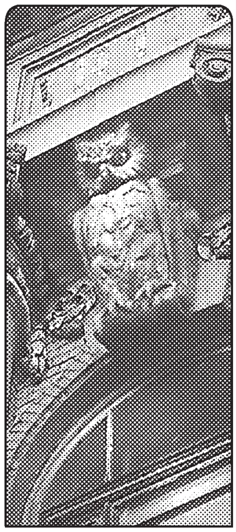
МАТЕМАТИКА



УДК 517.51

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША. ПОЛНОТА И МИНИМАЛЬНОСТЬ

Х. Х. Х. Аль-Джоурани[1], В. А. Миронов[2], П. А. Терехин[3]

[1]Аль-Джоурани Халид Хади Хамид, лектор факультета математики, университет Диала, Ирак, hadi_hameed@ymail.com

[2]Миронов Вячеслав Александрович, аспирант кафедры теории функций и приближений, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, v.a.mironoff@gmail.com

[3]Терехин Павел Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и приближений, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, terekhinpa@mail.ru

Рассматривается вопрос о полноте и минимальности аффинных систем функций типа Уолша. На основе функционально-аналитической структуры мультисдвига в гильбертовом пространстве, являющейся обобщенным аналогом оператора (простого, одностороннего) сдвига и тесно связанной с представлениями C^*-алгебры Кунца, дано определение аффинной системы функций типа Уолша. Приведены различные критерии и признаки полноты аффинных систем функций. Установлена минимальность аффинной системы. Указан явный вид биортогонально сопряженной системы функций и установлена ее полнота.

Ключевые слова: система Уолша, аффинная система, полнота, минимальность, оператор сдвига, структура мультисдвига.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-247-256

1. АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И СТРУКТУРА МУЛЬТИСДВИГА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 1. Пусть H — гильбертово пространство и $W_0, W_1 : H \to H$ — изометрические операторы, действующие в пространстве H. Будем говорить, что пара изометрий W_0 и W_1 *определяет структуру мультисдвига*, если существует вектор $e \in H$ такой, что семейство

$$W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} e, \qquad \alpha_\nu \in \{0,1\}, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant k-1, \qquad k \geqslant 0,$$

образует ортонормированный базис пространства H.

Понятие мультисдвига введено и изучено в работах [1–3]. Рассмотрим пример структуры мультисдвига в гильбертовом пространстве $H = L_0^2(0,1)$, состоящем из всех 1-периодических функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, таких, что $f \in L^2(0,1)$ и $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Именно для $f \in L_0^2(0,1)$ положим

$$W_0 f(x) = f(2x), \qquad W_1 f(x) = r(x) f(2x),$$

где $r(x) = 1$ при $x \in [m, m+1/2)$ и $r(x) = -1$ при $x \in [m+1/2, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$, — периодическая функция Хаара – Радемахера – Уолша.

Теорема 1. *Операторы W_0 и W_1 изометрические, их образы ортогональны. Пространство $H = L_0^2(0,1)$ разлагается в прямую ортогональную сумму*

$$H = R \oplus W_0 H \oplus W_1 H,$$

где $R = \mathrm{Span}\,[r]$ — одномерное подпространство, натянутое на функцию r.

Доказательство. Во-первых, поскольку $|r(x)| = 1$, то при $i \in \{0,1\}$ имеем:

$$\|W_i f\|^2 = \int_0^1 |r^i(x) f(2x)|^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 |f(x)|^2\, dx = \|f\|^2.$$

Далее, для любых функций f и g получим:

$$(W_0 f, W_1 g) = \int_0^1 r(x) f(2x)\overline{g(2x)}\, dx = \int_0^{1/2} f(2x)\overline{g(2x)}\, dx - \int_{1/2}^1 f(2x)\overline{g(2x)}\, dx = 0,$$

что означает ортогональность образов операторов W_0 и W_1. Теперь заметим, что пространство $H = L_0^2(0,1)$ инвариантно относительно операторов W_0 и W_1. В самом деле, при $i \in \{0,1\}$ для любой функции $f \in L_0^2(0,1)$ находим

$$\int_0^1 W_i f(x)\, dx = \int_0^1 r^i(x) f(2x)\, dx = \int_0^{1/2} f(2x)\, dx + (-1)^i \int_{1/2}^1 f(2x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\, dx + \frac{(-1)^i}{2}\int_1^2 f(x)\, dx = 0.$$

Далее, функция r ортогональна образам $W_0 H$ и $W_1 H$, так как

$$(W_i f, r) = \int_0^1 r^i(x) f(2x) r(x)\, dx = \int_0^{1/2} f(2x)\, dx - (-1)^i \int_{1/2}^1 f(2x)\, dx = 0.$$

Наконец, пусть некоторая функция $h \in H$ ортогональна образам $W_0 H$ и $W_1 H$, т. е. $(h, W_i f) = 0$ для всех $f \in H$, $i \in \{0,1\}$. Тогда

$$0 = \int_0^1 h(x) r^i(x)\overline{f(2x)}\, dx = \int_0^{1/2} h(x)\overline{f(2x)}\, dx + (-1)^i \int_{1/2}^1 h(x)\overline{f(2x)}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \big(h(\tfrac{x}{2}) + (-1)^i h(\tfrac{x+1}{2})\big)\overline{f(x)}\, dx.$$

Это означает, что функция $h(\frac{x}{2}) + (-1)^i h(\frac{x+1}{2})$ ортогональна произвольной функции $f \in L_0^2(0,1)$ и поэтому является тождественной постоянной на интервале $(0,1)$. Так как $i \in \{0,1\}$ также произвольно, то функции $h(\frac{x}{2})$ и $h(\frac{x+1}{2})$ являются тождественными постоянными на интервале $(0,1)$. Таким образом, $h(x) \equiv c_0$ при $0 < x < \frac{1}{2}$ и $h(x) \equiv c_1$ при $\frac{1}{2} < x < 1$. Так как $\int_0^1 h(x)\, dx = 0$, то $h(x) = c_0 r(x)$, т. е. $h \in R = \mathrm{Span}\,[r]$. Следовательно, одномерное подпространство R совпадает с ортогональным дополнением суммы $W_0 H \oplus W_1 H$ в пространстве H. Теорема 1 доказана. □

Утверждения теоремы 1 можно записать в операторном виде:

$$W_i^* W_j = \delta_{ij} I, \qquad W_0 W_0^* + W_1 W_1^* = I - P,$$

где P — оператор ортогонального проектирования на одномерное подпространство $R = \mathrm{Span}\,[r]$. Действительно, для любых $f, g \in H$ и $i, j \in \{0,1\}$ имеем

$$(f, W_i^* W_j g) = (W_i f, W_j g) = \delta_{ij}(f, g) = (f, \delta_{ij} I g)$$

в силу изометричности операторов W_0 и W_1 и ортогональности их образов. Оператор $P_i = W_i W_i^*$ является оператором ортогонального проектирования на образ изометрии $W_i H$, поскольку

$$P_i^2 = W_i W_i^* W_i W_i^* = W_i I W_i^* = P_i, \qquad P_i^* = (W_i W_i^*)^* = W_i W_i^* = P_i,$$

т. е. $P_i : H \to H$ — ортопроектор и

$$P_iH = W_iW_i^*H \subset W_iH, \qquad W_iH = W_iIH = W_iW_i^*W_iH = P_iW_iH \subset P_iH,$$

т. е. $P_iH = W_iH$. Осталось заметить, что

$$(P + P_0 + P_1)H = R \oplus W_0H \oplus W_1H = H,$$

т. е. $P+P_0+P_1 = I$. Следует отметить, что расширения операторов W_0 и W_1 на пространство $L^2(0,1)$ периодических функций $f(x)$, определяемые равенствами

$$V_0f(x) = f(2x), \qquad V_1f(x) = r(x)f(2x),$$

являются представлением алгебры Кунца $\mathscr{O}_2$, что означает выполнение соотношений

$$V_i^*V_j = \delta_{ij}I, \qquad V_0V_0^* + V_1V_1^* = I.$$

Таким образом, операторная структура мультисдвига $\{W_0, W_1\}$ является сужением на подпространство $L_0^2(0,1)$ представления $\{V_0, V_1\}$ в пространстве $L^2(0,1)$ банаховой C^*-алгебры Кунца $\mathscr{O}_2$.

Обозначим $\mathbb{A} = \bigcup_{k=0}^{\infty}\{0,1\}^k$ — множество всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$, состоящих из нулей и единиц: $\alpha_\nu \in \{0,1\}$, $0 \leqslant \nu \leqslant k-1$. Положим $|\alpha| = k$ — длина мультииндекса $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ (при $k = 0$ длину пустого мультииндекса полагаем равной нулю). Пусть далее $\alpha\beta = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \dots, \beta_{l-1})$ — конкатенация мультииндексов $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ и $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{l-1})$.

Имеется естественное взаимнооднозначное соответствие между множествами $\mathbb{N}$ и $\mathbb{A}$, определяемое двоичным разложением $n = \sum_{\nu=0}^{k-1}\alpha_\nu 2^\nu + 2^k$ натурального числа n. При фиксированном $k = 0, 1, \dots$ каждому $n \in [2^k, 2^{k+1})$ соответствует мультииндекс $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ длины $|\alpha| = k$ (в частности, при $k = 0$ имеем $n = 1$ и соответствующий мультииндекс α пустой). В дальнейшем мы часто будем использовать замену индекса n на α и наоборот.

С помощью мультииндекса $\alpha \in \mathbb{A}$ удобно записать произведение операторов

$$W^\alpha = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}}, \qquad \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}),$$

— первым действует оператор $W_{\alpha_{k-1}}$, последним — W_{α_0} (при $k = 0$ пустое произведение равно тождественному оператору I). Для функции $f \in L_0^2(0,1)$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$f_n(x) = f_\alpha(x) = W^\alpha f(x) = r^{\alpha_0}(x) \dots r^{\alpha_{k-1}}(2^{k-1}x)f(2^kx) = f(2^kx)\prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(x),$$

где $r_k(x) = r(2^kx)$, $k \geqslant 0$, — функции Радемахера. Кроме того, пусть $f_0(x) \equiv 1$.

Определение 2. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ назовем *аффинной системой функций типа Уолша*, порожденной функцией $f(x)$.

Аффинные системы функций типа Уолша были введены в работе [4] и изучались также в работах [?, 5, 6]. Если в качестве порождающей функции выбрать $w(x) = r(x)$, то система $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ будет классической системой Уолша в нумерации Пэли. Функции Уолша (без постоянной $w_0(x) \equiv 1$)

$$w_n(x) = w_\alpha(x) = W^\alpha w(x) = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}}w(x) = r_k(x)\prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

образуют ортонормированный базис пространства $H = L_0^2(0,1)$. Поэтому согласно определению 1 операторы W_0 и W_1 определяют структуру мультисдвига.

Для подпространства $L \subset H$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{A}$ обозначим $L_\alpha = W^\alpha L$. В частности, $R_\alpha = W^\alpha R = \operatorname{Span}[w_\alpha]$ — одномерное подпространство, натянутое на функцию Уолша w_α. При этом

$$H = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{A}} R_\alpha.$$

Всюду далее соотношение $L \ominus L' = L''$ означает, что $L = L' \oplus L''$.

Теорема 2. *Для каждого $k \geqslant 0$ справедливо представление*

$$H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha|<k} R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k} H_\alpha.$$

Доказательство. Сразу заметим, что при $k = 0$ представление $H \ominus \{0\} = H$ тривиально. Далее рассуждаем по индукции. При $k = 1$ по теореме 1 выполняется представление $H \ominus R = W_0 H \oplus W_1 H$. Предположим, что искомое представление уже доказано при некотором $k \geqslant 1$. Подействуем на представление изометриями W_0 и W_1, получим:

$$W_0 H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha|<k} W_0 R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k} W_0 H_\alpha, \quad W_1 H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha|<k} W_1 R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k} W_1 H_\alpha.$$

Отсюда с учетом ортогональности образов $W_0 H$ и $W_1 H$ находим

$$(W_0 H \oplus W_1 H) \ominus \left(\bigoplus_{0<|\alpha|<k+1} R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k+1} H_\alpha$$

и по теореме 1 окончательно будем иметь

$$H \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha|<k+1} R_\alpha \right) = (R \oplus W_0 H \oplus W_1 H) \ominus \left(\bigoplus_{|\alpha|<k+1} R_\alpha \right) = \bigoplus_{|\alpha|=k+1} H_\alpha.$$

Получили искомое представление с заменой k на $k + 1$. Теорема 2 доказана. □

Из теоремы 2 вытекает, что

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{|\alpha|=k} H_\alpha = \{0\}.$$

Действительно, если функция h принадлежит подпространству $\bigoplus_{|\alpha|=k} H_\alpha$ для всех $k \geqslant 0$, то h ортогональна каждому подпространству R_α, $\alpha \in \mathbb{A}$, и поэтому $h = 0$.

2. ПОЛНОТА АФФИННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

В этом пункте рассматривается вопрос: *при выполнении каких условий на порождающую функцию $f(x)$ аффинная система типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $L^2(0,1)$?*

Сразу заметим, что поскольку $f_0(x) \equiv 1$, то полнота системы $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в $L^2(0,1)$ равносильна полноте системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ в $H = L_0^2(0,1)$. Обозначим

$$M(f) = \overline{\operatorname{Span}}\,[f_\alpha]_{\alpha \in \mathbb{A}} \subset H$$

— замыкание линейной оболочки аффинной системы (без единичной постоянной).

Начнем со следующего простого критерия полноты аффинной системы.

Теорема 3. *Для полноты аффинной системы функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ необходимо и достаточно выполнения условия $r \in M(f)$.*

Доказательство. Условие $r \in M(f)$ необходимо, так как полнота аффинной системы означает, что $M(f) = H$. Обратно, пусть выполнено условие $r \in M(f)$. Заметим, что подпространство $M(f) \subset H$ инвариантно относительно мультисдвига, т. е. $W_0 M(f) \subset M(f)$ и $W_1 M(f) \subset M(f)$, откуда $M_\alpha(f) = W^\alpha M(f) \subset M(f)$ для всех $\alpha \in \mathbb{A}$. Видим, что из условия $r \in M(f)$ следует включение $R_\alpha \subset M_\alpha(f) \subset M(f)$. Следовательно, имеем $H = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{A}} R_\alpha \subset M(f)$, так что $M(f) = H$ и аффинная система полна. Теорема 3 доказана. □

Из теоремы 3 непосредственно вытекает следующее необходимое условие полноты аффинной системы.

Теорема 4. *Если аффинная система функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной, то*

$$(f, r) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx \neq 0.$$

Доказательство. В противном случае $f \perp R$. Кроме того, при $|\alpha| = k \geqslant 1$ с учетом теоремы 2 имеем $f_\alpha \in H_\alpha \perp \bigoplus_{|\beta|<k} R_\beta \supset R$. Поэтому $r \perp M(f)$, что противоречит критерию теоремы 3. Теорема 4 доказана. □

Всюду в дальнейшем полагаем, что функция $f \in L^2_0(0,1)$ нормирована условием

$$(f, r) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx - \int_{1/2}^1 f(x)\,dx = 1.$$

Рассмотрим ряд Фурье – Уолша функции f:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n w_n = w + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_\alpha w_\alpha,$$

где $\hat{f}_n = \hat{f}_\alpha = (f, w_n) = (f, w_\alpha)$ — коэффициенты Фурье функции f по системе Уолша $\{w_n\}_{n=0}^\infty$, причем $(f, w_0) = 0$ и $(f, w_1) = 1$.

Теорема 5. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{|\alpha|=k} |\hat{f}_\alpha|^2 \Bigr)^{1/2} \leqslant 1,$$

то аффинная система функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является полной.

Доказательство. Предположим, что $h \in L^2_0(0,1)$ и $(h, f_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{A}$. Покажем, что $h = 0$. Для этого подействуем оператором W^β, $\beta \in \mathbb{A}$, на разложение функции f в ряд Фурье – Уолша. Получим:

$$f_\beta = W^\beta f = W^\beta w + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_\alpha W^\beta W^\alpha w = w_\beta + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \hat{f}_\alpha w_{\beta\alpha}.$$

Отсюда находим, что коэффициенты Фурье – Уолша $\hat{h}_\alpha = (h, w_\alpha)$ функции h для всех $\beta \in \mathbb{A}$ удовлетворяют соотношениям

$$(h, f_\beta) = \hat{h}_\beta + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \bar{\hat{f}}_\alpha \hat{h}_{\beta\alpha} = 0.$$

С учетом условия теоремы имеем:

$$|\hat{h}_\beta| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \Bigl(\sum_{|\alpha|=k} |\hat{f}_\alpha|^2 \Bigr)^{1/2} \Bigl(\sum_{|\alpha|=k} |\hat{h}_{\beta\alpha}|^2 \Bigr)^{1/2} \leqslant \sup_{k \geqslant 1} \Bigl(\sum_{|\alpha|=k} |\hat{h}_{\beta\alpha}|^2 \Bigr)^{1/2},$$

откуда

$$\sum_{|\beta|=l} |\hat{h}_\beta|^2 \leqslant \sup_{k \geqslant 1} \sum_{|\beta|=l} \sum_{|\alpha|=k} |\hat{h}_{\beta\alpha}|^2 = \sup_{k \geqslant 1} \sum_{|\gamma|=l+k} |\hat{h}_\gamma|^2.$$

Итерируя последнюю оценку, будем иметь:

$$\sum_{|\beta|=l} |\hat{h}_\beta|^2 \leqslant \sup_{k_1 \geqslant 1} \ldots \sup_{k_s \geqslant 1} \sum_{|\gamma|=l+k_1+\cdots+k_s} |\hat{h}_\gamma|^2 \to 0$$

при $s \to \infty$. Поэтому $\hat{h}_\beta = 0$ для всех $\beta \in \mathbb{A}$, так что $h = 0$. Теорема 5 доказана. □

Пример 1. Пусть $f = w + \sum_{|\alpha|=k} \widehat{f}_\alpha w_\alpha$ при фиксированном $k \geqslant 1$. Покажем, что условие

$$F = \sum_{|\alpha|=k} |\hat{f}_\alpha|^2 \leqslant 1$$

необходимо и достаточно для полноты аффинной системы $\{f_n\}_{n=0}^\infty$. Достаточность этого условия прямо следует из доказанной теоремы 5. Докажем необходимость. Предположим противное, а именно пусть $F > 1$. Рассмотрим функцию

$$h = w + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{F^s} \sum_{|\alpha^{(1)}|=k} \cdots \sum_{|\alpha^{(s)}|=k} \hat{f}_{\alpha^{(1)}} \ldots \hat{f}_{\alpha^{(s)}} w_{\alpha^{(1)} \ldots \alpha^{(s)}}.$$

Здесь $\alpha^{(1)}\dots\alpha^{(s)}$ — конкатенация набора из s мультииндексов $\alpha^{(1)}=(\alpha_0^{(1)},\dots,\alpha_{k-1}^{(1)})$, $\dots$, $\alpha^{(s)}=(\alpha_0^{(s)},\dots,\alpha_{k-1}^{(s)})$ длины k и внутренняя s-кратная сумма распространяется на все такие наборы. Функция h определена корректно, так как

$$\|h\|^2=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{F^{2s}}\sum_{|\alpha^{(1)}|=k}\cdots\sum_{|\alpha^{(s)}|=k}|\hat f_{\alpha^{(1)}}|^2\dots|\hat f_{\alpha^{(s)}}|^2=1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{F^s}{F^{2s}}<\infty.$$

Далее, вычислим скалярное произведение

$$(h,f_\beta)=\hat h_\beta+\sum_{|\alpha|=k}\bar{\hat f}_\alpha\hat h_{\beta\alpha}.$$

Из определения функции h видим, что $\hat h_\beta=\hat h_{\beta\alpha}=0$, если $|\beta|\neq ks$ ни при каком $s=0,1,\dots$. Пусть поэтому $|\beta|=ks$ для некоторого $s=0,1,\dots$. Тогда

$$\hat h_\beta=\frac{(-1)^s}{F^s}\hat f_{\alpha^{(1)}}\dots\hat f_{\alpha^{(s)}},\qquad \hat h_{\beta\alpha}=\frac{(-1)^{s+1}}{F^{s+1}}\hat f_{\alpha^{(1)}}\dots\hat f_{\alpha^{(s)}}\hat f_\alpha,$$

где $\beta=\alpha^{(1)}\dots\alpha^{(s)}$ и второе равенство следует из первого после замены индекса s на $s+1$ с учетом того, что $|\alpha|=k$ и $|\beta\alpha|=k(s+1)$. Следовательно, имеем:

$$(h,f_\beta)=\frac{(-1)^s}{F^s}\hat f_{\alpha^{(1)}}\dots\hat f_{\alpha^{(s)}}+\sum_{|\alpha|=k}\bar{\hat f}_\alpha\frac{(-1)^{s+1}}{F^{s+1}}\hat f_{\alpha^{(1)}}\dots\hat f_{\alpha^{(s)}}\hat f_\alpha=0$$

по определению величины $F=\sum_{|\alpha|=k}|\hat f_\alpha|^2$. Таким образом, получаем $(h,f_\beta)=0$ для всех $\beta\in\mathbb{A}$, что противоречит полноте аффинной системы. □

Рассмотрим матрицу Грама $G_f=\{(f_i,f_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$ аффинной системы типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. (Поскольку $(f_0,f_n)=0$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то нулевые строка и столбец исключены из матрицы G_f.) Из теоремы 2 работы [4] непосредственно следует

Теорема 6. *Для всякой ненулевой функции $f\in L_0^2(0,1)$ существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция $g\in L_0^2(0,1)$ такая, что аффинная система функций типа Уолша $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной и при этом $G_f=G_g$.*

Сформулированная теорема 6 показывает, что произвольная (ненулевая) аффинная система функций типа Уолша допускает пополнение с сохранением структуры аффинной системы, а также жесткости пространственного расположения, которая определяется ее матрицей Грама.

3. МИНИМАЛЬНОСТЬ АФФИННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Пусть по-прежнему ряд Фурье – Уолша функции $f\in H=L_0^2(0,1)$ имеет вид

$$f=w+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\hat f_\alpha w_\alpha.$$

По числовой последовательности $\{\hat f_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\hat f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ коэффициентов Фурье – Уолша функции f определим числовую последовательность $\{\hat f_n^*\}_{n=1}^{\infty}=\{\hat f_\alpha^*\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ следующим образом. Положим $\hat f_1^*=1$ и для каждого $n\geqslant 2$, которому соответствует мультииндекс $\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1})$ длины $|\alpha|=k\geqslant 1$, определим $\hat f_n^*=\hat f_\alpha^*=\hat f^*(\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1})$ из рекуррентных соотношений:

$$\sum_{\nu=0}^{k}\hat f(\alpha_0,\dots,\alpha_{\nu-1})\bar{\hat f}^*(\alpha_\nu,\dots,\alpha_{k-1})=0.$$

Зададим функции $f_n^*=f_\alpha^*$ посредством равенств

$$f^*(\alpha_0,\dots,\alpha_{k-1})=\sum_{\nu=0}^{k}\hat f^*(\alpha_\nu,\dots,\alpha_{k-1})w(\alpha_0,\dots,\alpha_{\nu-1}),\qquad \alpha\in\mathbb{A}.$$

Кроме того, пусть $f_0^*(x)\equiv 1$.

Теорема 7. *Последовательность функций $\{f_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ образует биортогонально сопряженную систему к аффинной системе функций типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.*

Доказательство. Функция $f_0 = f_0^* \equiv 1$ ортогональна всем функциям f_n и f_n^*, $n \in \mathbb{N}$. Требуется проверить соотношения $(f_n, f_m^*) = \delta_{nm}$ для $n, m \in \mathbb{N}$. Для этого перейдем от натуральных индексов n и m к мультииндексам $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ и $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{l-1})$. Вычислим

$$(f_\alpha, f_\beta^*) = \sum_{\nu=0}^{l} (f_\alpha, w(\beta_0, \ldots, \beta_{\nu-1}))\bar{\hat{f}}^*(\beta_\nu, \ldots, \beta_{l-1}).$$

Заметим, что в силу результатов п. 1

$$(f_\alpha, w(\beta_0, \ldots, \beta_{\nu-1})) = (W_{\alpha_0} \ldots W_{\alpha_{k-1}} f, W_{\beta_0} \ldots W_{\beta_{\nu-1}} w) = \\ = \delta_{\alpha_0\beta_0} \ldots \delta_{\alpha_{k-1}\beta_{k-1}} (f, w(\beta_k, \ldots, \beta_{\nu-1})).$$

Поэтому в том случае, когда $k \leqslant \nu$ и $\alpha_0 = \beta_0, \ldots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, имеем:

$$(f_\alpha, w(\beta_0, \ldots, \beta_{\nu-1})) = \hat{f}(\beta_k, \ldots, \beta_{\nu-1}).$$

Во всех остальных случаях $(f_\alpha, w(\beta_0, \ldots, \beta_{\nu-1})) = 0$. Таким образом, при $k \leqslant \nu$ и $\alpha_0 = \beta_0, \ldots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$ окончательно получим:

$$(f_\alpha, f_\beta^*) = \sum_{\nu=k}^{l} \hat{f}(\beta_k, \ldots, \beta_{\nu-1})\bar{\hat{f}}^*(\beta_\nu, \ldots, \beta_{l-1}),$$

иначе $(f_\alpha, f_\beta^*) = 0$. Но при $k < l$ последняя сумма снова обращается в нуль, что следует из рекуррентных соотношений, определяющих числа $\hat{f}_\alpha^*$, в которых мультииндекс α заменен на мультииндекс $(\beta_k, \ldots, \beta_{l-1})$ длины $l - k \geqslant 1$. Наконец, при $k = l$ скалярное произведение (f_α, f_β^*) отлично от нуля лишь в случае $\alpha = \beta$, при этом $(f_\alpha, f_\alpha^*) = \hat{f}(\varnothing)\bar{\hat{f}}^*(\varnothing) = \hat{f}_1 \bar{\hat{f}}_1^* = 1$. Теорема 7 доказана. □

Теорема 8. *Биортогонально сопряженная система $\{f_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве $L^2(0,1)$.*

Доказательство. Из определения биортогонально сопряженной системы видим, что каждая функция f_n^* является полиномом по системе Уолша порядка n со старшим коэффициентом равным 1. Отсюда следует ее полнота. □

Заметим, что теорема 8 справедлива лишь при сделанном нами предположении, что первый коэффициент Фурье – Уолша $\hat{f}_1$ порождающей функции f аффинной системы отличен от нуля. Можно показать, что аффинная система типа Уолша $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является минимальной для любой ненулевой порождающей функции f, однако явный вид биортогонально сопряженной системы будет отличаться от приведенного выше для случая $\hat{f}_1 = 1$.

Как следует из результатов п. 1 функции аффинной системы имеют вид

$$f_n = \sum_{k=n}^{\infty} c_{n,k} w_k, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

а функции построенной нами биортогонально сопряженной системы имеют вид

$$f_n^* = \sum_{k=1}^{n} d_{n,k} w_k, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда следует, что совпадение систем $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{f_n^*(x)\}_{n=0}^{\infty}$ происходит в том и только том случае, когда порождающая функция f совпадает с функцией Уолша w с точностью до унимодулярной постоянной. Поэтому аффинная система функций типа Уолша является полной ортонормированной системой тогда и только тогда, когда $f = \varkappa w$, $|\varkappa| = 1$. Тем не менее класс неполных ортонорированных аффинных систем типа Уолша достаточно широк, как показывает следующая теорема (см. [4]).

Теорема 9. *Для любой ненулевой функции* $f \in L_0^2(0,1)$ *существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция* $\varphi \in L_0^2(0,1)$ *такая, что аффинная система функций типа Уолша* $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *является ортонормированной и при этом*

$$\overline{\mathrm{Span}}\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \overline{\mathrm{Span}}\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Пример 2. Простым примером ортонормированной аффинной системы функций типа Уолша $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ служат аффинные системы, порожденные функциями вида

$$\varphi = \sum_{|\alpha|=k} \hat{\varphi}_\alpha w_\alpha, \qquad \sum_{|\alpha|=k} |\hat{\varphi}_\alpha|^2 = 1,$$

при фиксированном $k \geqslant 0$.

Замечание. Аффинные системы функций типа Уолша по своей структуре подобны аффинным системам (системам сжатий и сдвигов функции) хааровского типа. Последние изучались в работах многих авторов (см., например, [7–13]). Теоремы 5, 7 и 8 данной статьи являются аналогами некоторых результатов, полученных П. А. Терехиным в [14–19].

Работа Х. Х. Х. Аль-Джоурани выполнена при финансовой поддержке Министерства высшего образования и научных исследований Республики Ирак. Работа В. А. Миронова и П. А. Терехина выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К). Работа П. А. Терехина выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Библиографический список

1. *Терехин П. А.* О представляющих свойствах системы сжатий и сдвигов функции на отрезке // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер. матем., мех., информ. 1998. Т. 4, № 1. С. 136–138.
2. *Терехин П. А.* О мультипликативной структуре централизатора мультисдвига в гильбертовом пространстве // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 119–122.
3. *Терехин П. А.* Мультисдвиг в гильбертовом пространстве // Функц. анализ и его прил. 2005. Т. 39, вып. 1. С. 69–81. DOI: 10.4213/faa32.
4. *Терехин П. А.* Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 1. С. 395–400.
5. *Миронов В. А., Терехин П. А.* Минимальность аффинных систем функций типа Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 41–44.
6. *Миронов В. А., Терехин П. А.* Тригонометрическая аффинная система типа Уолша // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 37–39.
7. *Filippov V. I., Oswald P.* Reprentation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory. 1995. Vol. 82, № 1. P. 15–29. DOI: 10.1006/jath.1995.1065.
8. *Галатенко В. В., Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* О свойствах орторекурсивных разложений по подпространствам // Тр. МИАН. 2014. Т. 284. С. 138–141. DOI: 10.1134/S03719685140 10075.
9. *Кудрявцев А. Ю.* О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Матем. заметки. 2012. Т. 92, вып. 5. С. 707–720. DOI: 10.4213/mzm8933.
10. *Сильниченко А. В.* О сходимости порядкосохраняющих слабых жадных алгоритмов // Матем. заметки. 2008. Т. 84, вып. 5. С. 795–800. DOI: 10.4213/mzm6365.
11. *Sarsenbi A. M., Terekhin P. A.* Riesz basicity for general systems of functions // J. Function Spaces. 2014. Vol. 2014. Article ID 860279. P. 1–3. DOI: 10.1155/2014/860279.
12. *Терехин П. А.* Сжатия и сдвиги функции с ненулевым интегралом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1999. Вып. 1. С. 67–68.
13. *Терехин П. А.* Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Матем. 1999. № 8. С. 74–81.
14. *Терехин П. А.* Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке // Матем. заметки. 2002. Т. 72, вып. 4. С. 547–560. DOI: 10.4213/mzm444.
15. *Терехин П. А.* К вопросу о возмущениях системы Хаара // Матем. заметки. 2004. Т. 75, вып. 3. С. 466–469. DOI: 10.4213/mzm553.
16. *Терехин П. А.* О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в

пространствах $L^p[0,1]$ // Матем. заметки. 2008. Т. 83, вып. 5. С. 722–740. DOI: 10.4213/mzm4046.
17. *Терехин П. А.* О компонентах суммируемых функций по элементам семейств функций-всплесков // Изв. вузов. Матем. 2008. № 2. С. 53–59.
18. *Терехин П. А.* Линейные алгоритмы аффинного синтеза в пространстве Лебега $L^1[0,1]$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, вып. 5. С. 115–144. DOI: 10.4213/im3562.
19. *Терехин П. А.* О наилучшем приближении функций в метрике L_p полиномами по аффинной системе // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 2. С. 131–158. DOI: 10.4213/sm7630.

Образец для цитирования:
Аль-Джоурани Х. Х. Х., Миронов В. А., Терехин П. А. Аффинные системы функций типа Уолша. Полнота и минимальность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 247–256. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-247-256.

Affine System of Walsh Type. Completeness and Minimality

Kh. H. H. Al-Jourany[1], V. A. Mironov[2], P. A. Terekhin[3]

[1]Khalid H. H. Al-Jourany, University of Diyala, Baquba, Diyala Province, Iraq, hadi_hameed@ymail.com
[2]Vyacheslav A. Mironov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, v.a.mironoff@gmail.com
[3]Pavel A. Terekhin, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, terekhinpa@mail.ru

The question on completeness and minimality of Walsh affine systems is considered. On the basis of functional-analytical structure of multishift in Hilbert space, which being the generalized analogue of the operator of simple one-side shift and closely connected with Cuntz algebra representations, we give definition of Walsh affine system. Various criteria and tests of completeness of affine systems of functions are established. A biorthogonal conjugate system is found and its completeness is proved.

Key words: Walsh functions, affine system, completeness, minimality, shift operator, multishift structure.

This work of Kh. H. H. Al-Jourany was supported by the Iraq Ministry of High Education and Scientific Research. This work of V. A. Mironov and P. A. Terekhin were supported by the Russian Ministry of Science and Education (projects no. 1.1520.2014/K). This work of P. A. Terekhin was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00152).

References

1. Terekhin P. A. On representation properties of a system of contractions and shifts of functions on an interval. *Izv. Tul'sk. Gos. Univ., Ser. Matem., Mekh., Inform.*, 1998, vol. 4, no. 1, pp. 136–138 (in Russian).
2. Terekhin P. A. On the multiplicative structure of the centralizer of a multishift on a Hilbert space. *Mathematics. Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2000, iss. 2, pp. 119–122 (in Russian).
3. Terekhin P. A. Multishifts in Hilbert spaces. *Funct. Anal. Appl.*, 2005, vol. 39, no. 1, pp. 57–67. DOI: 10.1007/s10688-005-0017-5.
4. Terekhin P. A. Affine Systems of Walsh Type. Orthogonalization and Completion. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 1, pp. 395–400 (in Russian).
5. Mironov V. A., Terekhin P. A. Minimality of an affine systems of Walsh type. *Mathematics. Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2014, iss. 16, pp. 41–44 (in Russian).
6. Mironov V. A., Terekhin P. A. Trigonometric affine system of Walsh type. *Mathematics. Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2015, iss. 17, pp. 37–39 (in Russian).
7. Filippov V. I., Oswald P. Reprentation in L_p by series of translates and dilates of one function. *J. Approx. Theory*, 1995, vol. 82, no. 1, pp. 15–29. DOI: 10.1006/jath.1995.1065.
8. Galatenko V. V., Lukashenko T. P., Sadovnichii V. A. On the properties of orthorecursive expansions with respect to subspaces. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, pp. 129–132. DOI: 10.1134/S0081543814010076.
9. Kudryavtsev A. Yu. On the convergence of orthorecursive expansions in nonorthogonal wavelets. *Math. Notes*, 2012, vol. 92, iss. 5, pp. 643–656. DOI: 10.1134/S0001434612110077.
10. Sil'nichenko A. V. On the convergence of order-preserving weak greedy algorithms. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, iss. 5, pp. 741–747. DOI: 10.1134/S0001434608110187.
11. Sarsenbi A. M., Terekhin P. A. Riesz basicity for general systems of functions. *J. Function Spaces*, 2014, vol. 2014, article ID 860279, pp. 1–3. DOI: 10.1155/2014/860279.

12. Terekhin P. A. Translates and dilates of function with nonzero integral. *Mathematics. Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 1999, iss. 1, pp. 67–68 (in Russian).
13. Terekhin P. A. Inequalities for the components of summable functions and their representations by elements of a system of contractions and shifts. *Russian Math.*, 1999, vol. 43, no. 8, pp. 70–77.
14. Terekhin P. A. Riesz bases generated by contractions and translations of a function on an interval. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 4, pp. 505–518. DOI: 10.1023/A:1020536412809.
15. Terekhin P. A. On perturbations of the Haar system. *Math. Notes*, 2004, vol. 75, iss. 3, pp. 466–469. DOI: 10.1023/B:MATN.0000023325.89390.66.
16. Terekhin P. A. Convergence of biorthogonal series in the system of contractions and translations of functions in the spaces $L^p[0,1]$. *Math. Notes*, 2008, vol. 83, iss. 5, pp. 722–740. DOI: 10.1134/S000143460805009X.
17. Terekhin P. A. On the components of summable functions represented by elements of families of wavelet functions. *Russian Math.*, 2008, vol. 52, no. 2, pp. 51–57. DOI: 10.1007/s11982-008-2008-3.
18. Terekhin P. A. Linear algorithms of affine synthesis in the Lebesgue space $L^1[0,1]$. *Izv. Math.*, 2010, vol. 74, iss. 5, pp. 993–1022. DOI: 10.1070/IM2010v074n05ABEH002513.
19. Terekhin P. A. Best approximation of functions in L^p by polynomials on affine system. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 2, pp. 279—306. DOI: 10.1070/SM2011v202n02ABEH004146.

Please cite this article in press as:
Al-Jourany Kh. H. H., Mironov V. A., Terekhin P. A. Affine System of Walsh Type. Completeness and Minimality. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 247–256 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-247-256.

УДК 517.51

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СДВИГОВ В ПОЛЕ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

А. М. Водолазов[1], С. Ф. Лукомский[2]

[1]Водолазов Александр Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, vam21@yandex.ru

[2]Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LukomskiiSF@nfo.sgu.ru

В 2010 г. S. Albeverio, С. Евдокимов и М. Скопина доказали, что если система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))$ ступенчатой функции φ ортонормирована, функция φ порождает ортогональный p-адический кратно масштабный анализ (КМА), то носитель ее преобразования Фурье лежит в единичном шаре. Мы доказываем, что в некоторых случаях требование «φ порождает КМА» можно опустить. В общем случае мы указываем количество линейно независимых ступенчатых функций, сдвиги которых образуют ортонормированную систему.

Ключевые слова: ортогональные системы сдвигов, поле p-адических чисел, p-адический КМА.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262

ВВЕДЕНИЕ

Первые примеры вейвлетов на нуль-мерных группах принадлежат В. Ленгу [1–3] и относятся к случаю двоичной группы Кантора. Начиная с этого момента можно выделить две группы работ. С одной стороны, начались исследования кратно масштабного и вейвлет-анализа на группах Виленкина [4–7], с другой стороны — на полях p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Оказалось, что эти две теории существенно отличаются. В случае групп Виленкина при любых натуральных M, N можно построить ступенчатую ортогональную масштабирующую функцию φ, порождающую кратно масштабный анализ (КМА), которая постоянна на смежных классах по подгруппе G_M и имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi \subset G_{-N}$, где (G_n) — основная цепочка подгрупп, порождающая топологию [7]. Для групп p-адических чисел ситуация иная. Если ступенчатая ортогональная масштабирующая функция φ, порождающая КМА,