МАТЕМАТИКА

УДК 512

К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА

С. Ю. Антонов[1], А. В. Антонова[2]

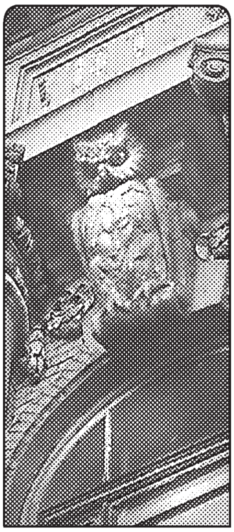
[1]Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovst-vm@rambler.ru

[2]Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovakazan@rambler.ru

В данной работе введены в рассмотрение полилинейные многочлены $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ и $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$, сумма которых является многочленом Ченга $\mathscr{F}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$. Методом математической индукции доказано, что каждый из них есть следствие стандартного многочлена $S^-(\bar{x})$. В частности, показано, что двойной многочлен Капелли $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y})$ также следует из многочлена $S_m^-(\bar{x})$. Здесь же найдена минимальная степень многочлена $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y})$, при которой он является полиномиальным тождеством матричной алгебры $M_n(F)$. Полученные результаты представляют собой перенос результатов Ченга на двойные многочлены Капелли нечетной степени.

Ключевые слова: T-идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-247-251



НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F, порожденная счетным множеством $Z = \{z_n\}_{n\in N}$, которое представим в виде $Z = X\bigcup Y$, где $X = \{x_n\}_{n\in N}$, $Y = \{y_n\}_{n\in N}$ — непересекающиеся счетные множества, S_n — симметрическая группа степени n, $S_n^-(z_1,\ldots,z_n) = \sum\limits_{\mu\in S_n} \operatorname{sgn}\mu\, z_{\mu(1)}\cdots z_{\mu(n)}$ — стандартный многочлен степени n; f,g — произвольные многочлены алгебры $F\{Z\}$, $\{f\}^T$ — T-идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный многочленом f. Напомним, что двусторонний идеал I алгебры $F\{Z\}$ называется T-идеалом, если для любого эндоморфизма φ алгебры $F\{Z\}$ справедливо включение $\varphi(I)\subseteq I$. Далее, будем говорить, что многочлен g является следствием многочлена f (следует из f), если $g\in\{f\}^T$.

Кроме того, пусть t, u, m — любые натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $t\geqslant u$, $m\geqslant u$, $m>1$; $\bar{a}=(a_1\ldots a_{u+1})\in \mathbf{N}^u\times(\mathbf{N}\bigcup\{0\})$, причем $a_1+\ldots+a_{u+1}=m$, $\bar{n}=(n_1\ldots n_{u+1})\in\mathbf{N}^{u+1}$ и $n_1+\ldots+n_{u+1}=m$, $w=y_1y_2\cdots y_t$.

Представим слово w в виде $w=w_1w_2\cdots w_u$, где $w_1=y_1y_2\cdots y_{i_2}$, $w_2=y_{i_2+1}\cdots y_{i_3}$, …, $w_u=y_{i_u+1}\cdots y_t$ и определим многочлены

$$\mathscr{F}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})=\mathscr{F}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_t|w_1,\ldots,w_u)=$$
$$=\sum_{\bar{a}}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u}\operatorname{sgn}\mu\, x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(a_1)}w_{\tau(1)}x_{\pi(a_1+1)}\cdots x_{\pi(a_1+a_2)}w_{\tau(2)}\times$$

$$\times x_{\pi(a_1+a_2+1)}\cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_u)}w_{\tau(u)}x_{\pi(a_1+\ldots+a_u+1)}\cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_{u+1})},$$

$$\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_t|w_1,\ldots,w_u) = \sum_{\bar{n}}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u}\operatorname{sgn}\mu\, x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(n_1)}\times$$
$$\times w_{\tau(1)}x_{\pi(n_1+1)}\cdots x_{\pi(n_1+n_2)}w_{\tau(2)}x_{\pi(n_1+n_2+1)}\cdots x_{\pi(n_1+\ldots+n_u)}w_{\tau(u)}x_{\pi(n_1+\ldots+n_u+1)}\cdots x_{\pi(n_1+\ldots+n_{u+1})},$$

$$\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{R}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_t|w_1,\ldots,w_u) =$$
$$= \sum_{(a_1\cdots a_u\,0)}\sum_{\pi\in S_m}\sum_{\tau\in S_u}\operatorname{sgn}\mu\, x_{\pi(1)}\cdots x_{\pi(a_1)}w_{\tau(1)}x_{\pi(a_1+1)}\cdots x_{\pi(a_1+a_2)}w_{\tau(2)}x_{\pi(a_1+a_2+1)}\cdots x_{\pi(a_1+\ldots+a_u)}w_{\tau(u)},$$

где μ — подстановка в мономе $z_{\mu(1)}\cdots z_{\mu(m)}z_{\mu(m+1)}\cdots z_{\mu(m+t)}$, в котором $z_1 = x_1$, …, $z_m = x_m$, $z_{m+1} = y_1$, …, $z_{m+t} = y_t$. Очевидно, $\mathscr{F}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) + \mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$. Ченгом (Q. Chang) в [1] доказана

Теорема 1. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{F}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Цель данной работы — доказать аналогичную теорему для многочлена $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ и получить некоторые следствия.

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ ЧЕНГА

Пусть $v_1,\ldots,v_n$ — произвольные мономы алгебры $F\{Z\}$. Положим $\bar{v} = (v_1\ldots v_n)$, $\bar{v}_{\hat{i}} = (v_1\ldots v_{i-1}v_{i+1}\ldots v_n)$. Далее, для любых многочленов $f,g \in F\{Z\}$ определим коммутатор $[f,g] = fg - gf$, симметризатор $\langle f,g\rangle = fg + gf$, длину монома v обозначим символом $|v|$.

Утверждение 1. *Стандартный многочлен $S_n^-(\bar{z}) \in F\{Z\}$ обладает следующими свойствами:*

1) $S_n^-(\bar{z}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}z_iS_{n-1}^-(\bar{z}_{\hat{i}}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}S_{n-1}^-(\bar{z}_{\hat{i}})z_i$;

2) *если $n = 2k+1$ и $\operatorname{char}F \neq 2$, то* $2S_n^-(\bar{z}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\langle S_{n-1}^-(\bar{z}_{\hat{i}}), z_i\rangle$;

3) *если $n = 2k$ и $\operatorname{char}F \neq 2$, то* $2S_n^-(\bar{z}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i}[S_{n-1}^-(\bar{z}_{\hat{i}}), z_i]$.

Доказательство. Приведено в [2]. □

Теорема 2. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.*

Доказательство. Проведем индукцию по парам $(t,u) \in A(\preceq) = \{(t,u) \in \mathbf{N}^2 \mid t \geqslant u\}$, где $\preceq$ — лексикографический порядок. Покажем, что для $(t,u) = (1,1)$ теорема верна. Действительно, в этом случае $w = y_1 = w_1$, и по утверждению 1 при четном и нечетном m соответственно будем иметь:

$$\mathscr{H}(\bar{x},y_1|w_1) = S_{m+1}^-(\bar{z}) - < S_m^-(\bar{x}), y_1 >,$$
$$\mathscr{H}(\bar{x},y_1|w_1) = S_{m+1}^-(\bar{z}) - [S_m^-(\bar{x}), y_1]$$

Так как $S_{m+1}^-(\bar{z})$, $\langle S_m^-(\bar{x}), y_1\rangle$, $[S_m^-(\bar{x}), y_1] \in \{S_m^-(\bar{x})\}^T$, то и $\mathscr{H}(\bar{x},y_1|w_1) \in \{S_m^-\}^T$.

Пусть (t,u) — произвольный элемент множества A, отличный от $(1,1)$. Предположим, что для любого $(t_1,u_1) \in A$ такого, что $(t_1,u_1) \prec (t,u)$, теорема 2 верна. Покажем, что она будет верной и для пары (t,u). Для элемента (t,u) возможны следующие случаи:

1) среди подслов $w_1,\ldots,w_u$ существует хотя бы одно w_s, для которого $|w_s| \geqslant 3$;

2) для любого $i = \overline{1,u}$ $|w_i| \leqslant 2$, при этом найдется w_r такое, что $|w_r| = 2$;

3) для любого $i = \overline{1,u}$ $|w_i| = 1$.

Рассмотрим каждый из них по порядку.

Пусть $w_s = b_s y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$, тогда мы можем записать:

$$\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{H}(\bar{x}, y_1, \ldots, y_{i_{s+1}-3}, (y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}), y_{i_{s+1}+1}, \ldots, y_t | w_1, \ldots, w_u) =$$
$$= \varphi \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1}, \hat{i}_{s+1}} | \bar{p}),$$

где $\bar{p} = (w_1 \ldots w_{s-1} b_s y_{i_{s+1}-2} w_{s+1} \ldots w_u)$, φ — эндоморфизм алгебры $F\{Z\}$ такой, что $\varphi(y_{i_{s+1}-2}) = y_{i_{s+1}-2} y_{i_{s+1}-1} y_{i_{s+1}}$ и $\varphi(z) = z$, если $z \neq y_{i_{s+1}-2}$. Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_{s+1}-1}, \hat{i}_{s+1}} | \bar{p})$ пара $(t-2, u) \prec (t, u)$, то по индуктивному предположению он следует из $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Во втором случае предположим, что $w_r = y_{i_r+1} y_{i_r+2}$. Рассмотрим эндоморфизмы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, $\psi_{i_1+1}, \ldots, \psi_{i_u+1}$ алгебры $F\{Z\}$, определенные следующим образом:

$$\varphi_i(z) = \begin{cases} x_i w_r, & \text{если } z = x_i; \\ z, & \text{если } z \neq x_i, \end{cases} \qquad \psi_{i_j+1}(z) = \begin{cases} w_r y_{i_j+1}, & \text{если } z = y_{i_j+1}; \\ z, & \text{если } z \neq y_{i_j+1}, \end{cases}$$

где $i = \overline{1,m}$, $j \in A = \{1, \ldots, u\} \backslash \{r\}$, $i_1 = 0$. Нетрудно видеть, что

$$\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1}, \widehat{i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}}) - \sum_{j\in A} \psi_{i_j+1} \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1}, \widehat{i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}}) - \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1}, \widehat{i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}}) w_r.$$

Так как ассоциированная с многочленом $\mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{i_r+1}, \widehat{i_r+2}} | \bar{w}_{\hat{r}})$ пара $(t-2, u-1) \prec (t, u)$, то по индуктивному предположению он является следствием $S_m^-(\bar{x})$, но тогда и $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S_m^-(\bar{x})$.

Пусть теперь для любого $i = \overline{1,u}$ $|w_i| = 1$, тогда $u = t$. Рассмотрим стандартный многочлен $S_{m+t}^-(\bar{x},\bar{y})$, который представим в виде

$$S_{m+t}^-(\bar{x},\bar{y}) = \mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) + D_0(\bar{x},\bar{y}) + D_1(\bar{x},\bar{y}) + D_2(\bar{x},\bar{y}) + D_3(\bar{x},\bar{y}),$$

где D_0 состоит из мономов, начинающихся с некоторого y и заканчивающихся каким-либо x, D_1 — из мономов, начинающихся с какого-нибудь x и заканчивающихся некоторым y, D_2 — из мономов, начинающихся и заканчивающихся на x, D_3 — из мономов, начинающихся и заканчивающихся на y.

Перегруппируем слагаемые в многочлене $D_0(\bar{x},\bar{y})$ следующим образом. Пусть $v_0 = b_{v_0}(y) a_{v_0 1}(x) \times b_{v_0 1}(y) \cdots b_{v_0 s(v_0)}(y) a_{v_0 s+1}(x)$ — произвольный моном из D_0, в котором $b_{v_0}(y)$, $b_{v_0 1}(y)$, …, $b_{v_0 s(v_0)}(y)$, $a_{v_0 1}(x)$, …, $a_{v_0 s+1}(x)$ — непустые слова из соответствующих алфавитов $\{y_1, \ldots, y_t\}$, $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Соберем все слова v вида

$$v = b_{v_0}(y) c_{v_0 1}(x) b_{v_0 \tau(1)}(y) \cdots b_{v_0 \tau(s)}(y) c_{v_0 s+1}(x) \qquad (\tau \in S_s)$$

в одну скобку и вынесем вместе со знаком v_0 общий множитель $b_{v_0}(y)$. С оставшимися в многочлене D_0 мономами проделаем то же самое. В результате за конечное число шагов придем к равенству

$$D_0(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{v_0} \varepsilon_{v_0} b_{v_0}(y) \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}(v_0) | b_{v_0 1}, \ldots, b_{v_0 s}) + \varepsilon S_t^-(\bar{y}) S_m^-(\bar{x}),$$

где $\varepsilon, \varepsilon_{v_0} \in \{-1, 1\}$.

Аналогично для многочленов $D_1(\bar{x},\bar{y})$, $D_2(\bar{x},\bar{y})$, $D_3(\bar{x},\bar{y})$ будем иметь:

$$D_1(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{v_1} \varepsilon_{v_1} \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}(v_1) | b_{v_1 1}, \ldots, b_{v_1 s}) b_{v_1 s+1}(y) + \omega S_m^-(\bar{x}) S_t^-(\bar{y}),$$

где $\omega, \varepsilon_{v_1} \in \{-1, 1\}$;

$$D_2(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{v_2} \varepsilon_{v_2} \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y} | b_{v_2 1}, \ldots, b_{v_2 s}),$$

где $\varepsilon_{v_2} \in \{-1, 1\}$;

$$D_3(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{v_3} \varepsilon_{v_3} b_{v_3}(y) \mathscr{H}(\bar{x}, \bar{y}(v_3) | b_{v_3 1}, \ldots, b_{v_3 s}) b_{v_3 s+1}(y) + \mathscr{K}(\bar{x},\bar{y}),$$

где $\mathscr{K}(\bar{x},\bar{y}) = \sum\limits_{q_3} \varepsilon_{q_3} b_{q_3}(y) S_m^-(\bar{x}) b_{q_3 1}(y)$, $\varepsilon_{v_3}, \varepsilon_{q_3} \in \{-1, 1\}$.

Следовательно, мы можем записать, что

$$\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = S^-_{m+t}(\bar{x},\bar{y}) - \sum_{v_0} - \sum_{v_1} - \sum_{v_2} - \sum_{v_3} - \varepsilon S^-_t(\bar{y}) S^-_m(\bar{x}) - \omega S^-_m(\bar{x}) S^-_t(\bar{y}) - \mathscr{K}(\bar{x},\bar{y}). \quad (1)$$

Теперь заметим, что у каждого из многочленов, находящегося под знаком суммы $\sum_{v_0}, \sum_{v_1}, \sum_{v_2}, \sum_{v_3}$, ассоциированная с ним пара $(r,s) \prec (t,t)$, и потому по индуктивному предположению каждый из них есть следствие $S^-_m(\bar{x})$.

Кроме того, из утверждения 1 вытекает, что $S^-_{m+t}(\bar{x},\bar{y})$ также следует из $S^-_m(\bar{x})$. Отсюда и из равенства (1) заключаем, что $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) \in \{S^-_m(\bar{x})\}^T$. □

Следствие 1. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S^-_m(\bar{x})$.*

Доказательство. По теореме 1 многочлен $\mathscr{F}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ следует из $S^-_m(\bar{x})$, а по теореме 2 $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ есть следствие $S^-_m(\bar{x})$, но тогда $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = \mathscr{F}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) - \mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w})$ также следует из $S^-_m(\bar{x})$. □

Следствие 2. *Для любого натурального числа $m > 1$ и произвольного поля F многочлен*

$$C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_m} \sum_{\tau\in S_{m-1}} \operatorname{sgn}(\pi\tau) x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(m-1)} y_{\tau(m-1)} x_{\pi(m)}$$

является следствием стандартного многочлена $S^-_m(\bar{x})$.

Доказательство. Полагая в теореме 2 $t = m-1 = u$, придем к равенству

$$\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y}|\bar{w}) = (-1)^{m(m-1)/2} C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}). \qquad \square$$

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра над F со стандартным тождеством $S^-_m(\bar{x})$, $T[A]$ — ее идеал тождеств, тогда по следствию 2 $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}) \in T[A]$. В частности, если $A = M_n(F)$ — матричная алгебра, то по теореме Амицура – Левицкого [3] при $m \geqslant 2n$ $S^-_m(\bar{x}) \in T[M_n(F)]$, и, значит, $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}) \in T[M_n(F)]$. Тот факт, что $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}) \notin T[M_n(F)]$ при $m < 2n$, следует из того, что двойной многочлен Капелли

$$C_{2(2n-1)}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_{2n-1}} \sum_{\tau\in S_{2n-1}} \operatorname{sgn}(\pi\tau) x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(2n-1)} y_{\tau(2n-1)}$$

не обращается в нуль на двойной лестнице, и равенства

$$C_{2m}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}_{\hat{i}}) y_i,$$

доказанного в [4]. Таким образом, нами доказана

Теорема 3. *Пусть F — произвольное поле, $M_n(F)$ — матричная алгебра над F. Тогда наименьшее m, при котором $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y}) \in T[M_n(F)]$, равно $2n$.*

Заметим, что впервые это доказал Домокос (M. Domokos) в [5].

Библиографический список

1. *Chang Q.* Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710.
2. *Pierce R.* Associative Algebras. N.Y. : Springer-Verlag, 1982. 542 p.
3. *Amitsur S. A., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463.
4. *Антонов С. Ю.* Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Изв. вузов. Математика. 2012. № 11. С. 3–19.
5. *Domokos M.* A generalization of a theorem of Chang // Commun. Algebra. 1995. Vol. 23, № 12. P. 4333–4342.

To Chang Theorem

S. Yu. Antonov[1], **A. V. Antonova**[2]

[1]Antonov Stepan Yuryevich, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

[2]Antonova Alina Vladimirovna, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovakazan@rambler.ru

Multilinear polynomials $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y})$ and $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y})$, the sum of which is the Chang polynomial $\mathscr{F}(\bar{x},\bar{y})$ have been introduced in this paper. It has been proved by mathematical induction method that each of them is a consequence of the standard polynomial $S^-(\bar{x})$. In particular it has been shown that the double Capelli polynomial of add degree $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y})$ is also a consequence of the polynomial $S_m^-(\bar{x},\bar{y})$. The minimal degree of the polynomial $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y})$ in which it is a polynomial identity of matrix algebra $M_n(F)$ has been also found in the paper. The results obtained are the transfer of Chang's results over to the double Capelli polynomials of add degree.

Key words: T-ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

References

1. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
2. Pierce R. *Associative Algebras*. New York, Springer-Verlag, 1982, 542 p.
3. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.
4. Antonov S. Yu. The least degree of identities in the subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of the matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2012, iss. 56, no. 11, pp. 1–16. DOI: 10.3103/S1066369X12110011.
5. Domokos M. A generalization of a theorem of Chang. *Commun. Algebra*, 1995, vol. 23, no. 12, pp. 4333–4342.

УДК 517.518

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛИНОМАМИ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ L^p

С. С. Волосивец[1], **Т. В. Лихачева**[2]

[1]Волосивец Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

[2]Лихачева Татьяна Владимировна, старший специалист, филиал АО «Неофлекс Консалтинг» в г. Саратов, iofinat@mail.ru

В настоящей статье изучается приближение полиномами Виленкина в весовых пространствах L^p. Авторы доказывают результат типа Бутцера – Шерера об эквиалентности между порядком наилучшего приближения функции f и порядком возрастания обобщенных производных, а также аппроксимативными свойствами полинома наилучшего приближения $t_n(f)$. Даны некоторые приложения к приближению линейными средними рядов Фурье – Виленкина.

Ключевые слова: система Виленкина, наилучшее приближение, обобщенная производная, средние Зигмунда – Рисса.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-251-258

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, причем $2 \leqslant p_j \leqslant N$ для всех $j \in \mathbb{N}$. По определению $\mathbb{Z}(p_j) = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$, $m_0 = 1$ и $m_n = p_1 \dots p_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \qquad x_j \in \mathbb{Z}(p_j). \tag{1}$$