



# ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

## МИНИМАЛЬНЫЕ ВЕРШИННЫЕ 1-РАСШИРЕНИЯ ПАЛЬМ

Д. Д. Комаров

Аспирант, ассистент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Komarovdd@gmail.com

Минимальные вершинные 1-расширения графов можно рассматривать как модель оптимальной вершинной 1-отказоустойчивой реализации некоторой системы. Эта работа посвящена вершинным 1-расширениям графов специального класса — класса пальм. Приводится решение задачи нахождения минимального вершинного 1-расширения для двулистных пальм.

*Ключевые слова:* графы, минимальные расширения графов, пальмы, сверхстройные деревья, отказоустойчивость.

Хейз (J. P. Hayes) в своей работе [1] рассматривает граф как модель некоторой технической системы в контексте отказоустойчивости. Вершины графа — ее элементы, а ребра — связи между элементами системы. Отказ элемента системы рассматривается как удаление соответствующей этому элементу вершины. При такой интерпретации минимальное вершинное  $k$ -расширение графа, моделирующего некоторую систему  $\Sigma$ , является моделью оптимальной вершинной  $k$ -отказоустойчивой реализации системы  $\Sigma$ . Задача распознавания минимального вершинного расширения произвольного графа является  $NP$ -полной [2], поэтому представляет интерес нахождение классов графов, для которых возможно построить минимальное вершинное расширение аналитически. В данной работе исследуется класс графов, являющийся особым подклассом деревьев, — класс пальм. Исследования будут ограничены рассмотрением минимальных вершинных 1-расширений двулистных пальм.

Дадим основные определения, которые будут использованы в работе, преимущественно согласно книге [3].

Назовем граф  $G_1 = (V_1, \alpha_1)$  *вершинным  $k$ -расширением* графа  $G = (V, \alpha)$ , если граф  $G$  вложим в каждый подграф графа  $G_1$ , получающийся удалением любых его  $k$  вершин.

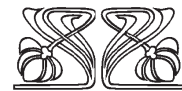
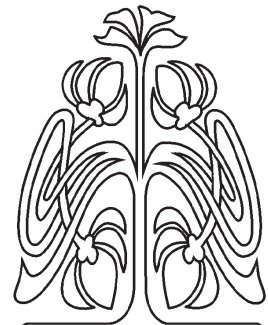
Граф  $G^* = (V^*, \alpha^*)$  называется *минимальным вершинным  $k$ -расширением* графа  $G = (V, \alpha)$ , если выполняются следующие условия:

- 1) граф  $G^*$  является вершинным  $k$ -расширением графа  $G$ ;
- 2)  $|V^*| = |V| + k$ ;
- 3)  $\alpha^*$  имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

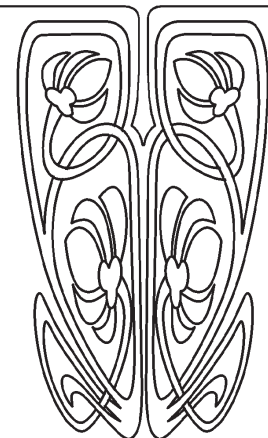
*Путь длины  $k$*  из вершины  $u$  в вершину  $v$  в графе  $G = (V, \alpha)$  есть последовательность  $(v_0, v_1, v_2 \dots v_k), v_i \in V$ , в которой  $v_0 = u, v_k = v$  и  $\{v_{i-1}, v_i\} \in \alpha$ .

*Циклом* в графе называется путь  $(v_0, v_1, v_2 \dots v_k)$ , в котором  $v_0 = v_k$ .

Граф, в котором нет циклов, называется *ациклическим*.



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





Вершина  $w$  графа  $G$  называется *достижимой* из вершины  $v$ , если либо  $w = v$ , либо существует путь из  $v$  в  $w$ .

Граф  $G$  называется *связным*, если любые две его вершины достижимы друг из друга.

Ациклический связный граф называется *деревом*.

Дерево с одной выделенной вершиной называется *корневым* деревом, а выделенная вершина называется *корнем* дерева. В дереве вершины степени 1 называются *листьями*.

Цепью  $P_n$  называется граф  $G = (V, \alpha)$ , где  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  и  $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\}$ .

*Сверхстройным деревом* называется корневое дерево, где степень всех вершин, кроме корня, не превосходит 2, а степень корня — более 2. Можно дать другое определение.

Граф  $G$  называется *сверхстройным деревом*, если он является объединением  $s (s > 2)$  цепей  $P_1, \dots, P_s$  с общей концевой вершиной (пример сверхстройных деревьев показан на рис. 1).

Назовем сверхстройное дерево  *$p$ -листной пальмой высоты  $r$* , если оно образовано объединением  $s (s > 2)$  цепей длинами  $m_1, \dots, m_s$  с общей концевой вершиной, причем одна из длин (не теряя общности пусть это будет  $m_1$ ) равна  $r$ , а остальные  $(m_2, \dots, m_s)$  равны 1 (примеры пальм показаны на рис. 2).

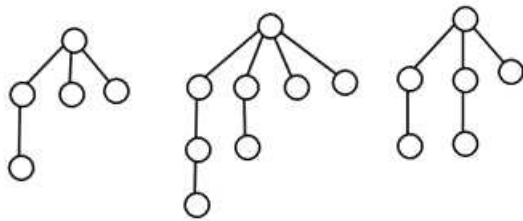


Рис. 1. Пример сверхстройных деревьев

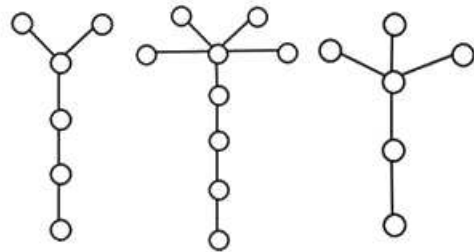


Рис. 2. Пример пальм

Одним из способов задания сверхстройного дерева является вектор длин цепей, упорядоченных по невозрастанию. При этом будем говорить, что дерево  $T$  имеет вид  $(m_1, \dots, m_k)$ .

На сегодняшний день существуют некоторые результаты относительно вершинных расширений пальм, рассмотрим их.

**Теорема 1** [3]. Пусть граф  $G$  является объединением  $s (s > 2)$  цепей, длинами не более 2, среди которых есть хотя бы одна цепь длины 1 и хотя бы одна длины 2, с общей концевой вершиной. Тогда граф  $G^*$ , полученный из графа  $G$  добавлением вершины и соединением ее со всеми листьями и любой вершиной степени 2 (рис. 3), является минимальным вершинным 1-расширением графа  $G$ .

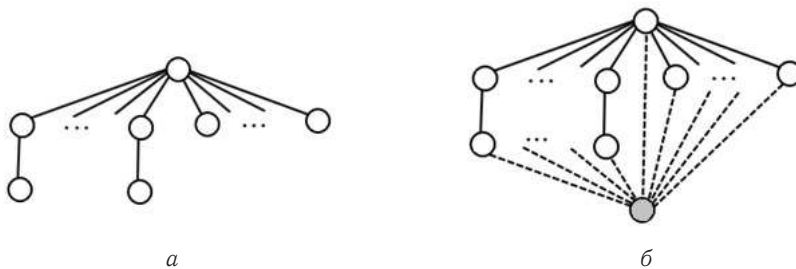


Рис. 3. Схема к теореме 1

Если в рассмотренной теореме  $k$  (количество цепей длины 2) положить равным 1, то получим утверждение для пальм высоты 2.

Так называемый звездный граф можно рассматривать как пальму высоты 1.

**Теорема 2** [3]. Единственным с точностью до изоморфизма минимальным вершинным 1-расширением звездного графа является его тривиальное 1-расширение (рис. 4).



В статье [4] было высказано утверждение, претендующее на решение задачи нахождения минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева произвольного вида.

Дадим определение сложной вершины.

Вершина  $v_{ij}$  ( $j$ -я по счету в  $i$ -й цепи) сверхстройного дерева  $T$  вида  $(m_1, \dots, m_k)$  называется *сложной*, если среди длин цепей дерева  $T$  нет цепи длины  $j - 1$  или  $m_i - j$ .

**Утверждение 1** [4]. *Минимальное вершинное 1-расширение сверхстройного дерева с  $k$  цепями и  $p$  сложными вершинами содержит в точности  $k+p+1$  дополнительных ребер.*

Пусть  $v_{ij}$  — сложная вершина, тогда предлагается добавить ребро из добавленной вершины в вершину  $v_{i(j-1)}$ , а также соединить добавленную вершину со всеми листьями и корнем сверхстройного дерева. Далее в [4] утверждается, что построенный граф будет являться минимальным вершинным 1-расширением заданного сверхстройного дерева.

В статье М. Б. Абросимова [5] показывается, что данное утверждение неверно в части минимальности, то есть построенный граф является вершинным 1-расширением, но не обязательно минимальным. В любом случае, данный результат можно использовать как верхнюю оценку количества дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения сверхстройных деревьев. Там же высказывается предположение относительно того, что для сверхстройных деревьев вида  $(t, 1, 1)$  разность между количеством дополнительных ребер вершинного 1-расширения, построенного по схеме Харари – Хуррума, и количеством дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения может расти неограниченно.

Будем называть граф вида  $(t, 1, 1)$  двулистной пальмой.

Рассмотрим двулистную пальму. Субъективно графом, наиболее похожим на двулистную пальму, для которого существуют результаты относительного его минимальных вершинных 1-расширений, является цепь. Задача о нахождении минимальных вершинных 1-расширений цепи полностью решена.

**Теорема 3** [3]. *Единственным с точностью до изоморфизма минимальным вершинным 1-расширением  $n$ -звенной цепи является  $(n+2)$ -звенный цикл (рис. 5).*

Оказалось, что для 2-листных пальм существует минимальное вершинное 1-расширение, похожее на минимальное вершинное 1-расширение цепи.

Для формулировки следующей теоремы введем понятие *рогатого цикла*.

Назовем рогатым циклом длины  $n$  с  $k$  рогами граф, полученный из  $n$ -звенного цикла и  $k$  3-звенных циклов, таким образом, что каждый из 3-звенных циклов имеет ровно одно общее ребро с  $n$ -звенным циклом, и ни один из 3-звенных циклов не имеет общих ребер с другими 3-звенными циклами. При этом назовем  $k$ -звенный цикл телом рогатого цикла, а 3-звенные циклы назовем его рогами.

Назовем *максимальной разреженностью* рогатого цикла длину максимального пути между вершинами, принадлежащими разным рогам рогатого цикла, проходящего по ребрам, не принадлежащим ни одному из рогов рогатого цикла.

Назовем *минимальной разреженностью* рогатого цикла длину минимального пути между вершинами, принадлежащими разным рогам рогатого цикла, проходящего по ребрам, не принадлежащим ни одному из рогов рогатого цикла.

На рис. 6 показаны рогатый цикл длины 6 с 3 рогами с максимальной разреженностью 2 и минимальной разреженностью 0 (слева), и рогатый цикл длины 8 с 2 рогами с максимальной разреженностью 3 и минимальной разреженностью 3 (справа).

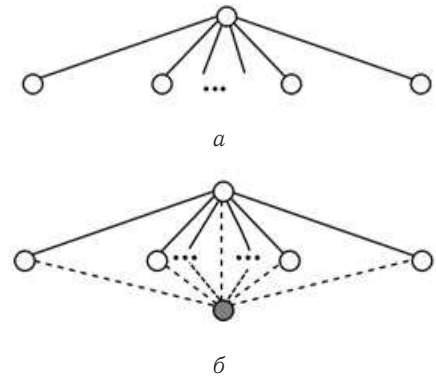


Рис. 4. Схема к теореме 2

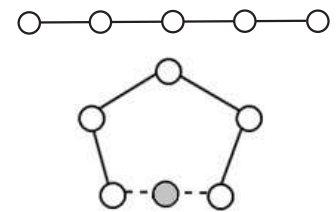


Рис. 5. Схемы к теореме 3

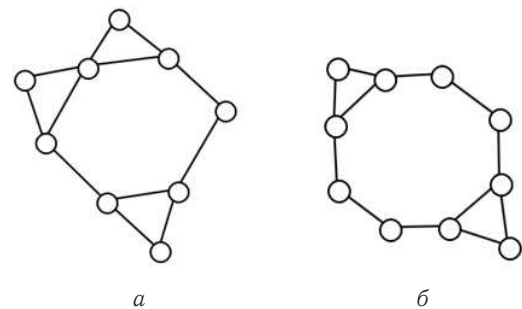
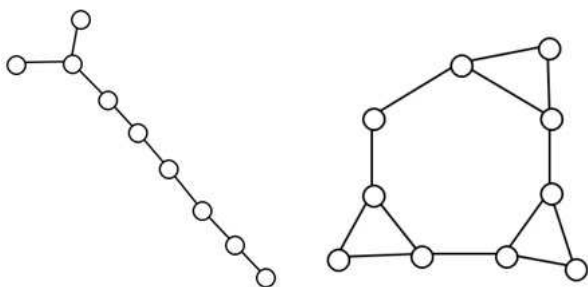


Рис. 6. Примеры рогатых циклов



**Теорема 4.** Пусть дан граф  $G$  – 2-листная пальма высоты  $n$ ,  $n > 5$ . Тогда рогатый цикл  $G_1$  с количеством рогов  $p = \lfloor (n-1)/4 \rfloor + 2$  длиной  $n_1 = n - p + 4$  с максимальной разреженностью меньше 3 и минимальной разреженностью больше 0 (рис. 7), будет являться минимальным вершинным 1-расширением графа  $G$ .



а б  
Рис. 7. Примеры для теоремы 4

**Доказательство.** Сначала покажем, что рогатые циклы с параметрами, описанными в формулировке теоремы, существуют.

Для возможности построения рогатого цикла длиной  $n_1$  с количеством рогов  $p$  достаточно, чтобы выполнялось  $n_1 \geq p$ .

Очевидно, что при  $n > 5$  для  $n_1$  и  $p$  из формулировки теоремы это соотношение выполняется всегда.

Для того чтобы рогатый цикл длины  $n_1$  с количеством рогов  $p$  мог иметь разреженность меньше некоторого  $k$ , достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение  $n_1 \leq (k + 1)p$ .

В частном случае для  $k = 3$  соотношение будет иметь вид

$$n_1 \leq 3p. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь выражения для длины рогатого цикла и количества рогов из формулировки теоремы:

$$p = \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + 2, \tag{2}$$

$$n_1 = n - p + 4. \tag{3}$$

Из (3) следует:

$$n = n_1 + p - 4. \tag{4}$$

Подставив (4) в (2), получим:

$$p = \lfloor \frac{n_1 + p - 5}{4} \rfloor + 2.$$

Так как  $p$  целое, то его можно внести под знак целой части, тогда получим:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n_1 + p - 5}{4} - p + 2 \right\rfloor &= 0, \\ \left\lfloor \frac{n_1 - 3p + 3}{4} \right\rfloor &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Из соотношения (5) следует:

$$\begin{aligned} 0 &\leq n_1 - 3p + 3 < 4, \\ n_1 &< 3p + 1, \\ n_1 &\geq 3p - 3. \end{aligned} \tag{6}$$

Так как  $n_1$  и  $p$  целые, то из (6) следует (1).

Для того чтобы рогатый цикл длины  $n_1$  с количеством рогов  $p$  мог иметь минимальную разреженность больше некоторого  $k$ , достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$n_1 \geq p(k + 2).$$

В частном случае для  $k = 0$  соотношение будет иметь вид

$$n_1 \geq 2p. \tag{7}$$



Подставив (2) и (3) в (7), получим:  $n > 1$ . Таким образом, мы показали, что рогатые циклы с параметрами, описанными в формулировке теоремы, существуют для любого  $n > 1$ .

Теперь покажем, что рогатый цикл  $G_1$  является вершинным 1-расширением графа  $G$ . Всего существует 4 варианта по удалению одной вершины из рогатого цикла с максимальной разреженностью меньше 3 и минимальной разреженностью больше 0. Рассмотрим все варианты.

1. Для схемы удаления вершины, показанной на рис. 8, а, вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 8, б (черный цвет обозначает используемые при вложении ребра, серый — не используемые).

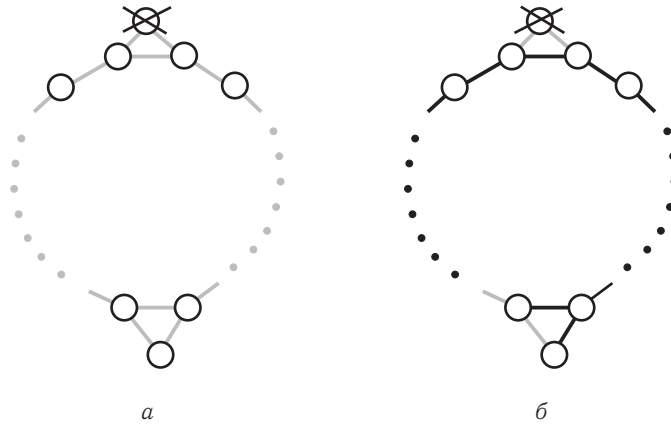


Рис. 8. Схема удаления вершины из рогатого цикла. Случай 1

2. Для схемы удаления вершины, показанной на рис. 9, а вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 9, б.

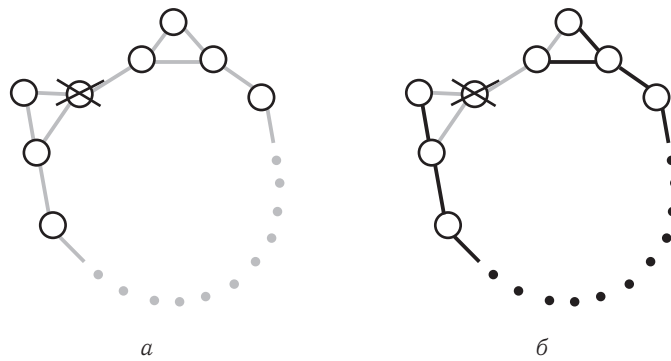


Рис. 9. Схема удаления вершины из рогатого цикла. Случай 2

3. Для схемы удаления вершины, показанной на рис. 10, а вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 10, б.

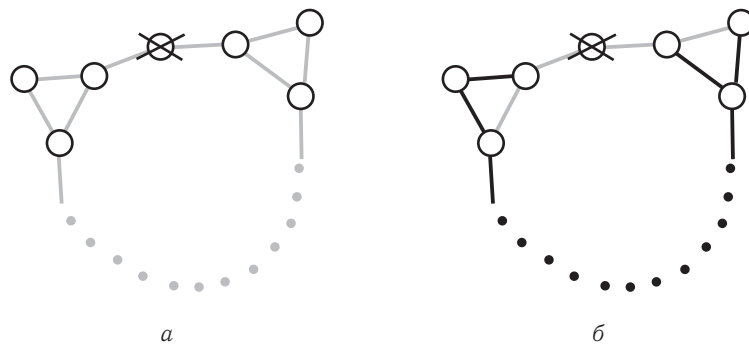


Рис. 10. Схема удаления вершины из рогатого цикла. Случай 3



4. Для схемы удаления вершины, показанной на рис. 11, а, вложение можно осуществить по схеме, показанной на рис. 11, б.

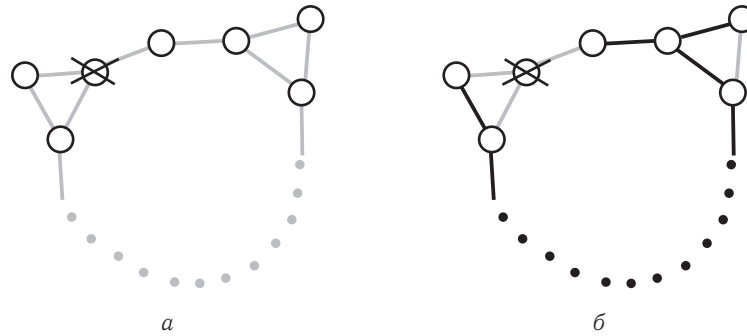


Рис. 11. Схема удаления вершины из рогатого цикла. Случай 4

Таким образом, мы доказали, что граф  $G_1$  является вершинным 1-расширением графа  $G$ .

Граф  $G_1$  имеет  $(p+2)$  или, если записать иначе,  $[(n-1)/4]+4$  дополнительных ребер по сравнению с графом  $G$ . Покажем, что это минимальное из возможного количества дополнительных ребер.

**Утверждение 2.** В минимальном вершинном 1-расширении двулистной пальмы  $G$  не может быть более 4-х подряд идущих вершин степени 2.

Действительно, рассмотрим 5 подряд идущих вершины степени 2 (рис. 12).

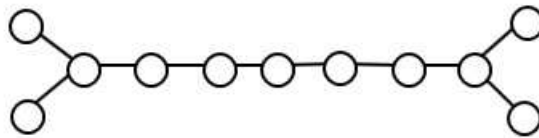


Рис. 12. Подряд идущие вершины степени 2

При удалении центральной вершины мы получим две вершины степени 1, каждая из которых при вложении графа  $G$  сможет быть лишь окончанием ствола пальмы, но никак не листом. Но у пальмы лишь один ствол, значит, утверждение верно.

**Утверждение 3.** Минимальное вершинное 1-расширение двулистной пальмы  $G$  должно содержать цикл длиной, равной  $n+3$ .

Действительно, если будет отсутствовать цикл длиной большей или равной  $n+3$ , то найдется вершина, при удалении которой будет невозможно вложить цепь длины  $n+1$  (ствол пальмы и один лист), а соответственно и двулистную пальму высоты  $n$ .

**Утверждение 4.** Минимальное вершинное 1-расширение двулистной пальмы  $G$  не содержит вершин степени меньше 2.

Действительно, если минимальное вершинное 1-расширение двулистной  $G$  содержит вершину степени 1, то можно удалить смежную с ней вершину, в результате чего получится изолированная вершина, и вложения осуществить будет нельзя.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Рассмотрим две вершины степени больше 2, принадлежащие циклу длины  $n+3$ , причем между этими вершинами по ходу цикла находится только одна вершина степени 2 (рис. 13).

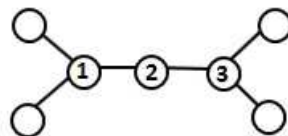


Рис. 13. Утверждение 4. Случай 1

При удалении вершины 2 одна из вершин 1 или 3 при вложении графа  $G$  перейдет в лист, а другая в окончание ствола пальмы. Тогда одна из вершин, смежных с вершиной, перешедшей при вложении в лист, перейдет в корень пальмы, соответственно будет иметь степень, как минимум, 3. То есть на





каждые 4 вершины по циклу длины  $n + 3$  будет, по крайней мере, 2 вершины степени больше 3, это потребует одно дополнительное ребро. Всего на всю пальму потребуется, по крайней мере,  $\lceil (n + 3)/4 \rceil$  дополнительных ребер.

2. Рассмотрим две вершины степени больше 2, принадлежащие циклу длины  $n + 3$ , причем между этими вершинами по ходу цикла находятся только две вершины степени 2 (рис. 14).

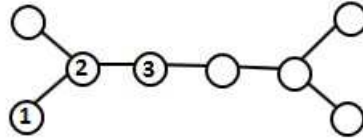


Рис. 14. Утверждение 4. Случай 2

Пусть по ходу цикла длины  $n + 3$  вершина 2 лежит между вершинами 1 и 3. При удалении вершины 2 вершина 3 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 1 перейдет в лист. Тогда вершина, смежная с вершиной 1, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. То есть на каждые 4 вершины по циклу длины  $n + 3$  будет, по крайней мере, 2 вершины степени больше 3, это потребует одно дополнительное ребро. Таким образом, количество дополнительных ребер, по крайней мере, не меньше, чем в случае 1.

3. Рассмотрим две вершины степени больше 2, принадлежащие циклу длины  $n + 3$ , причем между этими вершинами по ходу цикла находятся только три вершины степени 2 (рис. 15).

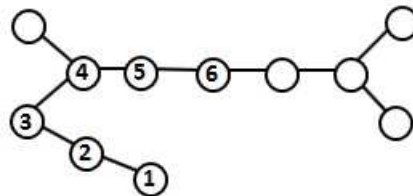


Рис. 15. Утверждение 4. Случай 3

Пусть вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6 находятся подряд по ходу цикла длины  $n + 3$ . При удалении вершины 5 вершина 6 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 4 перейдет в лист. Следовательно, вершина 3, смежная с вершиной 4, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. При удалении вершины 4 вершина 5 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 3 перейдет в лист. Тогда вершина 2, смежная с вершиной 3, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. Аналогично, при удалении вершины 3 только вершина 1 сможет при вложении графа  $G$  перейти в корень пальмы, соответственно будет иметь степень, как минимум, 3. Таким образом, на каждые 7 вершин по циклу длины  $n + 3$  потребуются, как минимум, 2 дополнительных ребра, что хуже, чем для случая 1.

4. Рассмотрим две вершины степени больше 2, принадлежащие циклу длины  $n + 3$ , причем между этими вершинами по ходу цикла находятся только 4 вершины степени 2 (рис. 16).

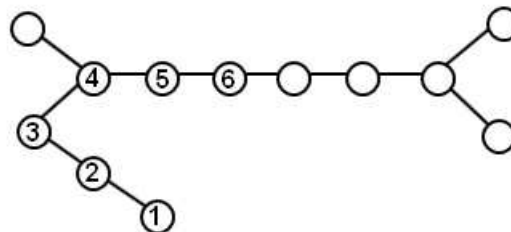


Рис. 16. Утверждение 4. Случай 4

Пусть вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6 находятся подряд по ходу цикла длины  $n + 3$ . При удалении вершины 5 вершина 6 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 4 перейдет в лист. Следовательно, вершина 3, смежная с



вершиной 4, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. При удалении вершины 4 вершина 5 при вложении графа  $G$  сможет перейти только в окончание ствола пальмы. Тогда при вложении графа  $G$  вершина 3 перейдет в лист и вершина 2, смежная с вершиной 3, перейдет в корень и должна иметь степень, как минимум, 3. Аналогично, при удалении вершины 3, только вершина 1 сможет при вложении графа  $G$  перейти в корень пальмы, соответственно будет иметь степень, как минимум, 3. Таким образом, на каждые 8 вершин по циклу длины  $n + 3$  потребуется, как минимум, 2 дополнительных ребра, что повторяет результат для случая 1.

Резюмируя все 4 случая, получим, что минимальное вершинное 1-расширение двулистной пальмы должно содержать цикл длины  $n + 3$ , где, по крайней мере, 2 из 4 последовательных вершин имеют степень больше 2.

Собирая все утверждения и рассуждения вместе, получим:

1. Для обеспечения утверждения 4.2 необходимо, по крайней мере, 2 дополнительных ребра.
2. Для обеспечения утверждения 4.3 необходимо, по крайней мере, 1 дополнительное ребро.
3. Минимальное вершинное 1-расширение графа  $G$  должно содержать цикл длины  $n + 3$ , где, по крайней мере, 2 из 4 последовательных вершин имеют степень больше 2 — для обеспечения этого необходимо, по крайней мере,  $\lceil (n + 3)/4 \rceil$  дополнительных ребер.

Таким образом, минимальное вершинное 1-расширение графа  $G$  должно иметь, по крайней мере,  $2 + 1 + \lceil (n + 3)/4 \rceil = \lceil (n - 1)/4 \rceil + 4$  дополнительных ребер.

Что и требовалось доказать — граф  $G_1$  является минимальным вершинным 1-расширением графа  $G$ .  $\square$

Рассмотрим двулистные пальмы высоты меньше 6. Оказалось, что для пальм высоты 2, 3, 4, минимальное вершинное 1-расширение можно строить по схеме из теоремы 4. Для двулистной пальмы высоты 5 схема минимального вершинного расширения будет отличаться (рис. 17).

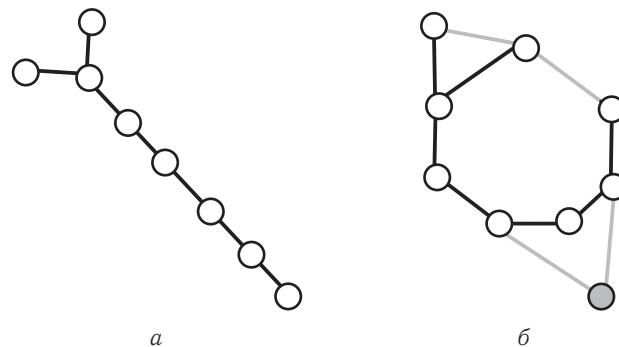


Рис. 17. Случай для двулистной пальмы высоты 5

Так как количество сложных вершин сверхстройного дерева вида  $(t, 1, 1)$  равно  $t - 4$  ( $t > 4$ ), то количество дополнительных ребер по схеме Харари – Хурума будет равно  $t$ . С учетом этого можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 5.** Для любого положительного  $x$  существует сверхстройное дерево, для которого разность между количеством дополнительных ребер вершинного 1-расширения, построенного по схеме Харари – Хурума, и количеством дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения этого графа будет равна  $x$ .

Таким образом, гипотеза М. Б. Абросимова [5] подтвердилась.

### Библиографический список

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. C.25, № 9. P. 875–884.
2. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650. DOI: 10.4213/mzm8403.
3. Абросимов М. Б. Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. 192 с.
4. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. Vol. 56. P. 135–143.
5. Абросимов М. Б. О числе дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 103–113.





## Minimal Vertex 1-extensions of Palm Trees

D. D. Komarov

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, KomarovDD@gmail.com

Minimal vertex 1-extension of graphs can be regarded as a model of optimal 1-node fault tolerant implementation of a system. This paper is about of the 1-vertex extensions of a graphs from a special class named palm trees. This article presents a solution to the problem of finding the minimal vertex 1-extension of palm trees with two leafs.

*Key words:* graphs, minimal extensions of graphs, fault tolerance, palm trees, star-like trees.

### References

1. Hayes J. P. A graph model for fault-tolerant computing system. *IEEE Trans. Comput.*, 1976, vol.C-25, no. 9, pp. 875–884.
2. Abrosimov M. B. Complexity of some problems associated with the extension of graphs. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 5, pp. 619–625. DOI: 10.1134/S0001434610110015.
3. Abrosimov M. B. *Graph models of fault tolerance*. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, 192 p. (in Russian).
4. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees. *Internet J. Comput. Math.*, 1995, vol. 56, pp. 135–143.
5. Abrosimov M. B. On the number of additional edges of a minimal vertex 1-extension of a starlike tree. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 103–113 (in Russian).