Analyticity Conditions of Characteristic and Disturbing Quasipolynomials of Hybrid Dynamical Systems

M. S. Portenko[1], D. V. Melnichuk[2], D. K. Andreichenko

[1]Marina S. Portenko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, msportenko@gmail.com
[2]Dmitry V. Melnichuk, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, meldm007@gmail.com
[3]Dmitry K. Andreichenko, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, kp_andreichenko@renet.ru

Hybrid dynamical systems (HDS) are connected by means of the boundary conditions and the constraint's conditions systems of ordinary differential equations and partial differential equations with the corresponding initial conditions. Check the stability of HDS can be performed on the basis of the "fast"algorithm for the application which requires analytic characteristic and disturbing quasipolynomials of HDS in the right half-plane and near the imaginary axis. In this paper we formulate and prove the analyticity conditions of the characteristic and disturbing HDS quasipolynomials. Mathematical models of control objects with distributed parameters in space, matching the thermal conductivity and diffusion processes, the dynamics of support layers of viscous incompressible fluid, as well as the dynamics of the elastically deformable medium taking into account the internal friction.

Key words: hybrid dynamical systems, stability.

References

1. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of hybrid dynamical systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2000, vol. 39, no 3, pp. 383–398.
2. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. *Modelirovanie, analiz i sintez kombinirovannykh dinamicheskikh sistem. Uchebnoe posobie* [Modeling, analysis and synthesis of combined dynamical systems. Tutorial]. Saratov, Rait-Ekspo, 2013, 144 p. (in Russian).
3. Liusternik L. A., Sobolev V. I. *Kratkii kurs funktsional'nogo analiza* [A short course of functional analysis]. Moscow, Vysshaia shkola, 1982, 271 p. (in Russian).
4. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P. On the theory of stability of a cylindrical hydrodynamic suspension. *Fluid Dynamics*, 2009, vol. 44, no 1, pp. 10–21.
5. Andreichenko D. K., Eroftiev A. A., Melnichuk D. V. Parallelization of parametric synthesis by "problems portfolio"scheme based on MPI technology. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 222–228 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-222-228.
6. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. On stability theory of autonomous angular stabilization system for combined dynamical systems. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 2, pt. 2, pp. 9–14 (in Russian).
7. Andreichenko D. K., Andreichenko K. P., Kononov V. V. Parallel algorithm of optimal parameters calculation for the single channel angular stabilization system. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 4, pt. 1, pp. 109–117 (in Russian).

УДК 519.72

О ПРИМЕНЕНИИ ВЕЙВЛЕТОВ К ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Е. А. Родионов

Родионов Евгений Анатольевич, аспирант кафедры математики, Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе, Москва, evgeny_980@list.ru

Дискретное вейвлет-преобразование, ассоциированное с функциями Уолша, определено Лэнгом (W. C. Lang) в 1998 г. В статье излагаются применения преобразования Лэнга и некоторых его модификаций для анализа финансовых временных рядов и для сжатия фрактальных данных. Показано, что для обработки некоторых сигналов изучаемые дискретные вейвлет-преобразования имеют преимущества по сравнению с дискретными преобразованиями Хаара, Добеши и методом зонного кодирования.

Ключевые слова: цифровая обработка сигналов, вейвлеты, функции Уолша, финансовые временные ряды.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-217-225

ВВЕДЕНИЕ

Применениям непрерывного и дискретного вейвлет-преобразований для прогнозирования временных рядов и для обработки сигналов посвящены многочисленные публикации (см., например, библиографию в монографиях [1–3]). С другой стороны, хорошо известны (см., например, [4, 5]) применения дискретных преобразований Уолша и их обобщений к цифровой обработке информации, кодированию изображений, исследованию случайных процессов, анализу динамики линейных и нелинейных систем, разработке систем оптимального управления, а также при построении многоканальных систем связи и в голографии. Дискретное вейвлет-пребразование, определяемое с помощью функций Уолша (ДВПУ), было введено Лэнгом [6], а его обобщение на биортогональный случай изучалось Ю. А. Фарковым, А. Ю. Максимовым и С. А. Строгановым [7] (см. также [8]). В работе [7] показано, что для обработки некоторых изображений ассоциированное с функциями Уолша биортогональное дискретное вейвлет-преобразование имеет преимущества по сравнению с дискретными преобразованиями, определяемыми по вейвлетам Хаара и Добеши (сравните с [9, табл. 6.6.1]). Нестационарное и периодическое дискретные вейвлет-преобразования изучались в работах [10–12] (эти преобразования будут обозначаться через НДВП и ПДВП соответственно). Прогностические свойства вейвлет-преобразований при оценке гладкости сейсмических сигналов исследовались в работах [13–15], причем в работах [14, 15] наряду с вейвлетами Добеши применялись вейвлеты Лэнга. Для выявления предвестниковых эффектов землетрясений можно применить вейвлет-агрегированные сигналы [16, гл. 3], построенные с помощью функций Уолша.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ — положительная полупрямая, $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел. Зафиксируем целое $p \geqslant 2$ и для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ найдем числа $x_j, x_{-j} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ такие, что верно разложение

$$\sum_{j<0} x_{-j} p^{-j-1} + \sum_{j>0} x_j p^{-j}$$

(в случае p-ично рационального x берется разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Обобщенные функции Уолша на полупрямой $\mathbb{R}_+$ определяются по формуле

$$w_k(x) = \chi(k, x), \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \qquad x \in \mathbb{R}_+,$$

где χ — функция двух переменных, заданная равенством

$$\chi(x, y) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \sum_{j=1}^{\infty} (x_j y_{-j} + x_{-j} y_j)\right).$$

При $p = 2$ получаются классические функции Уолша (см. [4]).

Для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$, цифры p-ичного разложения числа $z = x \ominus y$ определяются по формуле

$$z_j = \begin{cases} x_j - y_j, & \text{если } x_j \geqslant y_j, \\ p + x_j - y_j, & \text{если } x_j < y_j. \end{cases}$$

Число $x \ominus y$ называют p-ичной разностью чисел x и y.

Для фиксированного целого $n \geqslant 2$ положим $N = p^n$ и $N_1 = N/p$. Масштабирующее уравнение вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^{(0)} \varphi(px \ominus k), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

и его аналоги для групп Кантора и Виленкина играют важную роль при построении вейвлетов в анализе Уолша. Предположим, что коэффициенты уравнения (1) вычислены по формулам

$$c_k^{(0)} = \frac{1}{N_1} \sum_{l=0}^{N-1} b_l^{(0)} w_l(k/N), \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1, \tag{2}$$

где коэффициенты $b_l^{(0)}$ удовлетворяют условию

$$|b_l^{(0)}|^2 + |b_{l+N_1}^{(0)}|^2 + \ldots + |b_{l+(p-1)N_1}^{(0)}|^2 = 1, \qquad 0 \leqslant l \leqslant N_1 - 1. \tag{3}$$

При некоторых дополнительных условиях из таких наборов чисел конструируются ортогональные вейвлеты и жесткие фреймы в $L^2(\mathbb{R}_+)$ (см. [17]). Метод построения вейвлет-базиса в пространстве периодических последовательностей по произвольным числам $b_l^{(0)}$, удовлетворяющим требованию (3), изложен в [18].

Дискретное вейвлет-преобразование, ассоциированное с обобщенными функциями Уолша (ДВПОУ), определяется формулами

$$a_{j-1,k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}_+} \overline{c^{(0)}_{l\ominus pk}} a_{j,l}, \qquad d^{(1)}_{j-1,k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}_+} \overline{c^{(1)}_{l\ominus pk}} a_{j,l}, \quad \ldots, \quad d^{(p-1)}_{j-1,k} = \sum_{l\in\mathbb{Z}_+} \overline{c^{(p-1)}_{l\ominus pk}} a_{j,l}. \tag{4}$$

Формула обращения этого преобразования имеет вид

$$a_{j,l} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} c^{(0)}_{l\ominus pk} a_{j-1,k} + c^{(1)}_{l\ominus pk} d^{(1)}_{j-1,k} + \ldots + c^{(p-1)}_{l\ominus pk} d^{(p-1)}_{j-1,k}. \tag{5}$$

Для того чтобы определить коэффициенты $c_l^{(s)}$, $s = 1, \ldots, p-1$, в равенствах (4) и (5), необходимо найти коэффициенты $b_l^{(s)}$, $l = 0, \ldots, N-1$, такие, чтобы матрицы

$$\begin{pmatrix} b_l^{(0)} & b_{l+N}^{(0)} & \ldots & b_{l+(p-1)N_1}^{(0)} \\ b_l^{(1)} & b_{l+N_1}^{(1)} & \ldots & b_{l+(p-1)N_1}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_l^{(p-1)} & b_{l+N_1}^{(p-1)} & \ldots & b_{l+(p-1)N_1}^{(p-1)} \end{pmatrix}, \qquad l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \tag{6}$$

были унитарными. Один из методов решения этой задачи расширения матрицы по первой строке изложен в [19] (см. также [20, с. 123], [21]). Коэффициенты $c_l^{(s)}$ в (4) и (5) выражаются через параметры $b_l^{(s)}$ по формулам

$$c_k^{(s)} = \frac{1}{N_1} \sum_{l=0}^{N-1} b_l^{(s)} w_l(k/N), \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1, \qquad 1 \leqslant s \leqslant p-1.$$

В частности, упомянутое выше преобразование ДВПУ получается при $p = 2$ и $c_k^{(1)} = (-1)^k c^{(0)}_{k\ominus 1}$ (соответствующие ортогональные вейвлеты называют [22] диадическими вейвлетами или вейвлетами Лэнга).

В п. 1 показано, что в методе анализа финансовых временных рядов, использованном в [23], вместо вейвлетов Добеши можно использовать вейвлеты Лэнга. При сжатии информации с помощью ортогональных преобразований методом зонного кодирования использование дискретного мультипликативного преобразования во многих случаях дает более точное восстановление, чем применение дискретного преобразования Фурье (см. [4, § 11.3]). В п. 2 в дополнение к результатам из [10, 12] показано, что метод кодирования фрактальных сигналов с помощью ДВПОУ имеет преимущества по сравнению с методом зонного кодирования. Кроме того, в п. 2 изложены некоторые результаты о применениях НДВП и ПДВП для сжатия данных фрактального характера.

1. АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В работе [23] для оценки близости курсов валют применялись меры близости, основанные на дискретном вейвлет-преобразовании Добеши. Рассматривались валютные курсы 29 стран относительно американского доллара за период с 26.02.1991 по 31.12.1998. Данные валютных курсов взяты с сайта Federal Reserve Statistical Release, USA. Две меры близости между временными рядами x и y вычисляются по формулам:

$$D_1(x,y) = -\ln\left(\left|\sum_{j,k} \widetilde{d}^{(x)}_{j,k} \widetilde{d}^{(y)}_{j,k}\right|\right), \qquad D_2(x,y) = 1 - \left|\sum_{j,k} \widetilde{d}^{(x)}_{j,k} \widetilde{d}^{(y)}_{j,k}\right|,$$

где

$$\widetilde{d}^{(z)}_{j,k} = \frac{d^{(z)}_{j,k} 2^j}{\sqrt{\sum\limits_{j,k} \left(d^{(z)}_{j,k} 2^j\right)^2}}$$

и $d_{j,k}^{(z)}$ — детализирующие вейвлет-коэффициенты для ряда z, из которого удален линейный тренд.

В проведенном эксперименте для тех же данных мы использовали диадические вейвлеты при $n = 2$ и $b_0^{(0)} = 1$. Результаты эксперимента для $b_3^{(0)} = 0.5$ приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Значения меры близости D_1 на основе вейвлета Лэнга, $n = 3$, $b_0^{(0)} = 1$, $b_3^{(0)} = 0.5$

Название	D_1	Название	D_1
Belgium, Franc	0.0195	Spain, Peseta	0.5095
Austria, Shilling	0.0266	South Korea, Won	0.5125
Germany, Deutsche marka	0.0267	Finland, Markka	0.5216
Denmark, Krone	0.0284	Japan, Yen	0.5221
Netherlands, Guilder	0.0292	Ireland, Pound	0.5238
France, Franc	0.0301	Thailand, Baht	0.5244
Sri Lanka, Rupee	0.1271	Malaysia, Ringgit	0.6964
Norway, Krone	0.2227	Australia, Dollar	0.7059
Singapore, Dollar	0.2571	Sweden, Krone	0.9392
Portugual, Escudo	0.2704	India, Rupee	1.1141
China, Yuan	0.3325	Hong-Kong, Dollar	1.5005
New Zealand, Dollar	0.3557	Canada, Dollar	1.5307
Greece, Drachma	0.3749	Italy, Lira	1.9648
South Africa, Rand	0.4784	UK, Pound	2.1473

Таблица 2

Значения меры близости D_2 на основе вейвлета Лэнга, $n = 3$, $b_0^{(0)} = 1$, $b_3^{(0)} = 0.5$

Название	D_2	Название	D_2
Germany, Deutsche marka	0.2638	UK, Pound	0.7149
Netherlands, Guilder	0.2689	South Africa, Rand	1.1065
Belgium, Franc	0.2767	Japan, Yen	1.1244
France, Franc	0.2857	Singapore, Dollar	1.2125
Austria, Shilling	0.3002	Thailand, Baht	1.4447
Denmark, Krone	0.3202	Malaysia, Ringgit	1.6362
Portugual, Escudo	0.3586	New Zealand, Dollar	1.9323
Greece, Drachma	0.4222	Hong-Kong, Dollar	2.1504
Norway, Krone	0.4297	China,Yuan	2.5167
Spain, Peseta	0.4297	Sri Lanka, Rupee	2.5988
Finland, Markka	0.495	Australia, Dollar	3.433
Ireland, Pound	0.5046	India, Rupee	3.433
Italy, Lira	0.5927	Canada, Dollar	3.885
Sweden, Krone	0.6815	South Korea, Won	5.8309

Из табл. 1 и 2 следует, что в обоих случаях на первые 6 мест попадают валютные курсы следующих стран: Нидерланды, Германия, Австрия, Бельгия, Франция и Дания. Курсы этих же шести стран попадают на первые 6 мест при любом значении параметра $b_3^{(0)}$ от 0 до 0.9 на сетке с шагом 0.1.

В случае построения мер близости на основе вейвлета Добеши с четырьмя коэффициентами наиболее «близкими» к швейцарскому франку снова оказываются курсы тех же шести стран. А при использовании D_2 (табл. 3) расположение валютных курсов с незначительными изменениями повторяют расположение курсов при применении диадического вейвлета.

Таблица 3

Значения меры близости D_2 на основе вейвлета Добеши с 4-я коэффициентами

Название	D_2	Название	D_2
Germany, Deutsche marka	0.2872	UK, Pound	0.7526
Netherlands, Guilder	0.2998	Japan, Yen	1.0505
Belgium, Franc	0.3247	South Africa, Rand	1.1236
France, Franc	0.3343	Singapore, Dollar	1.3605
Austria, Shilling	0.3419	Thailand, Baht	1.3997
Denmark, Krone	0.3454	Malaysia, Ringgit	1.6741
Portugual, Escudo	0.3983	New Zealand, Dollar	2.3994
Greece, Drachma	0.4442	Hong-Kong, Dollar	2.5023
Norway, Krone	0.4527	China, Yuan	2.7090
Spain, Peseta	0.4699	Sri Lanka, Rupee	2.8185
Finland, Markka	0.5284	South Korea, Won	3.7642
Ireland, Pound	0.5487	Canada, Dollar	4.5233
Italy, Lira	0.6305	Australia, Dollar	5.3117
Sweden, Krone	0.6976	India, Rupee	7.6143

Эти результаты подтверждаются результатами кластерного анализа. Применялись агломеративный и дивизивный методы кластеризации. При этом расстояние между элементами вычислялось по формуле:

$$\mathrm{cr}(x,y) = 1 - \frac{\sum\limits_k (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_k (x_k - \overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_k (y_k - \overline{y})^2}},$$

где в правой части фигурирует коэффициент корреляции [23]. Отметим, что во всех проведенных экспериментах курсы валют тех же шести стран (помимо Швейцарии): Нидерландов, Германии, Австрии, Бельгии, Франции и Дании не только попадали в один кластер, но и целиком образовывали его. Этот результат был представлен на 18-й международной Саратовской зимней школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» [24].

2. СЖАТИЕ ДАННЫХ

В работах [10] и [12] конструкции вейвлетов, определяемых с помощью функций Уолша, применялись к сжатию фрактальных функций. Метод сжатия, применяемый в этих работах, аналогичен методу из [9, § 6.6] и состоит в следующем. К массиву значений выбранной функции применялось дискретное вейвлет-преобразование с использованием того или иного вейвлет-базиса, далее обнулялся определенный процент минимальных по модулю вейвлет-коэффициентов, и к новому массиву применялось обратное вейвлет-преобразование, затем подсчитывалась среднеквадратичная ошибка между полученным массивом и первоначальным. В случае, когда вместо среднеквадратичной ошибки шаг, связанный с обнулением вейвлет-коэффициентов, заменялся равномерным квантованием, на последнем шаге считалась энтропия Шеннона.

В качестве фрактальных функций выбирались функции Шварца, Такаги, Ван-дер-Вардена, Римана и Вейерштрасса. Напомним определения этих функций:

$\mathscr{S}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{h(2^k x)}{4^k}$ — функция Шварца, где $h(x) = [x] - \sqrt{x - [x]}$;

$\mathscr{T}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{t_0(2^{k-1} x)}{2^k}$ — функция Такаги, где $t_0 = 2|x - [x + 1/2]|$;

$\mathscr{V}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{f_0(4^k x)}{4^k}$ — функция Ван-дер-Вардена, где $f_0(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1/2), \\ 1 - x, & x \in [1/2, 1] \end{cases}$ и $f_0(x+1) = f(x)$;

$\mathscr{R}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(k^2\pi x)}{k^2}$ — функция Римана;

$\mathscr{W}_{\alpha,\beta}(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha^k\cos(\beta^k\pi x)$ — функция Вейерштрасса, где $0<\alpha<1$, $\beta\geqslant 1/\alpha$.

В работе [12] показано, что ПДВП с оптимальными значениями используемого авторами параметра в ряде случаев дают лучший результат, чем вейлеты Хаара и Добеши.

В работе [10] для $p=n=2$ применялась конструкция нестационарных вейвлетов. В этом случае прямое и обратное НДВП определяются формулами

$$a_{j-1,k}=\sum_{l\in\mathbb{Z}_+}\overline{c^{(0)}_{l\ominus 2k}}(j)a_{j,l},\qquad d_{j-1,k}=\sum_{l\in\mathbb{Z}_+}\overline{c^{(1)}_{l\ominus 2k}}(j)a_{j,l},$$

$$a_{j,l}=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}c^{(0)}_{l\ominus 2k}(j)a_{j-1,l}+c^{(1)}_{l\ominus 2k}(j)d_{j,l}.$$

По аналогии с [25] на каждом уровне аппроксимации решалась оптимизационная задача:

$$\langle Fc^{(0)}(j),c^{(0)}(j)\rangle\xrightarrow{c^{(0)}(j)}\max,$$

где $c^{(0)}(j)$ — вектор коэффициентов масштабирующего уравнения на j-м уровне разложения, а матрица F задается равенством

$$F_{s,k}=\sum_{m\in\mathbb{Z}_+}a_{j,2m\ominus s}a_{j,2m\ominus k}.$$

Сравнение проводилось с результатами, полученными при помощи вейвлетов Хаара, Добеши, а также при помощи вейвлетов, основанных на адаптивном КМА на базе вейвлетов Добеши [25]. Согласно [10] результаты, полученные при помощи НДВП, превосходят аналогичные результаты, полученные при помощи вейвлетов Хаара и Добеши.

Приведем теперь сравнение результатов сжатия фрактальных функций при помощи ДВПОУ (см. (4), (5)) и методом зонного кодирования. Для произвольного комплекснозначного вектора x длины $M=p^m$ прямое и обратное дискретные мультипликативные преобразования (ПДМП и ОДМП) определяются (см. [4, с. 256]) формулами

$$\widehat{x}(k)=\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}x(j)\overline{w_j(k/M)},\qquad x(j)=\sum_{k=0}^{M-1}\widehat{x}(k)w_k(j/M).\tag{7}$$

Вариант *метода зонного кодирования*, использованный в [4, с. 274], состоит в применении ПДМП к вектору x с последующим обнулением у вектора $\widehat{x}$ последних p^m-p^{m-1} компонент: $\widehat{x}(p^{m-1})$, $\widehat{x}(p^{m-1}+1)$, $\ldots$, $\widehat{x}(p^m-1)$. Затем после применения ОДМП получается вектор $\widetilde{x}$. Погрешность восстановления будем оценивать величиной $\delta=||x-\widetilde{x}||_2/\sqrt{M}$. В данной работе мы сравниваем этот метод зонного кодирования (обозначим его Zp) с аналогичными методами, основанными на ДВПУ.

При проведении вычислительных экспериментов с фрактальными функциями мы будем сравнивать определенные выше дискретные вейвлет-преобразования не только с методом зонного кодирования, но также и с дискретными вейвлет-преобразованиями Хаара с коэффициентами сжатия 2 и 3. Для коэффициента сжатия 2 дискретное преобразование Хаара хорошо известно и определено, например, в [9, § 5.6]. В случае коэффициента сжатия, равного 3, дискретное преобразование Хаара реализуется по формулам

$$a_{j-1,k}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\overline{c^{(0)}_{l-3k}}a_{j-1,l},\qquad d^{(1)}_{j-1,k}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\overline{c^{(1)}_{l-3k}}a_{j,l},\qquad d^{(2)}_{j-1,k}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\overline{c^{(2)}_{l-3k}}a_{j,l},$$

$$a_{j,l}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c^{(0)}_{l-3k}a_{j-1,k}+c^{(1)}_{l-3k}d^{(s)}_{j-1,k}+c^{(2)}_{l-3k}d^{(s)}_{j-1,k}),$$

где $c^{(0)}_0=c^{(0)}_1=c^{(0)}_2=c^{(1)}_0=c^{(2)}_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и $c^{(1)}_1=c^{(2)}_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_3$, $c^{(1)}_2=c^{(2)}_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\varepsilon_3^2$, $\varepsilon_3=\exp(2\pi i/3)$.

Эти формулы следуют из известного выражения вейвлетов Хаара через масштабирующую функцию для случая $p = 3$ (см., например, [26, с. 315]).

Для $p = 2$ и $p = 3$ обозначим через Hp метод сжатия при помощи соответствующих вейвлетов Хаара. При фиксированных p и n будем обозначать через $O(p, n)$ метод сжатия с использованием ДВПОУ, определяемого по формулам (4), (5).

Обобщенная функция Вейерштрасса определяется равенством

$$\widetilde{\mathscr{W}}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k e^{\beta^k \pi i x},$$

где $0 < \alpha < 1$, $\beta \geqslant 1/\alpha$.

В табл. 4 и 5 приведены погрешности восстановления массивов определенных выше функций с помощью описанных методов, а также с использованием вейвлет-базиса Хаара. В качестве исходных массивов данных выбирались 256 (в случае $p = 2$) и 243 (в случае $p = 3$) значений фрактальных функций. Для функций Шварца и Такаги в качестве интервала разбиения выбирался промежуток $[0, 1)$, для функции Ван-дер-Вардена использовался промежуток $[0, 0.25)$, а для функций Римана, Вейерштрасса и обобщенной функции Вейерштрасса был выбран промежуток $[0, 2)$. Из этих таблиц видно, что дискретные вейвлет-преобразования, определяемые по функциям Уолша, дают результаты лучше, чем метод зонного кодирования.

Таблица 4

Значения погрешности для $p = 2$

Функция	$Z2$	$H2$	$O(2,2)$	$O(2,3)$
$\mathscr{S}$	0.0030	0.0016	0.0009	0.0009
$\mathscr{T}$	0.0055	0.0037	0.0015	0.0015
$\mathscr{V}$	0.0010	0.0007	0.0005	0.0005
$\mathscr{R}$	0.0295	0.0179	0.0165	0.0162
$\mathscr{W}_{0.6,9}$	0.2503	0.1133	0.1091	0.1072
$\mathscr{W}_{0.8,5}$	0.5225	0.2315	0.2117	0.2097
$\mathscr{W}_{0.8,7}$	0.5779	0.2313	0.2069	0.1534
$\mathscr{W}_{0.9,7}$	1.0136	0.3291	0.2489	0.2244

Таблица 5

Значения погрешности для $p = 3$

Функция	$Z3$	$H3$	$O(3,1)$	$O(3,2)$
$\widetilde{\mathscr{W}}_{0.6,9}$	0.3774	0.2835	0.2068	0.1310
$\widetilde{\mathscr{W}}_{0.8,6}$	0.6660	0.5393	0.4826	0.4629
$\widetilde{\mathscr{W}}_{0.8,9}$	0.6572	0.4599	0.3448	0.2934
$\widetilde{\mathscr{W}}_{0.9,4}$	1.3786	0.9706	0.8763	0.8269

Библиографический список

1. *Короновский А. А., Храмов А. Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М : Физматлит, 2003. 176 с.
2. *Percival D., Walden A.* Wavelet Methods for Time Series Analysis. Cambridge : Cambridge University Press, 2000. 611 p.
3. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов. М : Мир, 2005. 671 с.
4. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша : Теория и применения. Изд. 2-е, испр. и доп. М. : Изд-во ЛКИ, 2008. 208 с.
5. *Залманзон Л. А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М. : Наука, 1989. 496 с.
6. *Lang W. C.* Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1998. Vol. 21. P. 307–317. DOI: 10.1155/S0161171298000428.

7. *Farkov Yu. A., Maksimov A. Yu., Stroganov S. A.* On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2011. Vol. 9. P. 485–499. DOI: 10.1142/S0219691311004195.
8. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* On biorthogonal discrete wavelet bases // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2015. Vol. 13, № 1, 1550002 (18 p). DOI: 10.1142/S0219691315500022.
9. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М. : Изд-во Триумф, 2003. 320 с.
10. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* Nonstationary wavelets related to the Walsh functions // American J. Comput. Math. 2012. Vol. 2, № 2. P. 82–87.
11. *Farkov Yu. A.* Periodic wavelets in Walsh analysis // Communic. Math. Appl. 2012. Vol. 3, № 3. P. 223—242.
12. *Фарков Ю. А., Борисов М. Е.* Периодические диадические всплески и кодирование фрактальных функций // Изв. вузов. Математика. 2012. Т. 9. С. 54—65.
13. *Любушин А. А.* Сейсмическая катастрофа в Японии 11 марта 2011 года. Долгосрочный прогноз по низкочастотным микросейсмам // Геофизические процессы и биосфера. 2011. Т. 10, № 1. С. 9–35.
14. *Строганов С. А.* Оценка гладкости низкочастотных микросейсмических колебаний с помощью диадических вейвлетов // Геофизические исследования. 2012. Т. 13, № 1. С. 17–22.
15. *Любушин А. А., Яковлев П. В., Родионов Е. А.* Многомерный анализ параметров флуктуаций GPS сигналов до и после мегаземлетрясения 11 марта 2011 г. в Японии // Геофизические исследования. 2015. Т. 16, № 1. С. 14–23.
16. *Любушин А. А.* Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. М. : Наука, 2007. 228 с.
17. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl. 2015. Vol. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi). P. 13–36.
18. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина – Крестенсона // Матем. заметки. 2011. Т. 89, вып. 6. С. 914–928.
19. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* Algorithms for Wavelet Construction on Vilenkin Groups // p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2011. Vol. 3, № 3. P. 181–195. DOI: 10.1134/S2070046611030022.
20. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М : Физматлит, 2005. 616 с.
21. *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. Vol. 13, №. 5, 1550036 (19 p). DOI: 10.1142/S0219691315500368.
22. *Протасов В. Ю., Фарков Ю. А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, вып. 10. С. 129–160.
23. *Бурнаев Е. В., Оленев Н. Н.* Меры близости на основе вейвлет коэффициентов для сравнения статистических и расчетных временных рядов // Межвуз. сб. науч. и науч.-метод. тр. за 2005 г. Киров : Изд-во ВятГУ, 2006. Вып. 10. С. 41–51.
24. *Родионов Е. А.* О применениях вейвлетов к анализу временных рядов // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Сарат. зим. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2016. С. 232–234.
25. *Sendov Bl.* Adapted multiresolution analysis // Functions, series, operators (Budapest, 1999) / eds. L. Leinder, F. Schipp, J. Szabados. Budapest : Janos Bolyai Math. Soc., 2002. P. 23–38.
26. *Farkov Yu. A.* Multiresolution analysis and wavelets on Vilenkin groups // Facta Univ. (Niš), Ser.: Elec. Energ. 2008. Vol. 21, № 3. P. 309–325.

On Applications of Wavelets in Digital Signal Processing

E. A. Rodionov

Evgeny A. Rodionov, Russian State Geological Prospecting University, 23, Mikluho-Maklaya st., 117997, Moscow, Russia, evgeny_980@list.ru

Discrete Wavelet transform associated with the Walsh functions was defined by Lang in 1998. The article describes an application of Lang's transform and some its modifications in analysis of financial time series and for the compression of fractal data. It is shown that for the processing of certain signals the studied discrete wavelet transform has advantages over the discrete transforms Haar, Daubechies and the method of zone coding.

Key words: digital signal processing, wavelets, Walsh functions, financial time series.

References

1. Koronovskii A. A., Khramov A. E. Continuous wavelet analysis and its applications. Moscow, Fizmatlit, 2003, 176 p. (in Russian).
2. *Percival D., Walden A.* Wavelet Methods for Time Series Analysis. Cambridge : Cambridge University Press, 2000, 611 p.
3. Stephane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing the Sparse Way.* 3rd. edition. Burlington, Elsevier Inc., 2008, 620 p. (Russ. ed. : Malla S. Veivlety v obrabotke signalov. Moscow, Mir, 2005, 671 p.)
4. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh Series and Transforms : Theory and Applications.* Dordrecht; Boston; London, Kluwer Academic Publishers, 368 p. (Russ. ed. : Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. Riady i preobrazovaniia Uolsha : Teoriia i primeneniia. Izd. 2-e, ispr. i dop. Moscow, LKI, 2008, 208 p.)
5. Zalmanzon L. A. *Preobrazovanija Fur'e, Uolsha, Haara i ih primenenie v upravlenii, svjazi i drugih oblastjah* [Fourier, Walsh and Haar transforms and its application in management, communication and in other areas]. Moscow, Nauka, 1989, 496 p. (in Russian).
6. Lang W. C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group. *Intern. J. Math. and Math. Sci.*, 1998, vol. 21, p. 307–317. DOI: 10.1155/S0161171298000428.
7. Farkov Yu. A., Maksimov A. Yu., Stroganov S. A. On biorthogonal wavelets related to the Walsh functions. *Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, 2011, vol. 9, pp. 485–499. DOI: 10.1142/S0219691311004195.
8. Farkov Yu. A., Rodionov E. A. On biorthogonal discrete wavelet bases. *Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, 2015, vol. 13, no. 1, 1550002, 18 p. DOI: 10.1142/S0219691315500022.
9. Welstead S. *Fractal and Wavelet Image Compression Techniques.* Bellingham, Wash, SPIE Press, 2003, 259 p.
10. Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Nonstationary wavelets related to the Walsh functions. *American J. Comput. Math.*, 2012, vol. 2, no. 2, pp. 82–87.
11. Farkov Yu. A. Periodic wavelets in Walsh analysis. *Communic. Math. Appl.*, 2012, vol. 3, no. 3, pp. 223–242.
12. Farkov Yu. A., Borisov M. E. Periodic dyadic wavelets in coding of fractal functions. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 9, no. 56, pp. 46–56. DOI: 10.3103/S1066369X1209006X.
13. Lyubushin A. A. Seismic catastrophe in Japan on March 11, 2011 : Long-term prediction on the basis of low-frequency microseisms. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2011, vol. 47, iss. 8, no. 1, pp. 904–921.
14. Stroganov S. A. Smoothness estimates of low-frequency microseisms using dyadic wavelets. *Geophysical Research*, 2012, vol. 13, no. 1, pp. 17–22 (in Russian).
15. Lyubushin A. A., Jakovlev P. V., Rodionov E. A. Multiple analysis of GPS signal fluctuation parameters before and after the megaearthquake in Japan on 11 March 2011. *Geophysical Research*, 2015, vol. 16, no. 1, pp. 14–23 (in Russian).
16. Lyubushin A. A. *Analiz dannyh sistem geofizicheskogo i jekologicheskogo monitoringa* [Data analysis systems for geophysical and environmental monitoring]. Moscow, Nauka, 2007, 228 p. (in Russian).
17. Farkov Yu. A. Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis. *Poincare J. Anal. Appl.*, 2015, vol. 2, special issue (IWWFA-II, Delhi), pp. 13–36.
18. Farkov Yu. A. Discrete wavelets and the Vilenkin – Chrestenson transform. *Math. Notes*, 2011, vol. 89, iss. 6, pp. 914–928. DOI: 10.4213/mzm8704.
19. Farkov Yu. A., Rodionov E. A. Algorithms for Wavelet Construction on Vilenkin Groups. *p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl.*, 2011, vol. 3, no. 3, p. 181–195. DOI: 10.1134/S2070046611030022.
20. Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Wavelet Theory.* AMS, Translations Mathematical Monographs, 2011, vol. 239, 506 p. (Russ. ed. : Novikov I. Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. Teorija vspleskov. Moscow, Fizmatlit, 2005, 616 p.).
21. Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties. *Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process*, 2015, vol. 13, no. 5, 1550036, 19 p. DOI: 10.1142/S0219691315500368.
22. Protasov V. Yu., Farkov Yu. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 10, pp. 1529–1558. DOI: 10.1070/SM2006v197n10ABEH003811.
23. Burnaev E. V., Olenev N. N. Mery blizosti na osnove vejvlet kojefficientov dlja sravnenija statisticheskih i raschetnyh vremennyh rjadov [Proximity measures of the wavelet coefficients for comparison of statistical and computational time series]. *Mezhvuz. sb. nauch. i nauch.-metod. tr. za 2015 g.*, Kirov, Izd-vo VyatGU, 2006, iss. 10, pp. 41–51 (in Russian).
24. Rodionov E. A. O primenenijah veivletov k analizu vremennyh ryadov [On applications of wavelets to analisys of time series]. *Sovremennye problemy teorii funkcij i ih prilozhenija : Materialy 18-j mezhdunarodnoj Saratovskoj zimnej shkoly* [Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications. Proc. 18th Intern. Saratov Winter School], Saratov, Izd-vo "Nauchnaia kniga", 2016, pp. 232–234 (in Russian).
25. Sendov Bl. Adapted multiresolution analysis. *Functions, series, operators (Budapest, 1999)* / eds. L. Leinder, F. Schipp, J. Szabados; Budapest, Janos Bolyai Math. Soc., 2002, pp. 23–38.
26. Farkov Yu. A. Multiresolution analysis and wavelets on Vilenkin groups. *Facta Univ. (Niš), Ser.: Elec. Energ.*, 2008, vol. 21, no. 3, pp. 309–325.