( $j = \overline{1, N+2}$ ) — нули многочлена  $P(\lambda_n, s)$ ,  $s_{N+3}(\lambda_n) = -D_q \lambda_n^2$ ,  $s_{N+4}(\lambda_n) = -\alpha$ , коэффициенты  $A_{km}^{(j)}(\lambda_n)$ ,  $\tilde{A}_{q+1,1}(\lambda_n)$  и  $B_{km}(\lambda_n, \tau)$  находятся по формулам (штрих означает производную по параметру  $s$ )

$$\begin{aligned} A_{11}^{(j)}(\lambda_n) &= \frac{P_{11}(\lambda_n, s)}{[(s + \alpha)^2 P(\lambda_n, s)]'} \Big|_{s=s_j(\lambda_n)} \quad (j = \overline{1, N+2}), \\ A_{q+1,1}^{(r)}(\lambda_n) &= \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{[(s + \alpha)^2 Q_q(\lambda_n, s)]'} \Big|_{s=s_r(\lambda_n)} \quad (r = \overline{1, N+3}), \\ \tilde{A}_{q+1,1}(\lambda_n) &= -\frac{2\Lambda_q \lambda_n^2}{[(s + \alpha)^2 (s + D_q \lambda_n^2)]'} \Big|_{s=-D_q \lambda_n^2}, \quad \tilde{B}_{11}(\lambda_n) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ \frac{P_{11}(\lambda_n, s) e^{s\tau}}{P(\lambda_n, s)} \right]', \end{aligned}$$





$$\tilde{B}_{q+1,1}^{(p)}(\lambda_n) = \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[ \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)e^{s\tau}}{Q_q(\lambda_n, s)} - \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2 e^{s\tau}}{(s + \alpha)^2 (s + D_q \lambda_n^2)} \right]'$$

Далее, для напряженностей электрического и магнитного полей с учетом (18) получаем

$$\begin{aligned} E^s(\lambda_n, \tau) &= - \sum_{j=1}^{N+6} \operatorname{Res}_{s=s_j(\lambda_n)} \left\{ \frac{se^{s\tau}}{(s + \alpha)^2 (s + D_q \lambda_n^2)} [\lambda_n F_1^{Lc}(\lambda_n, s) + \mu_n s F_2^{Ls}(\lambda_n, s)] \right\}, \\ H^c(\lambda_n, \tau) &= - \sum_{j=1}^{N+6} \operatorname{Res}_{s=s_j(\lambda_n)} \left\{ \frac{se^{s\tau}}{(s + \alpha)^2 (s + D_q \lambda_n^2)} [\varepsilon_e s F_1^{Lc}(\lambda_n, s) - \lambda_n F_2^{Ls}(\lambda_n, s)] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $s_{N+5}(\lambda_n) = i\lambda_n/a$ ,  $s_{N+6}(\lambda_n) = -i\lambda_n a$ , величины  $F_1^{Lc}(\lambda_n, s)$  и  $F_2^{Ls}(\lambda_n, s)$  определяются по формулам (15) с учетом равенств (4).

Окончательное решение задачи записывается в виде

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} u^s(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x, & \eta_q(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \eta_q^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \\ E(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} E^s(\lambda_n, \tau) \sin \lambda_n x, & H(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} H^c(\lambda_n, \tau) \cos \lambda_n x, \end{aligned}$$

где коэффициенты рядов определяются по формулам (19), (20).

Результаты вычислений представлены на рис. 1–3. Выполненный расчет наглядно демонстрирует эффект связанности механического, диффузионного и электромагнитного полей. Так, несмотря на то что на поверхности слоя задано только поле перемещений, а объемные возмущения отсутствуют, за счет взаимодействия полей индуцируются массоперенос и электромагнетизм (рис. 1, б, рис. 2, а). При этом механические и диффузионные поля оказывают также и взаимное влияние друг на друга (рис. 1, а, б).

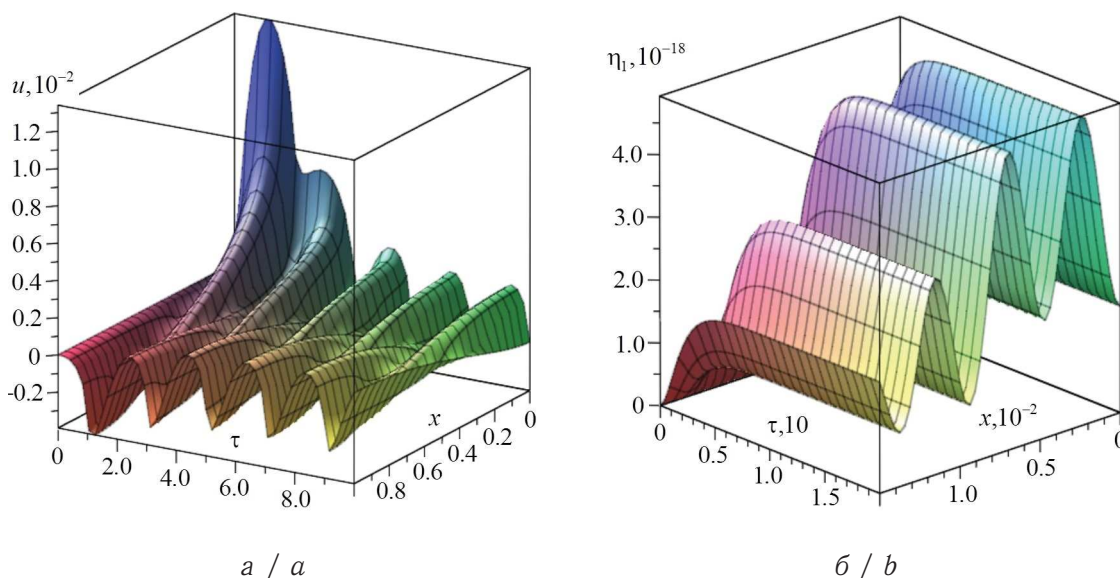


Рис. 1. Зависимости от времени  $\tau$  и от координаты  $x$ : а — перемещения  $u$ ; б — приращения концентрации  $\eta$  (цвет online)

Fig. 1. Dependencies on the time  $\tau$  and on the coordinate  $x$  of а — displacement  $u$ ; б — concentration increment  $\eta$  (color online)

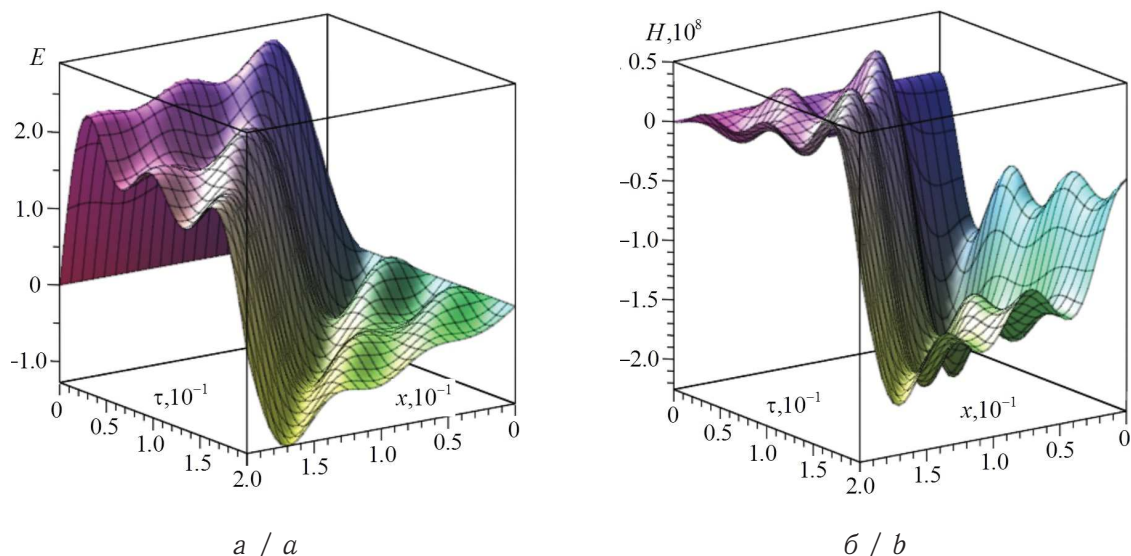


Рис. 2. Зависимости от времени  $\tau$  и от координаты  $x$ :  $a$  — напряженности электрического поля  $E$ ;  $b$  — напряженности магнитного поля  $H$  (цвет online)  
Fig. 2. Dependencies on the time  $\tau$  and on the coordinate  $x$  of  $a$  — electric field strength  $E$ ;  $b$  — magnetic field strength  $H$  (color online)

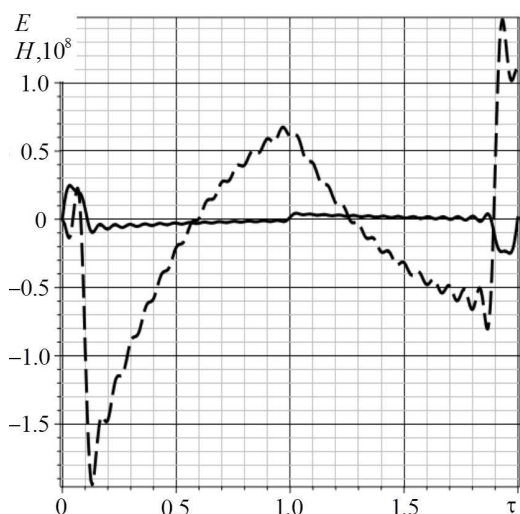


Рис. 3. Зависимости напряженности электрического поля  $E$  (сплошная линия) и напряженности магнитного поля  $H$  (пунктирная линия) от времени  $\tau$  при  $x = 0.1$   
Fig. 3. Dependencies of the electric field strength  $E$  (solid line) and the magnetic field strength  $H$  (dashed line) on the time  $\tau$  at  $x = 0.1$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью предложенного алгоритма решена одномерная нестационарная задача электромагнитоупругости с учетом диффузии для многокомпонентного пьезоэлектрического слоя. Основным достоинством данного подхода является возможность аналитически найти оригиналы по Лапласу функций Грина и провести их анализ. Эффективность метода продемонстрирована на конкретном расчетном примере для однородного однокомпонентного слоя, выполненного из пьезокерамического материала.





## Библиографический список

1. Afram A. Y., Khader S. E. 2D Problem for a Half-Space under the Theory of Fractional Thermoelastic Diffusion // American Journal of Scientific and Industrial Research. 2014. Vol. 6, № 3. P. 47–57. DOI: <https://doi.org/10.5251/ajsir.2015.6.3.47.57>
2. Atwa S. Y., Egypt Z. Generalized Thermoelastic Diffusion with Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium // Journal of Materials and Chemical Engineering. 2013. Vol. 1, № 2. P. 55–74.
3. Belova I. V., Murch G. E. Thermal and diffusion-induced stresses in crystalline solids // Journal of Applied Physics. 1995. Vol. 77, № 1. P. 127–134.
4. Choudhary S., Deswal S. Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion // Meccanica. 2010. Vol. 45. P. 401–413. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-009-9260-9>
5. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // Acta Mech. 2011. Vol. 218. P. 205–215. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0415-5>
6. El-Sayed A. M. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space // Mathematics and Mechanics of Solids. 2016. Vol. 21, № 9. P. 1045–1060. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286514549877>
7. Knyazeva A. G. Model of medium with diffusion and internal surfaces and some applied problems // Mater. Phys. Mech. 2004. Vol. 7, № 1. P. 29–36.
8. Kumar R., Chawla V. Green's Functions in Orthotropic Thermoelastic Diffusion Media // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2012. Vol. 36, № 8. P. 1272–1277. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.02.017>
9. Olesiak Z. S., Pyryev Yu. A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // International Journal of Engineering Science. 1995. Vol. 33, iss. 6. P. 773–780.
10. Pidstryhach Ya. S. Differential equations of the problem of thermodiffusion in a solid deformable isotropic body // Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR. 1961. № 2. P. 169–172.
11. Sherief H. H., El-Maghraby N. M. A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion // Int. J. Thermophys. 2009. Vol. 30. P. 2044–2057. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10765-009-0689-9>
12. Aouadi M. Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2006. Vol. 57, № 2. P. 350–366. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-005-0034-5>
13. Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // International Journal of Thermal Sciences. 2011. Vol. 50, № 5. P. 749–759. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.11.016>
14. Tarlakovskii D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V. Dynamic Processes in Thermo-Electro-Magneto-Elastic and Thermo-Elasto-Diffusive Media // Hetnarski R. B. (eds.). Encyclopedia of Thermal Stresses. Vol. 6. Dordrecht ; Heidelberg ; N. Y. ; London : Springer, 2014. P. 1064–1071. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7\\_609](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_609)
15. Zhang J., Li Y. A Two-Dimensional Generalized Electromagnetothermoelastic Diffusion Problem for a Rotating Half-Space // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Vol. 2014. P. 1–12. Article ID 964218. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/964218>
16. Chu J. L., Lee S. Diffusion-induced stresses in a long bar of square cross section // J. Appl. Phys. 1993. Vol. 73, iss. 7. P. 3211–3219.



17. *Freidin A. B., Korolev I. K., Aleshchenko S. P., Vilchevskaya E. N* Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and FE-simulations // *Int. J. Fract.* 2016. Vol. 202, № 2. P. 245–259. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-016-0155-1>
18. *Hwang C. C., Chen K. M., Hsieh J. Y.* Diffusion-induced stresses in a long bar under an electric field // *J. Phys. D : Appl. Phys.* 1994. Vol. 27, № 10. P. 2155–2162. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/27/10/025>
19. *Indeitsev D. A., Semenov B. N., Sterlin M. D.* The Phenomenon of Localization of Diffusion Process in a Dynamically Deformed Solid // *Doklady Physics.* 2012. Vol. 57, № 4. P. 171–173. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335812040052>
20. *Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.* Постановка одномерной задачи термоэлектромагнитоупругой диффузии // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред : материалы XXIV Междунар. симпозиума им. А. Г. Горшкова. Т. 2. М. : ТРП, 2018. С. 157–163*
21. *Давыдов С. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.* Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомеханодиффузии // *Проблемы прочности и пластичности.* 2017. Т. 79, № 1. P. 38–47. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-1-38-47>
22. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М. : Высш. шк., 1965. 466 с.
23. *Zverev N. A, Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V.* One-dimensional problem of piezoelectric electromagnetic diffusion for a layer // *Journal of Physics : Conference Series.* 2018. Vol. 1129. 012040. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1129/1/012040>
24. *Бардзокас Д. И., Зобнин А. И., Сеник Н. А., Фильштинский М. Л.* Математическое моделирование в задачах механики связанных полей : в 2 т. Т. 1. Введение в теорию пьезоэлектричества. М. : КомКнига, 2005. 312 с.

---

**Образец для цитирования:**

*Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.* Нестационарная электромагнитоупругость пьезоэлектриков с учетом диффузии // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2020. Т. 20, вып. 2. С. 193–204. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-193-204>

---

## **Unsteady Electromagnetic Elasticity of Piezoelectrics Considering Diffusion**

**N. A. Zverev, A. V. Zemskov, D. V. Tarlakovskii**

Nikolay A. Zverev, <https://orcid.org/0000-0002-0813-2863>, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, [nikolayzverev1995@gmail.com](mailto:nikolayzverev1995@gmail.com)

Andrei V. Zemskov, <https://orcid.org/0000-0002-2653-6378>, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia; Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, 1 Michurinsky Prospekt, Moscow 119192, Russia, [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)

Dmitry V. Tarlakovskii, <https://orcid.org/0000-0002-5694-9253>, Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, 1 Michurinsky Prospekt, Moscow 119192, Russia; Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Shosse, Moscow 125993, Russia, [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)



The paper considers a model of the linear theory of deformation of elastic continuum with diffusion and piezoelectric effect taken into account, which describes the relationship between mechanical deformations, mass transfer, and the internal electric field. A one-dimensional model of electromagnetic diffusion in a rectangular Cartesian coordinate system is used. At the present level, the methods of solving the corresponding initial-boundary value problems based on the application of the integral Laplace transform and decomposition into trigonometric Fourier series are described. Based on the solution of model problems, the effect of the fields coupling on the processes of dynamic deformation are shown. The results of the calculations are presented in analytical form and in the form of graphs.

**Keywords:** electromagnetic elasticity, piezoelectromagnetism, elastic diffusion, unsteady problems.

Received: 25.04.2019 / Accepted: 26.06.2019 / Published: 01.06.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

## References

1. Afram A. Y., Khader S. E. 2D Problem for a Half-Space under the Theory of Fractional Thermoelastic Diffusion. *American Journal of Scientific and Industrial Research*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 47–57. DOI: <https://doi.org/10.5251/ajsir.2015.6.3.47.57>
2. Atwa S. Y., Egypt Z. Generalized Thermoelastic Diffusion with Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium. *Journal of Materials and Chemical Engineering*, 2013, vol. 1, no. 2, pp. 55–74.
3. Belova I. V., Murch G. E. Thermal and diffusion-induced stresses in crystalline solids. *Journal of Applied Physics*, 1995, vol. 77, no. 1, pp. 127–134.
4. Choudhary S., Deswal S. Mechanical loads on a generalized thermoelastic medium with diffusion. *Meccanica*, 2010, vol. 45, pp. 401–413. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-009-9260-9>
5. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times. *Acta Mech.*, 2011, vol. 218, pp. 205–215. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0415-5>
6. El-Sayed A. M. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2016, vol. 21, no. 9, pp. 1045–1060. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286514549877>
7. Knyazeva A. G. Model of medium with diffusion and internal surfaces and some applied problems. *Mater. Phys. Mech.*, 2004, vol. 7, no. 1, pp. 29–36.
8. Kumar R., Chawla V. Green's Functions in Orthotropic Thermoelastic Diffusion Media. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, vol. 36, no. 8, pp. 1272–1277, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.02.017>
9. Olesiak Z. S., Pyryev Yu. A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder. *International Journal of Engineering Science*, 1995, vol. 33, iss. 6, pp. 773–780.
10. Pidstryhach Ya. S. Differential equations of the problem of thermodiffusion in a solid deformable isotropic body. *Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR*, 1961, no. 2, pp. 169–172 (in Ukrainian).
11. Sherief H. H., El-Maghraby N. M. A Thick Plate Problem in the Theory of Generalized Thermoelastic Diffusion. *Int. J. Thermophys.*, 2009, vol. 30, pp. 2044–2057. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10765-009-0689-9>
12. Aouadi M. Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2005, vol. 57, no. 2, pp. 350–366. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00033-005-0034-5>



13. Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion. *International Journal of Thermal Sciences*, 2011, vol. 50, no. 5, pp. 749–759. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.11.016>
14. Tarlakovskii D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V. Dynamic Processes in Thermo-Electro-Magneto-Elastic and Thermo-Elasto-Diffusive Media. In: *Hetnarski R. B. (eds.). Encyclopedia of Thermal Stresses*. Vol. 6. Dordrecht, Heidelberg, New York, London, Springer, 2014, pp. 1064–1071. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7\\_609](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_609)
15. Zhang J., Li Y. A Two-Dimensional Generalized Electromagnetothermoelastic Diffusion Problem for a Rotating Half-Space. *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, 2014, vol. 2014, pp. 1–12, Article ID 964218. DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/964218>
16. Chu J. L., Lee S. Diffusion-induced stresses in a long bar of square cross section. *J. Appl. Phys.*, 1993, vol. 73, iss. 7, pp. 3211–3219.
17. Freidin A. B., Korolev I. K., Aleshchenko S. P., Vilchevskaya E. N. Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and FE-simulations. *Int. J. Fract.*, 2016, vol. 202, no. 2, pp. 245–259. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-016-0155-1>
18. Hwang C. C., Chen K. M., Hsieh J. Y. Diffusion-induced stresses in a long bar under an electric field. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1994, vol. 27, no. 10, pp. 2155–2162. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/27/10/025>
19. Indeitsev D. A., Semenov B. N., Sterlin M. D. The Phenomenon of Localization of Diffusion Process in a Dynamically Deformed Solid. *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 171–173. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335812040052>
20. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Statement of the one-dimensional problem of thermo-electromagnetoelastic diffusion. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktivnoy i sploshnykh sred: materialy XXIV Mezhdunar. simpoziuma im. A. G. Gorshkova* [Dynamic and Technological Problems of a Mechanics of Constructions and Continuous Mediums. Proc. XXIV Int. Symposium Dedicated to A. G. Gorshkov]. Vol. 2. Moscow, TRP, 2018, pp. 157–163 (in Russian).
21. Davydov S. A., Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V. Surface Green's function in non-stationary problems of thermomechanical diffusion. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Journal Problems of Strength and Plasticity], 2017, vol. 79, no. 1. pp. 38–47 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-1-38-47>
22. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Handbook of operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 1965. 466 p. (in Russian).
23. Zverev N. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. One-dimensional problem of piezoelectric electromagnetic diffusion for a layer. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, no. 1129, 012040. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1129/1/012040>
24. Bardzokas D. I., Zobnin A. I., Senik N. A., Fil'shtinskii M. L. *Matematicheskoe modelirovaniye v zadachakh mekhaniki svyazannykh polei: v 2 t. T. 1. Vvedeniye v teoriyu p'ezoelektrichestva* [Mathematical modeling in problems of mechanics of related fields: in 2 vols. Vol. 1. Introduction to the theory of piezoelectricity]. Moscow, KomKniga, 2005. 312 p. (in Russian).

---

**Cite this article as:**

Zverev N. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Unsteady Electromagnetic Elasticity of Piezoelectrics Considering Diffusion. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 193–204 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-193-204>

---