УДК 519.248

Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением

В. М. Кочеганов

Кочеганов Виктор Михайлович, аспирант кафедры программной инженерии, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия, 603950, г. Н. Новгород, просп. Гагарина, д. 23, kocheganov@gmail.com

На данный момент существует ограниченное число работ, посвященных тандемам перекрестков. В литературе, как правило, изучаются следующие виды алгоритмов управления: циклический алгоритм с фиксированной длительностью, циклический алгоритм с петлей, циклический алгоритм со сменой режимов и т. д. При построении математических моделей сетей массового обслуживания и тандемов в частности, как правило, применяется описательный подход. При таком подходе задание входных потоков и алгоритмов обслуживания производится на содержательном уровне, законы распределения длительностей обслуживания требований считаются известными и задаются с помощью интегральной функции распределения времени обслуживания произвольного требования. При этом не удается решить проблему изучения выходящих потоков из узлов, а также рассмотреть сети с немгновенным перемещением требований между узлами и с зависимыми, разнораспределенными длительностями обслуживания требований. В настоящей работе применяется новый подход к построению вероятностных моделей тандемов конфликтных систем массового обслуживания с различными алгоритмами управления в узлах. В рамках этого подхода удается решить проблему выбора описаний ω элементарных исходов случайного эксперимента и математически корректно определить случайный процесс, описывающий эволюцию рассматриваемой системы, а также решить перечисленные выше частные задачи. На основе конструктивно заданного вероятностного пространства удается строго обосновать достижимость одних состояний из других, тем самым полностью описав единственный класс существенных состояний марковской цепи, описывающей динамику тандема.

Ключевые слова: стационарное распределение, управляющая система массового обслуживания, циклический алгоритм с продлением, конфликтные потоки, многомерная счетная марковская цепь, существенные состояния.

Поступила в редакцию: 07.11.2019 / Принята: 30.12.2019 / Опубликована: 01.06.2020

DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-257-265

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В работах [1–8] представлены различные модели тандемов управляющих систем обслуживания в постановке задач автомобильного трафика. Исходной задачей для исследования в настоящей работе яляется анализ тандема двух последовательных перекрестков, автомобили между которыми перемещаются немгновенно и обслуживание на одном из перекрестков допускает продление. Формулируя задачу в терминах управляющих систем обслуживания, будем предполагать, что в первой системе тандема обслуживаются конфликтные потоки по циклическому алгоритму, а во второй — по алгоритму с продлением. Данная тандемная сеть подробно описана в работах [9, 10]. Развиваемый там подход позволил представить тандем систем как единую систему массового обслуживания. Напомним существенные моменты из описания системы. На вход обслуживающему устройству поступают четыре входных потока требований: Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Требования входного потока Π_j поступают в очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Требования из очереди O_j обслуживаются в порядке поступления. Требования входных потоков Π_1 и Π_3 формируются внешней средой, имеющей всего одно состояние. Каждый из этих потоков является неординарным пуассоновским потоком. Обозначим λ_1 и λ_3 интенсивности потоков групп требований потоков Π_1 и Π_3 соответственно. Производящая функция количества требований в группе по потоку Π_j имеет вид $f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu$, $j \in \{1, 3\}$. Предполагается, что $f_j(z)$ сходится для любого $z \in \mathbb{C}$ такого, что $|z| < (1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. После обслуживания требования из очереди O_1 поступают обратно в систему как требования потока Π_4. Требования потока Π_4, в свою очередь, после обслуживания поступают в систему в качестве требований потока Π_2. Потоки Π_2 и Π_3 конфликтные в том смысле, что их требования не могут быть обслужены одновременно.

Зафиксируем положительные целые числа d, n_0, n_1, $\ldots$, n_d. Тогда множество состояний обслуживающего устройства будет выглядить следующим образом: $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} \colon k = 0, 1, \ldots, d;\ r = 1, 2, \ldots n_k\}$. В состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ сервер находится в течение неслучайного времени $T^{(k,r)}$. Алгоритм смены состояний учитывает как предыдущее состояние прибора, так и длину очереди O_3 в момент принятия решения и формально описан в работе [9].

Для задания процесса обслуживания используются потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, $\Pi_4^{\text{нас}}$. Число требований в потоке насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ за время $T^{(k,r)}$ неслучайно и равно $\ell(k, r, j)$, если обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$.

Представленная система массового обслуживания может рассматриваться как кибернетическая управляющая система. Схема управляющей системы представлена на рисунке.

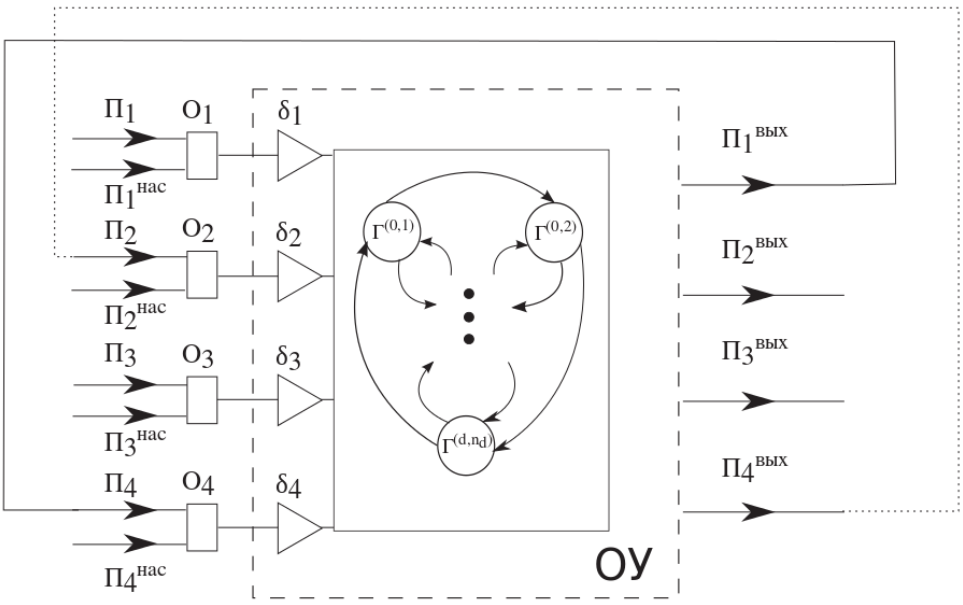

Схема СМО как управляющей кибернетической системы
The queuing system as a cybernetic system scheme

На схеме присутствуют следующие блоки: внешняя среда с одним состоянием, входные полюса (входные потоки Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 и потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, $\Pi_4^{\text{нас}}$), внешняя память (очереди O_1, O_2, O_3, O_4), устройство по переработке внешней памяти (устройства поддержания дисциплин очередей δ_1, δ_2, δ_3, δ_4), внутренняя память (обслуживающее устройство, ОУ), устройство по переработке внутренней памяти (граф переходов из одного состояния ОУ в другое), выходные полюса (выходные потоки $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$, $\Pi_3^{\text{вых}}$, $\Pi_4^{\text{вых}}$).

В работе [2] были выделены информация, координаты и функция данной системы. Это позволило конструктивно задать последовательности случайных величин и случайных элементов, описывающих дискретную временную шкалу наблюдения и состояния всех блоков схемы. В частности, в качестве дискретной временной шкалы выбрана последовательность $\tau_0 = 0$, τ_1, τ_2, $\ldots$ моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим $\Gamma_i \in \Gamma$, $i = 1, 2, \ldots$, состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ и $\Gamma_0 \in \Gamma$ — его состояние в момент времени τ_0, и пусть $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$ — количество требований в очереди O_j в момент времени τ_i, , $i \geqslant 0$. Было доказано, что стохастическая последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i = 0, 1, \ldots\}$ является однородной цепью Маркова.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$

Теперь поставим вопрос о существенных состояниях марковской цепи

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i = 0, 1, \ldots\},$$

которая описывает динамику исследуемой в работе кибернетической системы. Мы последовательно рассмотрим состояния разного вида и определим сообщающиеся подклассы. На первом этапе выясним, что состояния вида

$$(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \quad \tilde{x} = (0, 0, L+1, 0)$$

являются существенными (леммы 1, 2, 3). Лемма 1, в частности, говорит о том, что из состояний продления с произвольным количеством требований в очередях O_1, O_2 и O_4 можно перейти с ненулевой вероятностью также в состояние продления, но с пустыми очередями O_1, O_2 и O_4.

Лемма 1. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, \tilde{x}_3, 0)), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \tilde{x}_3 \geqslant x_{3,0}$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}, x^0 \in \mathbb{Z}_+^4, x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}), x_{3,0} \leqslant L.$$

Доказательство. Доказательство состоит из нескольких этапов. Сначала, основываясь на заложенных в построенное вероятностное пространство свойствах, доказывается, что вероятность каждого шага в цепочке

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0) \to (\Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 1)}, x^1) \to (\Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 2)}, x^2) \to \ldots \to (\Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 N_2)}, x^{N_2})$$

для любого $N_2 > 0$ положительна. Вектора x^j, $j > 1$, определим ниже.

Пусть система стартовала в состоянии $(\Gamma_0, \varkappa_0) = (\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$. Из построения следует, что

$$\Gamma_1 = h(\Gamma_0, \varkappa_{3,0}) = h(\Gamma^{(0,r_0)}, x_{3,0}) = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 1)},$$

где отображение $h(\cdot,\cdot)$ определено в работе [10].

Положим

$$x^1 = (x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}) = (\max\{0, x_{1,0} - \ell(0, r_0 \oplus_0 1, 1)\};$$
$$\max\{0, x_{2,0} + x_{4,0} - \ell(0, r_0 \oplus_0 1, 2)\}; x_{3,0}; \min\{x_{1,0}, \ell(0, r_0 \oplus_0 1, 1)\}).$$

В общем случае

$$\Pr(\{\omega\colon \Gamma_{j+1} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 j+1)}, \varkappa_{j+1} = x^{j+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_j = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 j)}, \varkappa_j = x^j\}) > 0$$

для

$$x^{j+1} = (\max\{0, x_{1,j} - \ell(0, r_0 \oplus_0 j+1, 1)\};$$
$$\max\{0, x_{2,j} + x_{4,j} - \ell(0, r_0 \oplus_0 j+1, 2)\}; x_{3,0}; \min\{x_{1,j}, \ell(0, r_0 \oplus_0 j+1, 1)\}),$$

где $j = 1, 2, \ldots, N_2$. Число N_2 будет определено ниже.

Для некоторого $N_1 > 0$ количества требований x_{1,N_1}, x_{2,N_1} и x_{4,N_1} в соответствующих очередях O_1, O_2 и O_4 рано или поздно станут равными нулю, т.е.

$$\Pr(\{\omega\colon \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_1)}, \varkappa_{N_1} = x^{N_1}\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_1-1} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0(N_1-1))}, \varkappa_{N_1-1} = x^{N_1-1}\}) > 0,$$

для $x^{N_1} = (0; 0; x_{3,0}; 0)$. Поскольку все состояния продления образуют цикл (а только такие графы переходов рассматриваются в работе), то существует такое число $N_2 > N_1$, что $r_0 \oplus_0 N_2 = \tilde{r} \ominus_0 1$ и

$$\Pr(\{\omega\colon \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_2-1} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0(N_2-1))}, \varkappa_{N_2-1} = x^{N_2-1}\}) > 0,$$

где $x^{N_2} = (0, 0, x_{3,0}, 0)$. Для завершения доказательства теперь необходимо рассмотреть переход

$$(\Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_2)}, x^{N_2}) \to (\Gamma^{(0,\tilde{r})}, x^{N_2+1}),$$

т. е. оценить вероятность

$$\Pr(\{\omega\colon \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\}),$$

где

$$(\Gamma_{N_2+1}, \varkappa_{N_2+1}) = (\Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_2))}, x^{N_2+1}) = (\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, \tilde{x}_3, 0))$$

есть конечное состояние.

Положим $N = N_2 + 1$ и соберем все воедино:

$$\Pr(\{\omega\colon \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = x^N\}|\{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) =$$
$$= \Pr(\{\omega\colon \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\}|\{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geqslant$$
$$\geqslant \Pr(C|\{\omega\colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}),$$

где

$$C = \left\{\omega\colon \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\right\} \cap \left\{\omega\colon \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\right\} \cap \ldots$$

$$\ldots \cap \left\{\omega \colon \Gamma_2 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus_0 2)}, \varkappa_2 = x^2\right\} \cap \left\{\omega \colon \Gamma_1 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\right\}.$$

Наконец, из теоремы умножения и марковского свойства заключаем, что

$$\Pr\Big(\Big\{\omega \colon \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = x^N\Big\} \Big| \Big\{\omega \colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\Big\}\Big) \geqslant$$
$$\geqslant \Pr\Big(\Big\{\omega \colon \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\Big\} \Big| \Big\{\omega \colon \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\Big\}\Big)\times$$
$$\times \Pr\Big(\Big\{\omega \colon \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\Big\} \Big| \Big\{\omega \colon \Gamma_{N_2-1} = \Gamma^{(0,\tilde{r}\ominus_0 2)}, \varkappa_{N_2-1} = x^{N_2-1}\Big\}\Big)\times$$
$$\times \ldots \times \Pr\Big(\Big\{\omega \colon \Gamma_2 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 2)}, \varkappa_2 = x^2\Big\} \Big| \Big\{\omega \colon \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\Big\}\Big)\times$$
$$\times \Pr\Big(\Big\{\omega \colon \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0\oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\Big\} \Big| \Big\{\omega \colon \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\Big\}\Big) > 0,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, каждый переход в цепочке переходов

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0) \to (\Gamma^{(0,r_0\oplus_0 1)}, x^1) \to (\Gamma^{(0,r_0\oplus_0 2)}, x^2) \to \ldots \to (\Gamma^{(0,r_0\oplus_0 N_2)}, x^{N_2}) \to (\Gamma^{(0,\tilde{r})}, x^{N_2+1})$$

от начального до конечного состояния имеет ненулевую вероятность. □

Дальнейшие результаты приведем без доказательства.

В лемме 2 показано, как из произвольного состояния цикла $k_0 > 0$ перейти в состояние продления с заданным количеством требований 0, 0, $L+1$, 0 в очередях O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно.

Лемма 2. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \quad \tilde{x} = (0, 0, L+1, 0)$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x^0), \quad k_0 > 0, \quad r_0 = \overline{1, n_{k_0}}, \quad x^0 \in \mathbb{Z}_+^4.$$

Лемма 3 заключает о том, что состояния вида $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, L+1, 0))$ являются существенными. Наличие некоторого множества существенных состояний позволит в дальнейшем найти все оставшиеся существенные состояния.

Лемма 3. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \quad \tilde{x} = (0, 0, L+1, 0)$$

достижимы из любых состояний системы, т. е. из состояний вида

$$(\Gamma^{(k_0,r_0)}, x^0), \quad k_0 = \overline{0, d}, \quad r_0 = \overline{1, n_{k_0}}, \quad x^0 \in \mathbb{Z}_+^4.$$

Таким образом, состояния $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$ являются существенными.

В леммах 4, 5, 6 определяются состояния, сообщающиеся с существенными состояниями $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$, $x_0 = (0, 0, L+1, 0)$, $r_0 = \overline{1, n_0}$. Таким способом определится все множество существенных состояний. В частности, лемма 4 касается состояний циклов.

Лемма 4. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})},\tilde{x}),\quad \tilde{x}=(0,0,\tilde{x}_3,0),\quad \tilde{x}_3\geqslant\max\Big\{0,L+1-\sum_{s=1}^{\tilde{r}}\ell(\tilde{k},s,3)\Big\},$$
$$\tilde{r}=\overline{1,n_{\tilde{k}}},\quad \tilde{k}>0,\quad \Gamma^{(\tilde{k},1)}=h_3(r_0)$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0,r_0)},x^0),\quad x_0=(0,0,L+1,0),\quad r_0=\overline{1,n_0}.$$

Лемма 5. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0,\tilde{r})},\tilde{x}),\quad \tilde{x}=(0,0,\tilde{x}_3,0),\quad \tilde{x}_3\geqslant\max\Big\{0,L+1-\sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}}\ell(\tilde{k},s,3)\Big\},$$

где $\tilde{k}=\overline{1,d}$, $\tilde{r}=\overline{1,n_0}$, *достижимы из состояний вида*

$$(\Gamma^{(0,r_0)},x^0),\quad x_0=(0,0,L+1,0),\quad r_0=\overline{1,n_0}.$$

Лемма 6. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0,\tilde{r})},\tilde{x}),$$

где

$$\tilde{x}=(0,0,\tilde{x}_3,0),\quad \tilde{x}_3\geqslant\max\Big\{0,L+1-\max_{k=\overline{1,d}}\Big\{\sum_{s=1}^{n_k}\ell(k,s,3)\Big\}\Big\},\quad \tilde{r}=\overline{1,n_0},$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0,r_0)},x^0),\quad x^0=(0,0,L+1,0),\quad r_0=\overline{1,n_0}.$$

Лемма 7. *Если состояния вида*

$$(\Gamma^{(0,\tilde{r})},(0,0,\min\{L,\tilde{x}_3\},0)),\quad \tilde{r}=\overline{1;n_0},\quad \tilde{x}_3\geqslant 0$$

достижимы из начальных состояний вида

$$(\Gamma^{(0,r_0)},x^0),\quad x^0=(0,0,L+1,0),\quad r_0=\overline{1;n_0},$$

то тогда из начальных состояний достижимы и состояния вида

$$(\Gamma^{(0,\tilde{r})},\tilde{x}),\quad \tilde{x}\in\{y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in Z_+^4\colon y_3=\tilde{x}_3;\quad (y_1>0)\to(y_4\geqslant\ell(0,\tilde{r},1))\}.$$

Лемма 8. *Состояния вида* $(\Gamma^{(0,\tilde{r})},\tilde{x})$, *где* $\tilde{x}$ *таково, что* $\tilde{x}_1\geqslant 0$, $\tilde{x}_2\geqslant 0$, *а также*

$$\tilde{x}_3\geqslant\max\Big\{0,L+1-\max_{k=\overline{1,d}}\Big\{\sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}}\ell(\tilde{k},s,3)\Big\}\Big\},$$

и

$$\tilde{x}_4\geqslant 0 \text{ и } (x_1>0)\Rightarrow(x_4\geqslant\ell(0,\tilde{r},1))$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0,r_0)},x^0),\quad x^0=(0,0,L+1,0),\quad \Gamma^{(0,r_0)}\in\Gamma.$$

Лемма 9. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0), \quad x_0 = (0, 0, L+1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}$$

достижимы из состояний вида $(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \tilde{x})$*, где* $\tilde{k} = \overline{1, d}$*,* $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$ *и* $\tilde{x}$ *таково, что*

$$\tilde{x}_3 \geqslant \max\Big\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\Big\},$$

и

$$(\tilde{x}_1 > 0) \Rightarrow (\tilde{x}_4 \geqslant \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)).$$

Теорема 1. *Состояния вида* $(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \tilde{x})$*, где* $\tilde{k} = \overline{0, d}$*,* $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$*,* $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$*,*

$$(\tilde{x}_1 > 0) \Rightarrow (\tilde{x}_4 \geqslant \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)), \tag{1}$$

$$\tilde{x}_3 \geqslant \max\Big\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(k, s, 3)\Big\}, \quad \textit{если} \quad \tilde{k} > 0, \tag{2}$$

$$\tilde{x}_3 \geqslant \max\Big\{0, L+1 - \max_{k=\overline{1,d}} \{\sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}\Big\}, \quad \textit{если} \quad \tilde{k} = 0, \tag{3}$$

и только они достижимы из состояний

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0), \quad x^0 = (0, 0, L+1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}$$

и, следовательно, являются существенными.

В заключение введем множества

$$S_{0,r}^3 = \Big\{(\Gamma^{(0,r)}, x_3)\colon\ x_3 \in Z_+,\ x_3 > L - \max_{k=1,2,\ldots,d}\Big\{\sum_{t=1}^{n_k} \ell(k, t, 3)\Big\}\Big\}, \quad 1 \leqslant r \leqslant n_0,$$

$$S_{k,r}^3 = \Big\{(\Gamma^{(k,r)}, x_3)\colon\ x_3 \in Z_+,\ x_3 > L - \sum_{t=1}^{r} \ell(k, t, 3)\Big\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant d, \quad 1 \leqslant r \leqslant n_k.$$

Из доказанных лемм 3–9 также следует другая теорема.

Теорема 2. *Множество существенных состояний марковской цепи* $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i});$ $i = 0, 1, \ldots\}$ *имеет вид* $\Big(\bigcup\limits_{1\leqslant r\leqslant n_0} S_{0,r}^3\Big) \cup \Big(\bigcup\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant d\\ 1\leqslant r\leqslant n_k}} S_{k,r}^3\Big)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенная классификация позволяет сузить множество состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ до множества существенных состояний. В дальнейшем исследовании, связанном с поиском необходимых и достаточных условий существования стационарного распределения, несущественные состояния могут быть отброшены, поскольку марковская цепь в них никогда не вернется.

Библиографический список

1. *Haight F. A.* Mathematical Theories of Traffic Flow. N. Y : Academic, 1963. 241 p.
2. *Inose H., Hamada T.* Road Traffic Control. Tokyo : Univ. of Tokyo Press, 1975. 331 p.
3. *Drew D. R.* Traffic Stream Theory and Control. N. Y : McGraw-Hill, 1968. 467 p.
4. *Fedotkin M. A.* On a class of stable algorithms for control of conflicting flows or arriving airplanes // Problems of Control and Information Theory. 1977. Vol. 6, № 1. P. 17–27.
5. *Fedotkin M. A.* Construction of a model and investigation of nonlinear algorithms for control of intense conflict flows in a system with variable structure of servicing demands. I // Lithuanian mathematical journal. 1977. Vol. 7, № 1. P. 129–137. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00968503
6. *Литвак Н. В., Федоткин М. А.* Вероятностная модель адаптивного управления конфликтными потоками // Автомат. и телемех. 2000. № 5. С. 67–76.
7. *Пройдакова Е. В., Федоткин М. А.* Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // Автомат. и телемех. 2008. № 6. С. 96–106.
8. *Yamada K., Lam T. N.* Simulation analysis of two adjacent traffic signals // Proceedings of the 17th Winter Simulation Conference. N. Y. : ACM, 1985. P. 454–464.
9. *Кочеганов В. М., Зорин А. В.* Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания // Вестн. ВГАВТ. 2017. Вып. 50. С. 47–55.
10. *Кочеганов В. М., Зорин А. В.* Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания // Вестн. ТвГУ. Сер. Прикладная математика. 2018. № 2. С. 49–74. DOI: https://doi.org/https://doi.org/10.26456/vtpmk193

Образец для цитирования:
Кочеганов В. М. Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 257–265. DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-257-265

Markov Chain States Classification in a Tandem Model with a Cyclic Service Algorithm with Prolongation

V. M. Kocheganov

Victor M. Kocheganov, https://orcid.org/0000-0001-5575-2224, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue), Nizhnij Novgorod 603950, Russia, kocheganov@gmail.com

There is a limited list of papers about crossroads tandems. Usually the following service algorithms are under consideration: a cyclic algorithm with fixed duration, a cyclic algorithm with a loop a cyclic algorithm with regime changes etc. To construct a formal mathematical model of queuing systems nets and crossroads tandems in particular a descriptive approach is usually used. Using this approach input flows and service algorithms are set at the level of content, service duration distribution is known and set via a particular customer service distribution function. However with this approach one can not find nodes output flows distribution, as well as investigate customers' noninstanteneous transfering between systems and with dependent, different service time distributions. In this paper a new approach is utilized to construct probability models of tandems for conflict queuing systems with different service algorithms in subsystems. Within this approach one can solve a problem of choosing the description for ω elementary outcomes of the stochastic experiment and mathematically correctly define the stochastic process, which describes the entire system, as well as solve the above mentioned problems. Based on a constructively given probabilistic space one can strictly justify the reachability of one state from another the other which in turn gives a full description of the entire essential state space.

Keywords: stationary distribution, cybernetic control system, cyclic algorithm with prolongations, conflict flows, multidimensional denumerable discrete-time Markov chain, essential state.

Received: 07.11.2019 / Accepted: 30.12.2019 / Published: 01.06.2020

References

1. Haight F. A. *Mathematical Theories of Traffic Flow*. New York, Academic, 1963. 241 p.
2. Inose H., Hamada T. *Road Traffic Control*. Tokyo, Univ. of Tokyo Press, 1975. 331 p.
3. Drew D. R. *Traffic Stream Theory and Control*. New York, McGraw-Hill, 1968. 467 p.
4. Fedotkin M. A. On a class of stable algorithms for control of conflicting flows or arriving airplanes. *Problems of Control and Information Theory*, 1977, vol. 6, no. 1, pp. 17–27.
5. Fedotkin M. A. Construction of a model and investigation of nonlinear algorithms for control of intense conflict flows in a system with variable structure of servicing demands. I. *Lithuanian mathematical journal*, 1977, vol. 7, no. 1, pp. 129–137. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00968503
6. Litvak N. V., Fedotkin M. A. A probabilistic model for the adaptive control of conflict flows. *Automation and Remote Control*, 2000, vol. 61, no. 5, pp. 777–784.
7. Proidakova E. V., Fedotkin M. A. Control of output flows in the system with cyclic servicing and readjustments. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 6, pp. 993–1002.
8. Yamada K., Lam T. N. Simulation analysis of two adjacent traffic signals. *Proceedings of the 17th Winter Simulation Conference*. New York, ACM, 1985, pp. 454–464.
9. Kocheganov V. M., Zorine A. V. Sufficient condition of low-priority queue stationary distribution existence in a tandem of queuing systems. *Vestnik Volzhskoi gosudarstvennoi akademii vodnogo transporta* [Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport], 2017, vol. 50, pp. 47–55 (in Russian).
10. Kocheganov V., Zorine A. V. Sufficient condition for primary queues stationary distribution existence in a tandem of queuing systems. *Vestnik TVGU. Ser. Prikl. Matem.* [Herald of Tver State University. Ser. Appl. Math.], 2018, no. 2, pp. 49–74 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.26456/vtpmk193

Cite this article as:
Kocheganov V. M. Markov Chain States Classification in a Tandem Model with a Cyclic Service Algorithm with Prolongation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 257–265 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-257-265