УДК 519.713.1; 519.713.4

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, РЕКУРРЕНТНОЕ И Z-РЕКУРРЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. А. Твердохлебов

Твердохлебов Владимир Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры дискретной математики и информационных технологий, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского; главный научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, tverdokhlebovva@list.ru

Для автоматных отображений изложены метод построения геометрических образов, метод оценки сложности автоматных отображений по их геометрическим образам, метод Z-рекуррентного определения последовательностей. Изложен метод оценки сложности любых конечных последовательностей по числовым показателям рекуррентных и Z-рекуррентных определений последовательности. Числовые показатели рекуррентных и Z-рекуррентных определений последовательностей систематизированы в спектр рекуррентных определений, имеющий 5 уровней числовых показателей. В спектр входят варианты показателей от порядка рекуррентной формы до числовых характеристик различных видов рекуррентных определений последовательностей.

Ключевые слова: автоматные отображения, геометрический образ, рекуррентное определение последовательностей, Z-рекуррентное определение последовательностей, последовательность, оценка сложности последовательности.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-232-241

ВВЕДЕНИЕ

Автоматное отображение относится к классу функций, областями определения и значений которых являются последовательности элементов из конечных множеств. Разработаны различные формы представления автоматных отображений: дискретными детерминированными автоматами с конечными или счетно-бесконечными множествами состояний, конструкциями языка регулярных выражений, структурно-функциональными схемами композиции автоматов и др. В статье продолжается исследование геометрической формы автоматных отображений и использование геометрических образов автоматных отображений в задачах контроля и диагностирования систем, которые представлены в работах [1–20].

Автоматное отображение это бинарное отношение вида $\varphi : X^* \times Y^*$, где X^* и Y^* — множества конечных последовательностей элементов конечных множеств X и Y, удовлетворяющее условиям:

1) бинарное отношение φ является отображением;
2) для любой последовательности $p \in Pr_1\varphi$ выполняется равенство $|p| = |\varphi(p)|$, то есть прообраз и образ по отображению φ имеют одинаковую длину;
3) для любой последовательности $p \in Pr_1\varphi$ любой ее префикс p' принадлежит области определения отображения φ, т.е. $p' \in Pr_1\varphi$;
4) если $p \in Pr_1\varphi$, то для любого префикса p' последовательности р выполняется равенство $|p'| = |\varphi(p')|$.

Автоматные отображения обладают важными для практики и теории свойствами.

1. В классе всех автоматных отображений содержится собственный подкласс отображений, реализуемых конечными детерминированными автоматами, которые используются как математические модели для дискретных технических, биологических, информационных и других систем.
2. Преобразования, определяемые машинами Тьюринга, представимы в форме автоматных отображений. На основании гипотезы о связи машин Тьюринга с алгоритмами это означает, что любой алгоритм может быть представлен как автоматное отображение, реализуемое дискретным детерминированным автоматом со счетно-бесконечным множеством состояний.

3. Любому автоматному отображению вида $\varphi : X^* \to Y^*$ соответствует дискретный детерминированный автомат вида $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$, где S — множество состояний автомата, X и Y — конечные множества входных и выходных сигналов, $s_0 \in S$, $\delta : S \times X \to S$ и $\lambda : S \times X \to Y$ — функции переходов и выходов, в котором входные и выходные последовательности сигналов связаны уравнениями динамики:

$$s(t+1) = \delta(s(t), x(t)), \qquad y(t) = \lambda(s(t), x(t)),$$

где $t \in N^+$.

Для случая конечного множества состояний автомата разработаны различные классы автоматов: автоматы типов Мили и Мура, автоматы без выходов, автономные автоматы и другие. При счетно бесконечном множестве состояний S к автомату А может быть преобразована машина Тьюринга. Машина Тьюринга может быть представлена как дискретный детерминированный автомат со счетно бесконечным множеством состояний. Дискретные автоматные отображения не принадлежат к числовым структурам и для них не используются мощные математические идеализации актуальной бесконечности, непрерывности, бесконечно малых величин, предельного перехода, суммирования бесконечных рядов, абстрактных пространств и т. п.

Использование непрерывной числовой математики в постановках и решениях задач теории автоматов основывается на связи дискретных символьных структур (автоматных отображений) с числовыми структурами. Основу для разработки таких связей составляют взаимно однозначные отображения множеств дискретных объектов в множества числовых структур (множества чисел, точек, интервалов) и интерпретация точек геометрических кривых линий как моделей связи прообразов и образов автоматных отображений.

В статье рассматривается представление автоматных отображений для дискретных детерминированных автоматов с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний геометрическими образами в форме точек на аналитически заданных кривых. Для этого определяются линейные порядки на множествах входных и выходных последовательностей, приводятся формулы для вычисления номеров входных последовательностей, показывается, что порядок расположения на осях системы координат номеров входных и выходных последовательностей может быть произвольным с сохранением отношения неравенства между геометрическими образами автоматных отображений. Приводится метод построения дискретного автомата по выбранным ориентации геометрической кривой и точкам, выбранным на ней для представления автоматного отображения. Изложен метод построения автомата по геометрическому образу, основывающийся на покрытии геометрической кривой сеткой с заданными размерами клеток сетки. Кроме того, приведены геометрические формы для классификации наборов траекторий изменения состояний автомата и классификации частей наборов таких траекторий.

Одними из основных результатов (изложенных в статье) являются: метод оценки сложности последовательностей на основе рекуррентного из Z-рекуррентного определения последовательностей; метод оценки сложности геометрических кривых по выбранным на них последовательностям точек и на числовых показателях рекуррентных определений последовательностей таких точек. Метод определения структуры причинно-следственных связей событий, в котором используются рекуррентное из Z-рекуррентное определения последовательностей. Методы применимы для оценки сложности автоматных отображений и последовательностей операторов в схемах Янова для алгоритмов.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ОБРАЗ АВТОМАТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Любое автоматное отображение φ вида $\varphi : X^* \to Y^*$ может быть определено на основе функционирования инициального дискретного детерминированного автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ с конечным или счетно бесконечным множеством состояний S:

$$\varphi = \bigcup_{p \in Pr_1 \varphi} \{(p, \lambda(s_0, p)\}. \tag{1}$$

Задание автоматного отображения φ формулой (1) требует определения функций δ и λ переходов и выходов автомата, что существенно ограничивает эффективность исследования автоматных отображений как функций. Следующая теорема вводит независимые от δ и λ средства задания автоматных отображений.

Теорема 1. *Пусть X и Y — конечные непустые множества и ψ — отображение вида*

$$\psi : X^* \to Y, \tag{2}$$

в котором для любого $p \in Pr_1\psi$ любой префикс последовательности p принадлежит множеству $Pr_1\psi$, где $Pr_1\psi$ — область определения отображения ψ.

Бинарное отношение $\varphi \subset X^* \times Y^*$, для которого $Pr_1\varphi = Pr_1\psi$ и для любой последовательности $p \in Pr_1\varphi$, где $p = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$ и $n \in N^+$, выполняются условие $|\varphi(p)| = 1$ и равенство

$$\varphi = \psi(x_{i_1})\psi(x_{i_1}x_{i_2})\ldots\psi(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}), \tag{3}$$

является автоматным отображением.

Доказательство. Условие 1 в определении автоматного отображения, выполняется для бинарного отношения φ на основании равенства $|\varphi(p)| = 1$ для любой последовательности $p \in Pr_1\varphi$. Формула (3) по построению определяет для каждой пары $(p, \varphi(p)) \in \varphi$ равенство $|p| = |\varphi(p)|$, т. е. выполнение условия 2. Свойство 3 автоматного отображения выполняется для бинарного отношения φ на основании предположения о множестве $Pr_1\psi$ и также предполагаемого равенства $Pr_1\varphi = Pr_1\psi$. По построению правой части равенства (3) и возможности рассматривать это равенство для любого (непустого) префикса последовательности получаем, что бинарное отношение φ удовлетворяет условию 4 автоматного отображения. □

Несмотря на простоту теоремы 1, она имеет принципиально важное значение.

Во-первых, на основании теоремы 1 любое автоматное отображение φ вида $\varphi : X^* \to Y^*$, в котором посимвольная связь прообраза и образа определяется при соблюдении условий автоматности 1–4 заменяется отображением вида (2) с расшифровкой вида (3). Существенным является то, что на отображение (2) наложено только одно условие: $Pr_1\psi$ с каждой принадлежащей $Pr_1\psi$ последовательностью в нее включаются все префиксы последовательности. Фактически, любое отображение вида (2), дополненное формулой (3), представляет автоматное отображение.

Во-вторых, представление отображения (2) в геометрической форме будет содержать размещение множеств X^* на оси абсцисс (в неограниченном или в конечном отрезке оси) и размещение множества Y на некотором конечном отрезке оси ординат. Это удобно для визуального представления геометрического образа.

Задача удобного и эффективного размещения множества последовательностей X^* и множества Y существенно сокращается, если учитывать ориентацию геометрических образов на решение конкретной задачи — распознавание автоматов в конечном семействе автоматов средствами экспериментов. В качестве экспериментов в дальнейшем будет рассматриваться простой безусловный эксперимент распознавания автомата в заданном конечном семействе автоматов при условии, что автоматы определены геометрическими образами. В этом случае принципиальная возможность распознавания автоматов, когда автоматные отображения вида (2) уже преобразованы в числовые структуры, не зависит от способов взаимно однозначного размещения элементов множеств X^* и Y на осях прямоугольной декартовой системы координат. Этот факт представим следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть X и Y — конечные непустые множества, $\alpha = \{\psi_i\}_{i \in I}$ — семейство отображений, где $\psi_i : U \to Y$, $U \subset X^*$, для любых $i, j \in I$ $Pr_1\psi_i = Pr_1\psi_j = U$ и для каждого $p \in U$ все префиксы p принадлежат множеству U. Тогда для любых взаимно однозначных отображений «в» $h_X : X^* \xrightarrow{в} N^+$ и $h_Y : Y \xrightarrow{в} \{i_1, i_2, \ldots, i_{|Y|}\}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_{|Y|}$ имеет место*

$$\psi_i \neq \psi_j \to \exists\, p \in U : h_Y(\psi_i(p)) \neq h_Y(\psi_j(p)). \tag{4}$$

Доказательство. Утверждение теоремы 2 следует из того, что при выполнении неравенства $\psi_i \neq \psi_j$ для некоторого $p \in U$ имеет место $(p, \psi_i(p)) \neq (p, \psi_j(p))$. Последнее неравенство возможно только тогда, когда при взаимно однозначном отображении h_Y выполняется неравенство $h_Y(\psi_i(p)) \neq h_Y(\psi_j(p))$. □

В результате проведенных исследований удалось найти такой линейный порядок на множестве X^*, при котором достаточно просто решаются следующие задачи: задача определения номера $r(p)$ для $p \in U$ и задача определения для рассматриваемого $p \in U$ номера $r(p)$ по линейному порядку. Определим такой линейный порядок, обозначив $\prec$ и при следующих правилах.

Правило 1. На множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ определяется линейный порядок $x_1 \prec x_2 \prec \prec \ldots \prec x_k$. Линейный порядок $\prec$ распространяется на множество X^* по правилам 2 и 3.

Правило 2. Для любых $p, p' \in X^*$ $|p| < |p'| \to p \prec p'$ и пустая последовательность $e \prec p$.

Правило 3. Для любых $p, p' \in X^*$, для которых $p = p'$, их отношение по линейному порядку повторяет отношение их наименьших неравных префиксов.

Как отмечалось, введенный линейный порядок обладает свойствами, представленными теоремами 2 и 3.

Теорема 3. *Пусть на множестве X^*, где $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, правилами 1–3 определен линейный порядок $\prec$, тогда для любой последовательности $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$, где $n \in N^+$ и $n \geqslant 2$, номер $r(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n})$ по линейному порядку $\prec$ определяется формулой*

$$r(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}) = \sum_{j=1}^{n-1} k^j + r(x_{i_1} - 1) \times k^{n-1} + r(r_k(x_{i_2}) r_k(x_{i_3}) \ldots r_k(x_{i_n})), \qquad (5)$$

где $r(x)$ — число x в десятичной системе счисления, а $r_k(x)$ — число x в k-ичной системе счисления, соответствующее номеру элемента по линейному порядку $\prec$.

Доказательство. Число $r(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n})$ рассмотрим как сумму трех слагаемых. Первое слагаемое определяет число последовательностей размерностей от 1 до $n-1$. Последовательность $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ входит в множество последовательностей длины n, для которых x_{i_1} является префиксом. Каждое множество последовательностей длины n с фиксированным префиксом содержит k^{n-1} последовательностей. Число таких множеств, предшествующих множеству последовательностей с префиксом x_{i_1}, равно $r(x_{i_1} - 1)$. Это определяет вхождение в сумму второго слагаемого. Для определения третьего слагаемого воспользуемся следующими свойством представления чисел в разных системах счисления. На основании того, что $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, элементы множества X в соответствии с линейным порядком $\prec$ могут быть перенумерованы так, что их номера соответствуют цифрам k-ичной системы счисления. Тогда число $r_k(x_{i_2}) r_k(x_{i_3}) \ldots r_k(x_{i_n})$ будет номером по порядку $\prec$, представленным в k-ичной системе счисления, во множестве всех последовательностей длины n с префиксом x_{i_1}. Включение числа $r(r_k(x_{i_2}) r_k(x_{i_3}) \ldots r_k(x_{i_n}))$ в правую часть равенства (5) завершает определение номера $r(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n})$. □

Формула (5), указанная в теореме 3, позволяет определять номер любой последовательности в линейно упорядоченном множестве $(X^*, \prec)$. В силу единственности представления числа $r(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n})$ правой формулой в равенстве 5 на основании теоремы 3 по любому целому положительному числу, рассматриваемому как номер последовательности, однозначно определяется сама последовательность.

Для построения геометрического образа автоматного отображения разработаны все требующиеся структуры: специальная форма автоматного отображения, содержащая отображение $\psi : X^* \to Y$, и использование отображения ψ на основании формулы (5); линейный порядок $\prec$, позволяющий эффективно вычислять связь последовательности с ее номером по линейному порядку $\prec$ и обратную связь номера с последовательностью; взаимно однозначные отображения «в» $h_X : X^* \xrightarrow{\text{в}} N^+$ и $h_Y : Y \xrightarrow{\text{в}} \{i_1, i_2, \ldots, i_{|Y|}\}$ для размещения элементов множеств X^* и Y на осях прямоугольной декартовой системы координат. Эти средства позволяют представлять автоматные отображения точками в прямоугольной декартовой системе координат.

Выбор взаимно однозначных отображений h_X и h_Y не ограничен и, следовательно, предоставляет возможности для выбора любого расположения точек геометрического образа на аналитически заданных геометрических кривых линиях.

2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ АВТОМАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть $W \subset X^*$ и $H(W)$ — множество всех последовательностей, являющихся элементами множества W или префиксами последовательностей из W. Любое отображение g вида $g : H(W) \to Y$ с использованием формулы 3 определяет автоматное отображение φ_g вида $\varphi_g : X^* \to Y^*$. Геометрический образ автоматного отображения φ_g однозначно определяется тройкой $\langle g, h_X, h_Y \rangle$, где $h_X : X^* \xrightarrow{\text{в}} R$ и $h_Y : Y \xrightarrow{\text{в}} \{1, 2, \ldots, |Y|\}$ — взаимно однозначные отображения «в». Введенному линейному порядку $\prec$ на множестве X^* соответствует взаимно однозначное отображение $h_x^{'}$ вида $h_x^{'} : X^* \xrightarrow{\text{в}} N^+$, что позволяет представлять h_x суперпозицией $h_x^{'}$ и взаимно однозначного отображения $h^{''}$ вида $h^{''} : N^+ \xrightarrow{\text{в}} R$.

В методе построения инициального дискретного детерминированного автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний S основными этапами являются:

- выбор аналитически заданной геометрической кривой линии $y = f(x)$ на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат;
- выбор направления обхода рассматриваемой геометрической кривой линии;
- выбор точек на кривой;
- выбор конечной последовательности полуинтервалов $\triangle_{y_1}, \triangle_{y_2}, \ldots, \triangle_{y_l}$, покрывающих некоторый полуинтервал $\triangle_y$ на оси ординат.

Пусть аналитически заданная на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат геометрическая кривая $y = f(x)$ рассматривается на интервале (α, β) оси абсцисс и

$$a = \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x), \qquad b = \min_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x).$$

На оси абсцисс выбираем полуинтервал $[a, b)$ с разбиением на полуинтервалы $[a, c_1)$, $[c_1, c_2)$, $\ldots$, $[c_{l-1}, b)$, обозначая их $\triangle_{y_1}$, $\triangle_{y_2}$, $\ldots$, $\triangle_{y_l}$. Геометрический образ определяется для начального фрагмента автоматного отображения, содержащего выбранное множество из k первых пар автоматного отображения. Для этого в соответствии с линейным порядком $\prec$ выбирается множество U последовательностей от первой до k-й $U = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Область определения отображения h_X ограничивается до множества U и для представления элементов множества U на оси абсцисс используются точки $h_X(p_1)$, $h_X(p_2)$, $\ldots$, $h_X(p_k)$. Для заданной кривой $y = f(x)$ определяются последовательность точек $f(h_X(p_1))$, $f(h_X(p_2))$, $\ldots$, $f(h_X(p_k))$. Последовательность точек $(h_X(p_1), f(h_X(p_1)))$, $(h_X(p_2), f(h_X(p_2)))$, $\ldots$, $(h_X(p_k), f(h_X(p_k)))$ является геометрическим образом для k первых пар автоматного отображения φ_g. Для того чтобы последовательность $(h_X(p_1), f(h_X(p_1)))$, $(h_X(p_2), f(h_X(p_2)))$, $\ldots$, $(h_X(p_k), f(h_X(p_k)))$ рассматривать как часть геометрического образа автоматного отображения, каждой паре $(p_i, f(h_X(p_i)))$, $1 \leqslant i \leqslant k$, геометрического образа с числовыми координатами сопоставляется пара (p_i, y_j), где $f(h_X(p_i)) \in \triangle_{y_j}$ автоматного отображения. Таким образом, начальный фрагмент геометрического образа автоматного отображения построен. Для построения геометрического образа полного автоматного отображения требуется определить задание взаимно однозначного отображения «в» на области определения рассматриваемой геометрической кривой линии $y = f(x)$.

3. РЕКУРРЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

При построении, анализе свойств и распознавании последовательностей существенным является рассмотрение взаиморасположения элементов. Для решения задачи определения свойств последовательностей, базирующихся на анализе взаиморасположения элементов, разработаны два метода: метод получения числовых показателей для вариантов рекуррентных определений последовательностей и метод Z-рекуррентного определения показателей последовательностей на основе использования бинарного отношения.

Спектр числовых показателей рекуррентного определения последовательностей. Метод получения числовых показателей для вариантов рекуррентных определений последовательностей включает построение пяти уровней Ω_0, Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 числовых показателей, в которых числовые показатели следующего уровня Ω_{i+1} углубляют характеристику взаиморасположения элементов в последовательности по отношению к предшествующему уровню Ω_i.

Для последовательности $\xi = (u(1), u(2), \ldots, u(t), \ldots)$ элементов из конечного множества U используется рекуррентная форма $F(u(t-m), u(t-m+1), \ldots, u(t-1)) = u(t)$.

Определение последовательности рекуррентной формой F (или последовательности рекуррентных форм) реализуется на основе совмещения переменных рекуррентной формы с элементами последовательности ξ по правилу: для любого $t, t > m$ (или t принадлежит рассматриваемому интервалу целых положительных чисел)

$$F(u(t-m), u(t-m+1), \ldots, u(t-1)) = u(t). \tag{6}$$

Рекуррентная форма (6) для случая, когда элементы последовательности ξ представлены с использованием индексов элементов, принимает вид

$$F(z_{t+1}, z_{t+2}, \ldots, z_{t+m}) = z_{t+m+1}.$$

По предположению независимые и зависимые переменные рекуррентных форм определены на конечном множестве U, т. е. рекуррентной форме F соответствует конечное отображение вида $F : U^m \to U$. Это позволяет эффективно задавать рекуррентные формы, конечные семейства рекуррентных форм и правила их применения при определении последовательностей.

Спектр $\Omega(\xi)$ для последовательности ξ имеет 5 уровней: $\Omega(\xi) = (\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi)), \Omega_2(\xi)), \Omega_3(\xi)), \Omega_4(\xi)))$. В спектре числовыми значениями представлены порядки рекуррентных форм, длины отрезков последовательности, определяемые отдельными рекуррентными формами и количества смен рекуррентных форм.

По определению $\Omega_0(\xi) = m_0(\xi)$, где $m_0(\xi)$ — наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей всю последовательность ξ. На уровне $\Omega_1(\xi)$ спектра $\Omega(\xi))$ расположено m_0 чисел ($m_0 \in N^+$), определяющих для порядков от 1 до m_0 размеры наибольших начальных отрезков последовательности ξ, определяемых используемой рекуррентной формой.

Уровень $\Omega_2(\xi))$ содержит m_0 чисел, показывающих, сколько раз для рассматриваемого порядка рекуррентных форм потребовалось заменять рекуррентные формы при определении последовательности ξ. На уровне $\Omega_3(\xi))$ каждое число смен рекуррентных форм, показанное на уровне $\Omega_2(\xi))$, заменено последовательностью чисел, представляющих длины отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами.

По построению спектр динамических показателей определения последовательности состоит из числовых значений:

- наименьшего порядка $m_0(\xi)$ рекуррентной формы, определяющей всю последовательность ξ;
- набор наименьших длин $d^1(\xi), d^2(\xi), \ldots, d^{m_0}(\xi)$ префиксов последовательности ξ, задаваемых рекуррентными формами соответственно порядков $1, 2, \ldots, m_0$;
- набор чисел $r^1(\xi), r^2(\xi), \ldots, r^{m_0}(\xi)$ смен рекуррентных форм порядков $1, 2, \ldots, m_0$, задающих всю последовательность;
- набор наборов длин

$$d^1_1(\xi), d^1_2(\xi), \ldots, d^1_{r^1(\xi)+1}(\xi) d^2_1(\xi), d^2_2(\xi), \ldots, d^2_{r^2(\xi)+1}(\xi) \ldots d^{m_0}_1(\xi) = |\xi| \qquad (7)$$

  отрезков последовательности ξ , где $d^m_j(\xi)$ — длина j-го отрезка в определении рекуррентной формой порядка m последовательности ξ.

Используя введенные обозначения, определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:

- $\Omega_0(\bar\xi) = \langle m_0(\bar\xi)\rangle$;
- $\Omega_1(\bar\xi) = \langle d_1(\bar\xi), d_2(\bar\xi), \ldots, d_\alpha(\bar\xi)\rangle$;
- $\Omega_2(\bar\xi) = \langle r_1(\bar\xi), r_2(\bar\xi), \ldots, r_\alpha(\bar\xi)\rangle$;
- $\Omega_3(\bar\xi) = \langle \Omega^1_3(\bar\xi), \Omega^2_3(\bar\xi), \ldots, \Omega^\alpha_3(\bar\xi)\rangle$, где $\alpha = m_0(\bar\xi)$ и $\Omega^j_3(\bar\xi) = \langle d^j_1(\bar\xi), d^j_2(\bar\xi), \ldots, d^j_{n_j}(\bar\xi)\rangle$ (n_j — номер последнего отрезка в определении последовательности $\bar\xi$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка j);
- $\Omega_4(\bar\xi) = \Theta(\Omega_3(\bar\xi))$, где Θ — оператор замены в $\Omega_3(\bar\xi)$ величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

Четвёртый уровень $\Omega_4(\bar\xi)$ спектра $\Omega(\bar\xi)$ к характеристике последовательности $\bar\xi$ по количеству изменений правил, определяющих взаиморасположение элементов в последовательности, и величинам областей действия правил, представленной на уровнях $\Omega_1(\bar\xi)$–$\Omega_3(\bar\xi)$, добавляет оценки сложности правил и величины области использования правил. В достаточно общем случае можно вводить веса правил (рекуррентных форм) и веса реализации правил, используемых при определении отрезка. Например, для каждого шага применения рекуррентной формы $F(z^0_1, z^0_2, \ldots, z^0_m) = z^0_{m+1}$, т. е. для набора $(z^0_1, z^0_2, \ldots, z^0_m)$ задается вес $\Theta(z^0_1, z^0_2, \ldots, z^0_m)$ в числовой форме, и сумма весов всех шагов применения рекуррентной формы для последовательности полагается весом последовательности.

Первые четыре уровня $\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi)$ и $\Omega_3(\xi)$ спектра $\Omega(\xi)$ характеризуют алгоритмические свойства определения последовательности ξ и её строение.

Пример 1 (числовые показатели определены А. С. Епифановым). Пусть $\xi_n(\pi)$ и $\xi_n(\epsilon)$ — последовательности длины n цифр, представляющие начальные отрезки определения иррациональных чисел π и ϵ. Для величины $n = 1000000$ выполняется отношение $\Omega_0(\xi_n(\pi)) \leqslant \Omega_0(\xi_n(\epsilon))$.

Пример 2 (числовые показатели определены А. С. Епифановым). Пусть $\xi_n(\sqrt{2})$ и $\xi_n(\ln 2)$ — последовательности длины n цифр, представляющие начальные отрезки определения иррациональных чисел $\sqrt{2}$ и $\ln 2$. Для $n \in \{50, 1000, 5000, 50000, 150000, 200000, 250000, 300000, 350000, 400000, 450000, 500000, 550000, 850000, 900000\}$ выполняется равенство $\Omega_0(\xi_n(\sqrt{2})) = \Omega_0(\xi_n(\ln 2))$.

Это означает, что функциональная зависимость элемента (цифры) от предшествующих элементов в начальных отрезках длины n последовательностей, определяющих числа $\sqrt{2}$ и $\ln 2$, представлена одним и тем же количеством предшествующих элементов.

4. Z-РЕКУРРЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассмотренные в п. 3 рекуррентные определения последовательностей и представление определений числовыми показателями на уровнях Ω_0, Ω_1, …, Ω_4 позволяют дать тонкие характеристики формальных взаимозависимостей между знаками в последовательностях. Содержательная (и формальная) интерпретация зависимостей построена в форме функциональной зависимости. Для использования рекуррентных определений последовательностей в приложениях введем варианты новых Z-рекуррентных определений последовательностей. Для этого в «шаблон» функциональной зависимости элементов последовательности будем использовать не в форме

$$z_{t+1}, \ldots, z_{t+m} \to z_{t+m+1}, \tag{8}$$

а в виде следующего бинарного отношения:

$$(z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_{k_1}}) \to \begin{cases} (z^1_{j_1}, z^1_{j_2}, \ldots, z^1_{j_{k_2}}), \\ (z^2_{j_1}, z^2_{j_2}, \ldots, z^2_{j_{k_2}}), \\ \ldots \\ (z^h_{j_1}, z^h_{j_2}, \ldots, z^h_{j_{k_2}}). \end{cases} \tag{9}$$

Форма Z-рекуррентного определения последовательности реализуется применением любой пары последовательностей из следующего набора пар:

$$\begin{gathered} ((z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_{k_1}}), (z^1_{j_1}, z^1_{j_2}, \ldots, z^1_{j_{k_2}})), \\ ((z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_{k_1}}), (z^2_{j_1}, z^2_{j_2}, \ldots, z^2_{j_{k_2}})), \\ \ldots \\ ((z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_{k_1}}), (z^h_{j_1}, z^h_{j_2}, \ldots, z^h_{j_{k_2}})). \end{gathered}$$

Z-рекуррентное определение последовательностей предоставляет более мощные характеристики взаиморасположения элементов в последовательности, чем рекуррентное определение последовательностей. Такие числовые характеристики позволяют использовать их при решении ряда вопросов: определение сложности взаиморасположения элементов в последовательности, распознавание на основе сравнения по сложности последовательностей выходных сигналов, построение классификации последовательностей по показателям сложности и др. Будем предполагать, что для формулы Z-рекуррентного определения последовательностей выполняются следующее отношение: $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k_1}$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_{k_2}$, $k_1 < k_2$, $1 < k_2$ и $\{i_1, i_2, \ldots, i_{k_1}\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_{k_2}\} = \varnothing$.

Будем полагать, что Z-рекуррентное определение последовательности с заданным бинарным отношением $\varphi^W_z \in W^{k_1} \times W^{k_2}$ выполняется для последовательности $\xi = \langle a_1, a_2, \ldots, a_c\rangle$, если для любых t от 0 до $C - k_2$ имеет место $((a_{t+i_1}, a_{t+i_2}, \ldots, a_{t+i_{k_1}}),\ (a_{t+j_1}, a_{t+j_2}, \ldots, a_{t+j_{k_2}})) \in \varphi^W_z$.

5. Z-РЕКУРРЕНТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОБЫТИЙ

Употребляемыми схемами для представления причинно-следственных связей являются следующие схемы: <причина> $\to$ <следствие> и <группа причины: активная причина и причина-условие> $\to$ $\to$ <группа следствие: следствие 1 и следствие 2 (транслируемое условие)>. Если элементы последовательности $\xi = (u(1), u(2), \ldots, u(t), \ldots)$ интерпретировать как события, находящиеся в причинно-следственной зависимости, то уточнение структуры причинно следственных зависимостей можно определить на основе рекуррентного определения и Z-рекуррентного определения последовательности ξ. Форма (6) рекуррентного определения выражает функциональную зависимость с причинно-следственной интерпретацией событий от некоторых непосредственно предшествующих по времени или линейному порядку событий. Z-рекуррентное определение последовательностей является более мощным средством и имеет форму покрытия последовательности с преобразованием промежуточной формы последовательностей. Элемент $z_{t+\nu}$ Z-рекуррентно определяется в последовательности ξ как элемент единого набора, соответствующего заданному бинарному отношению вида

$$(z_{t+i_1}, z_{t+i_2}, \ldots, z_{t+i_{k_1}}), \qquad (z^v_{t+j_1}, z^v_{t+j_2}, \ldots, z^v_{t+j_{k_2}}).$$

Покрытие последовательности ξ при Z-рекуррентном определении последовательностей производится слева направо от начала последовательности ξ. Z-рекуррентная форма определяет последовательность ξ, если вся последовательность ξ допускает покрытие наборами вида $(z^v_{t+j_1}, z^v_{t+j_2}, \ldots, z^v_{t+j_{k_2}})$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами статьи являются: метод оценки сложности последовательностей на основе рекуррентного и Z-рекуррентного определений последовательностей; метод оценки сложности геометрических кривых по выбранным на них последовательностям точек с использованием числовых показателей рекуррентных определений последовательностей таких точек; метод построения геометрических образов автоматного отображения и оценка его сложности по рекуррентному определению геометрического образа; новое Z-рекуррентное определение последовательности. Разработан метод определения структуры причинно-следственных связей событий, в котором используются рекуррентное и Z-рекуррентное определения последовательностей. Методы применимы для оценки сложности автоматных отображений, произвольных последовательностей, процессов событий.

Библиографический список

1. *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы законов функционирования автоматов. Саратов : Научная книга, 2008. 183 с.
2. *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы конечных детерминированных автоматов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып. 1. С. 141–153.
3. *Твердохлебов В. А.* Геометрические модели и методы в техническом диагностировании // Информационно-управляющие системы на ж.-д. транспорте. 1996. № 3/4. С. 58.
4. *Твердохлебов В. А.* Распознавание автоматов на основе геометрической интерпретации // Проблемы теоретической кибернетики : тез. докл. XI Междунар. конф. М. : Изд-во РГГУ, 1996. С. 85–93.
5. *Твердохлебов В. А.* Дискретные словарные геометрии для анализа и синтеза математических автоматов // Докл. Акад. воен. наук. Сер. Аналитическая механика. Аналитическая теория автоматического управления. 1999. № 1. С. 100–112.
6. *Tverdokhlebov V. A.* The general features of geometrical images of finite state machines // Proc. East-West Design & Test Workshop (EWDTW'04). Kharkov : National University of Radioelectronics, 2004. P. 243–246.
7. *Твердохлебов В. А.* Дискретные системы и геометрические образы их функционирования // Автоматизация проектирования дискретных систем : материалы Пятой междунар. конф. Минск : Объединен. ин-т проблем информатики НАН Беларуси, 2004. Т. 1. С. 217–226.
8. *Твердохлебов В. А.* Рекуррентность геометрических образов // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. 2004. № 4/5 (48/49). С. 88–90.
9. *Твердохлебов В. А.* Конечные автоматы и анализ их геометрических образов // Проблемы теоретической кибернетики : тез. докл. XIV Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рожд. С. В. Яблонского. М. : Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 2005. С. 153.
10. *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы поведения дискретных детерминированных систем // Радіоелектронні комп'ютерні сисеми. 2006. № 5(17). С. 161–165.
11. *Твердохлебов В. А.* Техническое диагностирование на основе геометрических структур законов функционирования // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2007. № 7. С. 158–167.
12. *Твердохлебов В. А.* Спектры для геометрических образов автоматов и их связь с последовательностями и фигурами // Дискретная математика и ее приложения : материалы IX Междунар. семинара. М., 2007. С. 409–412.
13. *Твердохлебов В. А.* Интерполяция геометрических образов автоматов в техническом диагностировании // Докл. Акад. воен. наук. 2007. № 1(25). С. 55–62.
14. *Твердохлебов В. А.* Геометрические образы законов функционирования автоматов и анализ

свойств автоматов // Дискретные модели в теории управляющих систем : тр. восьмой междунар. конф. М. : Издат. отдел фак. ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. С. 301–305.

15. *Tverdokhlebov V. A.* Geometrical models of automatons mappings and automatons // Вестн. Киев. нац. ун-та им. Т. Шевченко. Сер. физ.-матем. науки. 2011. Вып. 1. С. 202–207.
16. *Tverdokhlebov V. A.* Geometrical approach to technical diagnosing of automatons // Proc. IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2011). Kharkov : National University of Radioelectronics, 2011. P. 240–243.
17. *Твердохлебов В. А.* Геометрические модели и методы распознавания автоматов // Интеллектуальные системы и компьютерные науки : материалы X Междунар. конф. М. : Изд-во МГУ, 2011. С.168–171.
18. *Твердохлебов В. А.* Классификация геометрических образов автоматных отображений // Докл. Акад. воен. наук. 2012. № 5 (54). С. 97–105.
19. *Твердохлебов В. А.* Основные теоремы для построения геометрических образов автоматных отображений // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. 2013. № 5(64). С. 379–384.
20. *Твердохлебов В. А.* Геометрические модели и методы распознавания автоматов // Интеллектуальные системы. 2013. Т. 17, вып. 1–4. С. 187–191.

The Geometric Form of Automaton Mappings, Recurrent and Z-recurrent Definition of Sequences

V. A. Tverdokhlebov

Vladimir A. Tverdokhlebov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia; Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 24, Rabochaya st., 410028, Saratov, Russia, tverdokhlebovva@list.ru

For automaton mappings we present a method to construct geometric images, a method for complexity estimate by geometric forms, a method of Z-recurrent definition of sequences. A method for complexity estimate for finite sequences by recurrent and Z-recurrent numerical indicators is proposed. Numerical indicators of recurrent and Z-recurrent definitions of sequences are systematized into the spectrum of recurrent definitions with 5 levels of numerical indicators. The spectrum includes the order of a recurrent form, the numerical characteristics of various types of recurrent sequences, etc.

Key words: automaton mappings, geometric images, recurrent sequence, Z-recurrent sequences, sequences, complexity estimate of a sequence.

References

1. Tverdokhlebov V. A. *Geometricheskie obrazy zakonov funktsionirovaniia avtomatov* [Geometric images of machines functioning laws]. Saratov, Nauchnaia kniga, 2008, 183 p. (in Russian).
2. Tverdokhlebov V. A. Geometricheskie obrazy konechnykh determinirovannykh avtomatov [The geometrical images of finite deterministic automata]. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 141–153. (in Russian).
3. Tverdokhlebov V. A. Geometricheskie modeli i metody v tekhnicheskom diagnostirovanii [Geometric patterns and techniques in technical diagnosis]. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy na zh.-d. transporte*, 1996, no. 3/4, pp. 58 (in Russian).
4. Tverdokhlebov V. A. Raspoznavanie avtomatov na osnove geometricheskoi interpretatsii [Recognition of machines based on the geometric interpretation.]. *Problemy teoreticheskoi kibernetiki : tez. dokl. XI Mezhdunar. konf.* [Problems of Theoretical Cybernetics : mes. rep. XI Intern. Conf.], Moscow, Izd-vo RGGU, 1996, pp. 85–93 (in Russian).
5. Tverdokhlebov V. A. Diskretnye slovarnye geometrii dlia analiza i sinteza matematicheskikh avtomatov [Discrete geometry vocabulary for the analysis and synthesis of mathematical machines]. *Dokl. Akad. voen. nauk. Ser. Analiticheskaia mekhanika. Analiticheskaia teoriia avtomaticheskogo upravleniia* [Dokl. Acad. Mil. Sciences. Ser. Analytical Mechanics. Analytical theory of automatic control], 1999, no. 1, pp. 100–112 (in Russian).
6. Tverdokhlebov V. A. The general features of geometrical images of finite state machines. *Proc. East-West Design & Test Workshop (EWDTW'04)*, Kharkov, National University of Radioelectronics, 2004, pp. 243–246.
7. Tverdokhlebov V. A. Diskretnye sistemy i geometricheskie obrazy ikh funktsionirovaniia [Discrete systems and geometric images of their functioning]. *Automatizatsiia proektirovaniia diskretnykh sistem : materialy Piatoi mezhdunar. konf.* [Computer-aided design of discrete systems : Proc. of the Fifth Intern. Conf.], Minsk, 2004, vol. 1, pp. 217–226 (in Russian).
8. Tverdokhlebov V. A. Rekurrentnost' geometricheskikh obrazov [The recurrent geometric images]. *Informatsiino-keruiuchi cistemi na zaliznichnomu transporti*, 2004, no. 4/5 (48/49), pp. 88–90 (in Russian).

9. Tverdokhlebov V. A. Konechnye avtomaty i analiz ikh geometricheskikh obrazov [Finite state machines and the analysis of their geometrical images]. *Problemy teoreticheskoi kibernetiki : tez. dokl. XIV Mezhdunar. konf., posviashch. 80-letiiu so dnia rozhd, P. V. Yablonskogo* [Problems of Theoretical Cybernetics : mes. rep. XIV Intern. conf., is dedicated 80th anniversary of birth. P. V. Yablonsky], Moscow, Moscow Univ. Press, 2005, pp. 153 (in Russian).
10. Tverdokhlebov V. A. Geometrical images of behaviour of the discrete determined systems. *Radioelectronic and computer systems*, 2006, no. 5(17), pp. 161–165 (in Russian).
11. Tverdokhlebov V. A. Technical diagnosing on the basis of geometrical structures of laws of functioning. *Radioelectronic and computer systems*, 2007, no. 7, pp. 158–167 (in Russian).
12. Tverdokhlebov V. A. Spektry dlia geometricheskikh obrazov avtomatov i ikh sviaz' s posledovatel'nostiami i figurami [Spectra for geometric images of machines and their connection with sequences and figures]. *Diskretnaia matematika i ee prilozheniia : materialy IX Mezhdunar. seminara* [Discrete mathematics and its applications : Materials IX Intern. workshop], Moscow, 2007, pp. 409–412 (in Russian).
13. Tverdokhlebov V. A. Interpoliatsiia geometricheskikh obrazov avtomatov v tekhnicheskom diagnostirovanii [Interpolation geometric images in automatic technical diagnosis]. *Dokl. Akad. voen. nauk* [Dokl. Acad. Mil. Sciences], 2007, no. 1(25), pp. 55–62 (in Russian).
14. Tverdokhlebov V. A. Geometricheskie obrazy zakonov funktsionirovaniia avtomatov i analiz svoistv avtomatov [Geometric images of machines functioning of laws and analysis of the properties of automata]. *Diskretnye modeli v teorii upravliaiushchikh sistem : tr. vos'moi mezhdunar. konf.* [Discrete models in the theory of control systems : mp. Eighth Intern. Conf.], Moscow, Moscow Univ. Press; MAKS Press, 2009, pp. 301–305 (in Russian).
15. Tverdokhlebov V. A. Geometrical models of automatons mappings and automatons. *Vestn. Kiev. nats. un-ta im. T. Shevchenko. Ser. fiz.-matem. nauki*, 2011, iss. 1, pp. 202–207 (in Russian).
16. Tverdokhlebov V. A. Geometrical approach to technical diagnosing of automatons. *Proc. IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2011)*, Kharkov, National Univ. of Radioelectronics, 2011, pp. 240–243.
17. Tverdokhlebov V. A. Geometricheskie modeli i metody raspoznavaniia avtomatov [Geometric patterns and automatic recognition techniques]. *Intellektual'nye sistemy i komp'iuternye nauki : materialy Kh Mezhdunar. konf.* [Intelligent Systems and Computer Science : Materials X Intern. Conf.], Moscow, Moscow Univ. Press, 2011, pp. 168–171 (in Russian).
18. Tverdokhlebov V. A. Klassifikatsiia geometricheskikh obrazov avtomatnykh otobrazhenii [Classification of geometric images automaton mappings]. *Dokl. Akad. voen. nauk* [Dokl. Acad. Mil. Sciences], 2012, no. 5 (54), pp. 97–105 (in Russian).
19. Tverdokhlebov V. A. Basic theorems for construction of geometric image of automatons mappiings. *Radioelectronic and computer systems*, 2013, no. 5(64), pp. 379–384 (in Russian).
20. Tverdokhlebov V. A. Geometrical models and methods of recognition of automata. *Intelligent systems*, 2013, vol. 17, iss. 1–4, pp. 187–191 (in Russian).