On variety of Semigroups of Reletions with Operation of Reflexive Double Cylindrification

D. A. Bredikhin, A. V. Popovich

Saratov State Technical University, 77, Politekhnicheskaja str., Saratov, 410054, Russia, bredikhin@mail.ru, popovich_al@mail.ru

In the paper, the basis of identities for the variety generated by semigroups of relations with the operation of reflexive double cylindrification is found.

Key words: algebras of relations, varieties, basis of identities, operation of reflexive double cylindrification.

References

1. Tarski A. On the calculus of relations. *J. Symbolic Logic*, 1941, iss. 4, pp. 73–89.
2. Schein B. M. Relation algebras and function semigroups. *Semigroup Forum*, 1970, vol. 1, iss. 1, pp. 1–62.
3. Bredikhin D. A. Relation algebras with diophantine operations. *Doklady Math.*, 1998, vol. 57, no. 3, pp. 435–436.
4. Bredikhin D. A. On quasi-identities of relation algebras with diophantine operations. *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, iss. 1, pp. 23–33. DOI: 10.1007/BF02674896.
5. Böner P., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations. *Contributions to general algebras*, 1991, vol. 7, pp. 50–70.
6. Henkin L., Monk J. D., Tarski A. *Cylindric Algebras*. Amsterdam, North-Holland, 1971.
7. Kuhn S. The domino relations : flattening a two-dimensional logic. *J. Philosophical Logic*, 1989, vol. 18, pp. 173–195.
8. Venema Y. *Many-dimansional modal logic*. Amsterdam, Universiteit van Amsterdam, 1989.
9. Jónsson B. Varieties of relation algebras. *Algebra Univers.*, 1982, vol. 54, pp. 273–299.
10. Schein B. M. Representation of involuted semigroups by binary relations. *Fundamenta Math.*, 1974, vol. 82, iss. 2, pp. 121–141.
11. Bredikhin D. A. On varieties of semigroups of relations with operations of cylindrification. *Contributions to General Algebra*, 2005, vol. 16, pp. 1–6.
12. Bredikhin D. A. Popovich A. V. Identities of semigroups of relations with an operator of reflexive double cylindrification. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2014, vol. 58, iss. 8. pp. 74–77. DOI: 10.3103/S1066369X14080106.
13. Bredikhin D. A. The equational theory of algebras of relations with positive operations. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 1993, vol. 37, iss. 3. pp. 21–28.

УДК 519.81

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЭТАЛОНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А. А. Будаева

Кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизированной обработки информации, Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет), Владикавказ, budalina@yandex.ru

Результаты исследований задач планирования и управления показывают, что в реальной постановке эти задачи являются многокритериальными. Для эффективного решения такой задачи необходимо в первую очередь построить многокритериальную математическую модель, которую затем нужно оптимизировать, предварительно выбрав наиболее подходящий для этого метод. Предлагается подход к решению задач дискретной многокритериальной оптимизации, в основе которого лежат понятия эталона и расстояния, и рассматривается многокритериальная задача дискретной оптимизации, которая решается с помощью этого метода.

Ключевые слова: многокритериальные задачи, дискретная оптимизация, эталон, расстояние, вектор идеального значения целевой функции, экспертные оценки.

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы принятия оптимальных проектных решений, возникающие в различных областях науки и техники, часто могут быть сформулированы как задачи дискретной оптимизации. Отличительная особенность задач дискретной оптимизации состоит в наличии конечного множества допустимых решений, которые теоретически можно перебрать и выбрать наилучшее (дающее минимум или максимум целевой функции).

Для решения задач дискретного программирования разработано большое число методов, основными из которых являются метод ветвей и границ и динамическое программирование. Достоинством этих методов является получение глобально оптимального решения. Однако они предназначены для решения только однокритериальных задач.

Все задачи, реально возникающие в системах управления, по сути своей многокритериальны. Это объективно связано с тем, что в каждой экономической, производственной, транспортной системе имеется ряд участников, каждый из которых по-своему оценивает качество принимаемых решений. Кроме того, некоторые участники могут оценивать принимаемые решения по нескольким показателям. Так, при экономической оценке проекта, критериями служат экономическая эффективность, стоимость, реализуемость. При покупке оборудования мы опять сталкиваемся с несколькими критериями: стоимость, надежность, производительность и т.д. В общем виде задача дискретной многокритериальной оптимизации записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \forall\ i : F_i(\vec{X}) \to \max(\min), \\ \forall\ j : \varphi_j(\vec{X}) \leqslant b_j, \\ \forall\ k : x_k \in X_k; \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}, \end{cases} \tag{1}$$

где $F_i(\vec{X})$ — i-й критерий $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\vec{X}$ — вектор переменных, $\varphi_j(\vec{X})$ — j-е ограничение, X_k — множество значений, принимаемых k-й переменной.

Поиск решения задачи (1) не представляет особых сложностей, когда: *критерии кооперируются* (предпочтение по одному критерию влечет за собой такое же предпочтение по другому критерию); *критерии нейтральны по отношению друг к другу* (поиск решения по одному критерию никаким образом не отражается на поиске решения по другому критерию).

Основная же сложность решения многокритериальных задач состоит в том, что в большинстве случаев критерии конкурируют друг с другом: поиск более предпочтительного решения по одному критерию приводит к тому, что решение становится менее предпочтительным по другому критерию, т. е. решения несравнимы между собой.

Анализ таких ситуаций может быть осуществлен при помощи выделения области компромиссов — решений, оптимальных по Парето [1]. Вектор переменных считается Парето-оптимальным, если улучшение значений одних критериев может быть достигнуто только за счет ухудшения значений других критериев. У данного подхода есть несколько недостатков: во-первых, поиск оптимального решения ограничен областью компромиссов, которая, как правило, уже всей области допустимых решений; во-вторых, сравнительно большая мощность множества оптимальных планов может оказаться соизмеримой с мощностью множества всех допустимых планов [2].

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭТАЛОНОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Одним из основных методов решения задач дискретной оптимизации является метод типа ветвей и границ. Главным достоинством этого метода является возможность получения глобально оптимального решения. В основе метода лежит идея последовательного разбиения множества допустимых решений. На каждом шаге метода элементы разбиения (подмножества) подвергаются анализу — содержит ли данное подмножество оптимальное решение или нет. Допустимое решение, дающее наилучшую верхнюю оценку, называют рекордом. Очевидно, что для однокритериальных задач значение рекорда вычисляется однозначно. В случае же многокритериальных задач при конкурирующих критериях решения неоднозначны.Следовательно, для применения метода ветвей и границ к многокритериальным задачам требуется свести исходную задачу (1) к однокритериальной.

На сегодняшний день существуют различные способы такого преобразования, например, выделение главного критерия, переход к одному обобщенному критерию и др. [3–5]. Метод главного критерия сводится к оптимизации по одному выбранному критерию, при условии, что остальные критерии не больше (или не меньше) приемлемых значений. Метод обобщенного критерия заключается в свёртке набора критериев в числовую функцию, которая и будет являться новой целевой функцией.

Виды свёрток:

1) линейная свёртка: $f = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_n F_n$;

2) мультипликативная свёртка: $f = F_1^{\alpha_1} * \cdots * F_n^{\alpha_n}$;

3) приведенная свёртка: $f = \min\limits_i \dfrac{F_i}{\alpha_i}$ или $f = \max\limits_i \dfrac{F_i}{\alpha_i}$;

4) и др.

Основной минус указанных методов состоит в необходимости привлечения экспертов на разных этапах решения задачи, например, при выборе главного критерия или при определении весовых коэффициентов. Мнения экспертов часто противоречивы, вследствие чего решения, получаемые приведенными методами, могут оказаться неоднозначными. Применение метода эталонов, с одной стороны, позволяет получать Парето-оптимальные решения, с другой стороны — не требует экспертной оценки исходной информации. Суть метода состоит в выделении эталонного решения: наилучшего или наихудшего. Наилучший эталон будет иметь в качестве своих характеристик наилучшие значения целевых критериев задачи (1), а наихудший соответственно наихудшие значения.

Рассмотрим еще две задачи:

$$\begin{cases} \forall\, i : \vec{K}_i = F_i(\vec{X}) \to \max(\min), \\ \forall\, j : \varphi_j(\vec{X}) \leqslant b_j, \\ \forall\, k : x_k \in X_k, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \forall\, i : \vec{W}_i = F_i(\vec{X}) \to \min(\max), \\ \forall\, j : \varphi_j(\vec{X}) \leqslant b_j, \\ \forall\, k : x_k \in X_k, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}. \end{cases} \tag{3}$$

Решая задачи (2) и (3) применительно к каждому критерию, получаем 2 вектора: вектор наилучших значений критериев — $\vec{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_n,\}$ и вектор наихудших значений критериев — $\vec{W} = \{W_1, W_2, \ldots, W_n,\}$.

Тогда задача (1) преобразуется в однокритериальную задачу вида

$$\begin{cases} \Delta(\vec{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} [K_i - F_i(\vec{X})]^2 \to \min, \\ \forall\, j : \varphi_j(\vec{X}) \leqslant b_j, \\ \forall\, k : x_k \in X_k, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \end{cases} \tag{4}$$

с учетом близости с наилучшим эталоном или вида

$$\begin{cases} \delta(\vec{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} [W_i - F_i(\vec{X})]^2 \to \max, \\ \forall\, j : \varphi_j(\vec{X}) \leqslant b_j, \\ \forall\, k : x_k \in X_k, \quad \vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \end{cases} \tag{5}$$

с учетом удаленности от наихудшего эталона. В качестве меры близости объектов воспользуемся квадратом евклидова расстояния.

Целевые функции в полученных задачах (4) и (5) нелинейны. Однако, принимая во внимание дискретность значений вектора $\vec{X}$ для решения задач (4) и (5), можно воспользоваться методом ветвей и границ.

Таким образом, решение задачи (1) состоит из двух основных этапов: оптимизация каждой отдельной целевой функции с учетом заданных ограничений и минимизация критерия $\Delta(\vec{X})$ (или максимизация критерия $\delta(\vec{X})$).

Далее доказывается, что оптимальные решения задач (4) и (5) являются Парето-оптимальными решениями системы (1).

Теорема. *Оптимальное решение системы* (4) *является Парето-оптимальным решением системы* (1).

Доказательство. Обозначим через $\vec{X}_{opt}$ оптимальный вектор переменных системы (4), т. е.

$$\Delta(\vec{X}_{opt}) = \min_{\{X\}} \Delta(\vec{X}), \tag{6}$$

где $\{\vec{X}\}$ — множество допустимых решений системы (4).

Докажем эту теорему методом от противного. Пусть теорема неверна, и вектор $\vec{X}_{opt}$ не является Парето-оптимальным решением системы (1). Тогда существует Парето-оптимальный вектор переменных $\vec{X}_1$, множество критериев F которого можно разделить на два подмножества F_1' и F_2', таких что:

$$\Delta_F(\vec{X}) = \Delta_{F_1'}(\vec{X}) + \Delta_{F_2'}(\vec{X}).$$

К подмножеству критериев F_1' отнесем критерии, значения которых улучшить нельзя, тогда можно записать:

$$\forall\ F_i \in F_1' : F_i(\vec{X}_1) = \Delta_{F_i}(\vec{X}_{opt}) \Rightarrow \Delta_{F_1'}(\vec{X}_1) = \Delta_{F_1'}(\vec{X}_{opt}).$$

Значения критериев подмножества F_2 улучшить можно, следовательно, справедливо выражение:

$$\forall\ F_i \in F_2' : F_i(\vec{X}_1) \succ \Delta_{F_i}(\vec{X}_{opt})\ \Rightarrow\ \Delta_{F_2'}(\vec{X}_1) < \Delta_{F_2'}(\vec{X}_{opt}). \tag{7}$$

Выражение (7) противоречит (6). Если $\vec{X}_{opt}$ является оптимальным среди всех допустимых решений системы (4), то выражение (7) может быть справедливо только тогда, когда вектор переменных $\vec{X}_1$ не является допустимым (следовательно, не является Парето-оптимальным решением системы (1)), в противном случае $\Delta_{F_2'}(\vec{X}_1) = \Delta_{F_2'}(\vec{X}_{opt})$.

Итак, доказано, что оптимальное решение системы (4) является оптимальным по Парето решением системы (1). $\square$

Таким же образом можно показать, что оптимальное решение системы (5) является Парето-оптимальным решением системы (1).

Аналогичный результат — оптимальность предлагаемого решения по Парето — можно получить, если воспользоваться понятием обобщенного критерия, введенного в работе [5].

Под построением обобщенного критерия в многокритериальной ЗПР понимается процедура, которая «синтезирует» набор оценок по заданным критериям (называемым в этом случае частными, или локальными, критериями), в единую численную оценку, выражающую итоговую полезность этого набора оценок для принимающего решения. Показано, что полученное отображение множества допустимых решений в $\mathbf{R}$ является строго изотонным относительно Парето-предпочтения.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Отображение, которое каждому решению ставит в соответствие его расстояние до эталонного решения, является обобщенным критерием.*

Из этого утверждения следует, что решение, на котором достигается минимальное значение критерия $\Delta(\vec{X})$ (или максимальное значение критерия $\delta(\vec{X})$), является Парето-оптимальным.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Проиллюстрируем на примере применение метода ветвей и границ к решению многокритериальной задачи.

Пусть дана следующая многокритериальная задача:

$$\begin{cases} F_1 = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \to \max, \\ F_2 = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \to \min, \\ F_3 = 8x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min, \\ F_4 = 9x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \max, \\ F_5 = 6x_1 + 3x_2 + 1x_3 \to \max, \\ 10x_1 + 17x_2 + 2x_3 \leqslant 20, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 \geqslant 5, \\ \forall\ i : x_i = \overline{1,0}. \end{cases} \tag{8}$$

Задача (8) содержит 5 конкурирующих критериев. На первом этапе найдем глобально оптимальные решения для каждого отдельного критерия. Результат решения имеет вид

$$K_1 = 7, \quad \vec{X}_1 = \{0,1,1\}; \quad K_2 = 7, \quad \vec{X}_2 = \{1,0,1\}; \quad K_3 = 1, \quad \vec{X}_3 = \{0,1,0\};$$
$$K_4 = 11, \quad \vec{X}_4 = \{1,0,1\}; \quad K_5 = 3, \quad \vec{X}_5 = \{0,1,0\}.$$

Используя полученный вектор $\vec{K} = \{7, 7, 1, 11, 3\}$, выполним преобразование задачи (8) к виду (4). Целевой критерий $\Delta(\vec{X})$ после упрощений примет вид (9)

$$\Delta(\vec{X}) = 206x_1^2 + 120x_2^2 + 34x_3^2 + 246x_1x_2 + 148x_1x_3 + 100x_2x_3 - 348x_1 - \\ -320x_2 - 128x_3 + 229 \to \min. \qquad (9)$$

Решая исходную задачу (8) с одним целевым критерием (9), получим в качестве решения точку $\vec{X} = \{0, 1, 0\}$. Значение $\Delta(\vec{X})$ при этом равно 29, а значения целевых критериев: $F_1(\vec{X}) = 5$, $F_2(\vec{X}) = 7$, $F_3(\vec{X}) = 1$, $F_4(\vec{X}) = 6$, $F_5(\vec{X}) = 3$.

Для сравнения, приведем значения оценок $\Delta(\vec{X})$ в точках, полученных в задачах одноцелевой оптимизации:

$$\vec{X}_1 = \{0, 1, 1\}, \quad \Delta(\vec{X}_1) = 35; \qquad \vec{X}_2 = \{1, 0, 1\}, \quad \Delta(\vec{X}_2) = 141; \qquad \vec{X} = \{0, 1, 0\}, \quad \Delta(\vec{X}) = 29.$$

Таким образом, видно, что полученная точка является наиболее оптимальной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный выше подход позволяет с единых позиций подойти к решению дискретных многокритериальных задач, используя при этом достоинства методов однокритериальной дискретной оптимизации. Использование при этом метода эталонов дает возможность, с одной стороны, получать Парето-оптимальные решения, с другой стороны, «естественно» переходить от поиска оптимального решения многокритериальных задач к оптимальному решению задач с одной целевой функцией без привлечения дополнительных условий [3].

Библиографический список

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Физматлит, 2007.
2. *Виноградская Т. М., Гафт М. Г.* Точная верхняя оценка числа неподчиненных решений в многокритериальных задачах // Автоматика и телемеханика. 1974. № 9. С. 111–118.
3. *Вагин В. С., Гропен В. О., Позднякова Т. А., Будаева А. А.* Многокритериальное ранжирование объектов методом эталонов как инструмент оптимального управления // Устойчивое развитие горных территорий. 2010. № 1. С. 47–55.
4. *Кини Р. Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях : предпочтения и замещения. М. : Радио и связь, 1981.
5. *Розен В. В.* Математические модели принятия решений в экономике. М. : Высш. шк., 2002.

Comparison Standards Method for Solving of the Multi-criterion Discrete Optimization Problems

A. A. Budaeva

North Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University), 44, Nikolaeva str., 362021, Vladikavkaz, North Ossetia-Alania, Russia, budalina@yandex.ru

Research results of management and planning problems show that in real statement these problems are multi-criterion. For effective solution to these problems it is necessary to construct multi-criterion mathematical model and then it is necessary to optimize it, beforehand selecting the most appropriate method for this purpose. Proposed approach for multi criteria discrete optimization problems is based on the concepts of measurement standards and distances. With the help of this method the multi-criterion discrete optimization problem solution is considered.

Key words: multi-criterion problems, discrete optimization, measurement standards, distance, ideal value vector of objective function, expert assessments.

References

1. Podinovskii V. V., Nogin V. D. *Pareto-optimal'nye resheniia mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal solutions of multicriterial problems]. Moscow, Fizmatlit, 2007 (in Russian).
2. Vinogradskaia T. M., Gaft M. G. Tochnaia verkhniaia otsenka chisla nepodchinennykh reshenii v mnogokriterial'nykh zadachakh. [Exact Upper Estimate of The Number of Non-subordinate Problems in Multi-Criterion

Problems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1974, no. 9, pp. 111–118 (in Russian).

3. Vagin V. S., Gropen V. O., Pozdniakova T. A., Budaeva A. A. Mnogokriterial'noe ranzhirovanie ob"ektov metodom etalonov kak instrument optimal'nogo upravleniia. *Ustoichivoe razvitie gornykh territorii* [Sustainable Development of Mountain Territories], 2010, no 1. pp. 47–55 (in Russian).

4. Keeney R. L., Raiffa H. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1976. (Rus. ed. : Keeney R. L., Raiffa H. Priniatie reshenii pri mnogikh kriteriiakh: predpochteniia i zameshcheniia. Moscow, Radio i sviaz', 1981).

5. Rosen V. V. *Matematicheskie modeli priniatiia reshenii v ekonomike*. [Mathematic decision-making models in economy]. Moscow, Vysshaia shkola, 2002 (in Russian).

SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE LINE WITH REGULAR SINGULARITIES

O. B. Gorbunov[1], C.-T. Shieh[2], V. A. Yurko[1]

[1]Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, GorbunovOB@gfm.ru, yurkova@info.sgu.ru
[2]Tamkang University, Taiwan, ctshieh@mail.tku.edu.tw

Non-selfadjoint second order differential systems on the line having a non-integrable regular singularity are studied. We construct special fundamental systems of solutions with prescribed analytic and asymptotic properties. Asymptotics of the corresponding Stockes multipliers is established.

Key words: differential systems, singularity, spectral analysis.

INTRODUCTION

Consider the Dirac system on the line with a regular singularity:

$$BY'(x) + \Big(Q_0(x) + Q(x)\Big)Y(x) = \lambda Y(x), \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{1}$$

where

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_2(x) & -q_1(x) \end{pmatrix}, \qquad Q_0(x) = \frac{\mu}{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

here μ is a complex number, $q_j(x)$ are complex-valued absolutely continuous functions, and $q_j'(x) \in L(-\infty, +\infty)$. In this short note we construct special fundamental systems of solutions for system (1) with prescribed analytic and asymptotic properties. Behavior of the corresponding Stockes multipliers is established. These fundamental systems of solutions will be used for studying direct and inverse problems of spectral analysis by the contour integral method and by the method of spectral mappings [1, 2].

Differential equations with singularities inside the interval play an important role in various areas of mathematics as well as in applications. Moreover, a wide class of differential equations with turning points can be reduced to equations with singularities. For example, such problems appear in electronics for constructing parameters of heterogeneous electronic lines with desirable technical characteristics [3, 4]. Boundary value problems with discontinuities in an interior point appear in geophysical models for oscillations of the Earth [5]. The case when a singular point lies at the endpoint of the interval was investigated fairly completely for various classes of differential equations in [6–8] and other works. The presence of singularity inside the interval produces essential qualitative modifications in the investigation (see [9]).

Our plan is the following. In the next section we consider a model Dirac operator with the zero potential $Q(x) \equiv 0$ and without the spectral parameter. It is important that this system is studied in the complex x-plane. We construct fundamental matrices for the model system. Using analytic continuations and symmetry we calculate directly the Stockes multipliers for the model system. Then we consider the Dirac system on the real x-line with $Q(x) \equiv 0$ and with the complex spectral parameter, and carry over our constructions to this system. In the last section 3 we construct fundamental matrices for system (1) with necessary analytic and asymptotic properties. Asymptotic properties of the Stockes multipliers for system (1) are also established.