To Chang Theorem

S. Yu. Antonov[1], **A. V. Antonova**[2]

[1]Antonov Stepan Yuryevich, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

[2]Antonova Alina Vladimirovna, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovakazan@rambler.ru

Multilinear polynomials $\mathscr{H}(\bar{x},\bar{y})$ and $\mathscr{R}(\bar{x},\bar{y})$, the sum of which is the Chang polynomial $\mathscr{F}(\bar{x},\bar{y})$ have been introduced in this paper. It has been proved by mathematical induction method that each of them is a consequence of the standard polynomial $S^-(\bar{x})$. In particular it has been shown that the double Capelli polynomial of add degree $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y})$ is also a consequence of the polynomial $S_m^-(\bar{x},\bar{y})$. The minimal degree of the polynomial $C_{2m-1}(\bar{x},\bar{y})$ in which it is a polynomial identity of matrix algebra $M_n(F)$ has been also found in the paper. The results obtained are the transfer of Chang's results over to the double Capelli polynomials of add degree.

Key words: T-ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

References

1. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
2. Pierce R. *Associative Algebras*. New York, Springer-Verlag, 1982, 542 p.
3. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.
4. Antonov S. Yu. The least degree of identities in the subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of the matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2012, iss. 56, no. 11, pp. 1–16. DOI: 10.3103/S1066369X12110011.
5. Domokos M. A generalization of a theorem of Chang. *Commun. Algebra*, 1995, vol. 23, no. 12, pp. 4333–4342.

УДК 517.518

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛИНОМАМИ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ L^p

С. С. Волосивец[1], **Т. В. Лихачева**[2]

[1]Волосивец Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

[2]Лихачева Татьяна Владимировна, старший специалист, филиал АО «Неофлекс Консалтинг» в г. Саратов, iofinat@mail.ru

В настоящей статье изучается приближение полиномами Виленкина в весовых пространствах L^p. Авторы доказывают результат типа Бутцера – Шерера об эквиалентности между порядком наилучшего приближения функции f и порядком возрастания обобщенных производных, а также аппроксимативными свойствами полинома наилучшего приближения $t_n(f)$. Даны некоторые приложения к приближению линейными средними рядов Фурье – Виленкина.

Ключевые слова: система Виленкина, наилучшее приближение, обобщенная производная, средние Зигмунда – Рисса.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-251-258

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, причем $2 \leqslant p_j \leqslant N$ для всех $j \in \mathbb{N}$. По определению $\mathbb{Z}(p_j) = \{0, 1, \ldots, p_j - 1\}$, $m_0 = 1$ и $m_n = p_1 \ldots p_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \qquad x_j \in \mathbb{Z}(p_j). \tag{1}$$

Это разложение единственно, если для $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, мы берем разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Каждое число $k \in \mathbb{Z}_+$ может быть записано единственным образом в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \qquad k_j \in \mathbb{Z}(p_j). \tag{2}$$

Если x и y представлены в виде (1), то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j m_J^{-1}$, $z_j \in \mathbb{Z}(p_j)$, $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$. Аналогично определяется $x \ominus y$. Для данного $x \in [0,1)$ с разложением (1) and $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложением (2) полагаем $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right)$. Система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$, называемая мультипликативной, или системой Виленкина, является ортонормированной и полной в $L^1[0,1]$ (см. [1, § 1.5]), причем при $k < m_n$ функции $\chi_k(x)$ постоянны на $I_j^n := [(j-1)/m_n, j/m_n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant j \leqslant m_n$. Множество всех I_j^n обозначим через Ω. Введем коэффициенты Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ формулой $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и частичные суммы Фурье равенством $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $1 < p < \infty$. Положительная измеримая на $[0,1)$ (т. е. весовая) функция $w(x)$ принадлежит классу Макенхаупта A_p, если

$$\left(|I|^{-1} \int_I w(x)\,dx\right) \left(|I|^{-1} \int_I w^{-1/(p-1)}(x)\,dx\right)^{p-1} \leqslant C < \infty \tag{3}$$

для всех $I \in \Omega$ ($|I|$ означает меру Лебега множества I).

Через $L^p_w[0,1)$, где $1 \leqslant p < \infty$ и $w(x)$ — весовая функция, обозначим банахово пространство измеримых на $[0,1)$ функций с конечной нормой $\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p w(x)\,dx\right)^{1/p}$. Как обычно, $\mathscr{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \geqslant n\}$, $E_n(f)_{p,w} = \inf\{\|f - t_n\|_{p,w} : t_n \in \mathscr{P}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. При $w(x) \equiv 1$ получаем классическое пространство $L^p[0,1)$ с нормой $\|\cdot\|_p$. С помощью неравенства Гельдера легко показывается, что $L^p_w[0,1) \subset L^1[0,1)$ при $1 < p < \infty$ и $w \in A_p$. Будем говорить, что существует $\mathbf{P}$-производная $f^{[r]}$ функции $f \in L^p_w[0,1)$ порядка $r > 0$ (в $L^p_w[0,1)$), если ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j^r \hat{f}(j)\chi_j$ является рядом Фурье функции $f^{[r]} \in L^p_w[0,1)$. Это условие равносильно тому, что ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j^r \hat{f}(j)\chi_j$ сходится в $L^p_w[0,1)$ к $f^{[r]}$ (см. [3]).

В работе [4] был установлен ряд теорем о приближениях по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L^p_w[0,1)$, являющихся аналогами результатов о приближении тригонометрическими полиномами в весовых пространствах (см. [5–7]).

Теорема A. 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ *и для* $f \in L^p_w[0,1)$ *существует* $f^{[r]} \in L^p_w[0,1)$. *Тогда* $E_n(f)_{p,w} \leqslant Cn^{-r}\|f^{[r]}\|_{p,w}$.

2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ *и* $t_n \in \mathscr{P}_n$. *Тогда* $\|t_n^{[r]}\|_{p,w} \leqslant C(p,w)\|t_n\|_{p,w}$.

Теорема B. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\gamma = \min(2,p)$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ *и* $f \in L^p_w[0,1)$. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{r\gamma-1} E_k^{\gamma}(f)_{p,w}$, *то существует* $f^{[r]} \in L^p_w[0,1)$ *и при этом*

$$E_n(f^{[r]})_{p,w} \leqslant C \left(n^r E_n(f)_{p,w} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{r\gamma-1} E_k^{\gamma}(f)_{p,w}\right)^{1/\gamma} \right).$$

Пусть $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $r \in \mathbb{N}$ и $W^r L^p_w[0,1)$ состоит из функций $g \in L^p_w[0,1)$, для которых существует $g^{[r]} \in L^p_w[0,1)$, с полунормой $\|g^{[r]}\|_{p,w}$. Рассмотрим K-функционал

$$K_r(f,t) = K_r(f,t,L^p_w[0,1), W^r L^p_w[0,1)) = \inf\{\|f-g\|_{p,w} + t\|g^{[r]}\|_{p,w} : g \in W^r L^p_w[0,1)\}.$$

Обычный модуль непрерывности в $L^p[0,1) = L_1^p[0,1)$ вида $\omega^*(f,\delta) = \sup_{0\leqslant h<\delta} \|f(\cdot\oplus h) - f(\cdot)\|_{p,1}$ в весовом пространстве не является адекватной характеристикой функции из-за отсутствия инвариантности нормы $\|\cdot\|_{p,w}$ относительно обобщенного сдвига. Но с помощью величины $K_r(f,t,L_w^p[0,1),W^rL_w^p[0,1))$ можно записать аналоги классических теорем Д. Джексона и С. Н. Бернштейна (см. [8, § 5.1 и § 6.1]).

Теорема C (см. [4]). *Пусть $1<p<\infty$, $w\in A_p$, $r\in\mathbb{N}$ и $\gamma=\min(p,2)$. Тогда для всех $f\in L_w^p[0,1)$ и $n\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$E_n(f)_{p,w} \leqslant CK_r(f,n^{-r})$$

и

$$K_r(f,n^{-r}) \leqslant Cn^{-r}\left(\sum_{k=1}^{n}[k^rE_k(f)_{p,w}]^\gamma k^{-1}\right)^{1/\gamma}.$$

Далее, пусть $\omega(t)$ возрастает и непрерывна на $[0,1]$ и $\omega(0)=0$ (обозначение $\omega\in\Phi$). Если $f\in L_w^p[0,1)$ и $K_r(f,n^{-r}) = O(\omega(n^{-1}))$, $n\in\mathbb{N}$, то будем писать $f\in H_{p,w}^{\omega,r}$, при $r=1$ будем писать $f\in H_{p,w}^{\omega}$.

Целью нашей работы является получение условий, эквивалентных соотношению $E_n(f)_{p,w} = O(n^{-r-\alpha})$, $n\in\mathbb{N}$, в терминах обобщенных производных, полиномов наилучшего приближения и K-функционала $K_r(f,t)$. Тригонометрический аналог этого результата см. в [9, теорема 2.2]. В невесовом случае для системы Уолша (частный случай системы $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ при $p_i\equiv 2$) см. [10, теорема 4.4]. Кроме того, даны приложения теорем A–C к приближениям линейными средними рядов Фурье по системе $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ в пространстве $L_w^p[0,1)$.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Пусть $1<p<\infty$, $w\in A_p$, $r\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<r$, $f\in L_w^p[0,1)$ и полином $t_n(f)\in\mathscr{P}_n$ таков, что $\|f-t_n(f)\|_{p,w} = E_n(f)_{p,w}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $E_n(f)_{p,w} = O(n^{-r-\alpha})$, $n\in\mathbb{N}$;

2) *существует* $f^{[r]}\in L_w^p[0,1)$ *и* $K_r(f^{[r]},n^{-r}) = O(n^{-\alpha})$, $n\in\mathbb{N}$;

3) *для всех* $s\in[0,r]\cap\mathbb{Z}$ *существует* $f^{[s]}\in L_w^p[0,1)$ *и справедливо соотношение*

$$\|f^{[s]} - t_n^{[s]}(f)\|_{p,w} = O(n^{s-r-\alpha}), \qquad n\in\mathbb{N};$$

4) $\|t_n^{[s]}(f)\|_{p,w} = O(n^{s-r-\alpha})$, $n\in\mathbb{N}$, *где* $s\in\mathbb{N}$, $s>r+\alpha$.

Если вместо $0<\alpha<r$ потребовать $\alpha>0$, то утверждения 1), 3) и 4) эквивалентны.

Доказательство. Установим 1) $\Rightarrow$ 4). Пусть $m_k\leqslant n<m_{k+1}$ и $s>r+\alpha$. В силу части 2) теоремы A и условия 1) имеем:

$$\|t_n^{[s]}(f)\|_{p,w} \leqslant \|t_n^{[s]}(f) - t_{m_k}^{[s]}(f)\|_{p,w} + \sum_{i=1}^{k}\|t_{m_i}^{[s]}(f) - t_{m_{i-1}}^{[s]}(f)\|_{p,w} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(n^s\|t_n(f) - t_{m_k}(f)\|_{p,w} + \sum_{i=1}^{k} m_i^s\|t_{m_i}(f) - t_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2C_1\left(n^sE_{m_k}(f)_{p,w} + \sum_{i=1}^{k} m_i^sE_{m_{i-1}}(f)_{p,w}\right) \leqslant C_2\left(n^sm_k^{-r-\alpha} + \sum_{i=1}^{k} m_i^sm_{i-1}^{-r-\alpha}\right) \leqslant C_3n^{s-r-\alpha}.$$

Здесь использовано неравенство вида

$$\|t_{m_i}(f) - t_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \leqslant \|t_{m_i}(f) - f\|_{p,w} + \|f - t_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \leqslant 2E_{m_{i-1}}(f)_{p,w}, \tag{4}$$

ограниченность отношений n/m_k и m_i/m_{i-1}, а также хорошо известное соотношение $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i^\beta \leqslant C_4m_k^\beta$, $\beta>0$, $k\in\mathbb{N}$.

Докажем, что 4) влечет 1). Пусть снова $m_k \leqslant n < m_{k+1}$. В силу полуаддитивности наилучшего приближения по функции находим, что

$$E_n(f)_{p,w} \leqslant E_{m_k}(f)_{p,w} \leqslant E_{m_k}(f - t_{m_{k+1}}(f))_{p,w} + E_{m_k}(t_{m_{k+1}})_{p,w} = E_{m_{k+1}}(f)_{p,w} + E_{m_k}(t_{m_{k+1}})_{p,w}.$$

Записывая аналогичные неравенства

$$E_{m_{k+i-1}}(f)_{p,w} - E_{m_{k+i}}(f)_{p,w} \leqslant E_{m_{k+i-1}}(t_{m_{k+i}}(f))_{p,w}$$

и складывая их по $i \geqslant 1$ с учетом того, что $\lim\limits_{k\to\infty} E_{m_k}(f)_{p,w} = 0$, получаем:

$$E_{m_k}(f)_{p,w} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} E_{m_{k+i-1}}(t_{m_{k+i}}(f))_{p,w}. \tag{5}$$

Согласно части 1) теоремы A и условию 4) для некоторого $s > r + \alpha$

$$E_{m_{k+i-1}}(t_{m_{k+i}}(f))_{p,w} \leqslant C_5 m_{k+i-1}^{-s} \|t^{[s]}_{m_{k+i}}(f)\|_{p,w} \leqslant C_6 m_{k+i}^{-r-\alpha}.$$

Подставляя последнее неравенство в (5) и используя известное неравенство $\sum\limits_{j=k}^{\infty} m_j^{-\beta} \leqslant C_7 m_k^{-\beta}$, $\beta > 0$, $k \in \mathbb{N}$, находим, что

$$E_n(f)_{p,w} \leqslant E_{m_k}(f)_{p,w} \leqslant C_8 m_k^{-r-\alpha} \leqslant C_9 n^{-r-\alpha}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства импликации 3) $\Rightarrow$ 1) сначала подставим в неравенство части 1) теоремы A функцию $f - t_n^*(f)$, где $t_n^*(f) \in \mathscr{P}_n$, $(t_n^*)^{[r]} = \varphi_n$ и $\varphi_n \in \mathscr{P}_n$ удовлетворяет равенству $\|f^{[r]} - \varphi_n\|_{p,w} = E_n(f^{[r]})_{p,w}$, и получим

$$E_n(f)_{p,w} = E_n(f - t_n^*)_{p,w} \leqslant C_{10} n^{-r} \|f^{[r]} - \varphi_n\|_{p,w} = C_{10} n^{-r} E_n(f^{[r]})_{p,w}. \tag{6}$$

Из условия 3) при $s = r$ следует, что $E_n(f^{[r]})_{p,w} \leqslant C_{11} n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому условие 1) вытекает из (6).

Установим, что 1) влечет 3). Пусть $s \in [1, r] \cap \mathbb{N}$. В силу неравенства (4) и части 2) теоремы A имеем при $l > k$:

$$\|t^{[s]}_{m_l}(f) - t^{[s]}_{m_k}(f)\|_{p,w} \leqslant \sum_{i=k+1}^{l} \|t^{[s]}_{m_i}(f) - t^{[s]}_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \leqslant$$
$$\leqslant C_{12} \sum_{i=k+1}^{l} m_i^s E_{m_{i-1}}(f)_{p,w} \leqslant C_{13} \sum_{i=k+1}^{l} m_{i-1}^{s-r-\alpha} \leqslant C_{14} m_k^{s-r-\alpha}.$$

Из последнего неравенства вытекает фундаментальность последовательности $\{t^{[s]}_{m_k}(f)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p_w[0,1)$ и сходимость этой последовательности к некоторой функции φ в $L^p_w[0,1)$. Так как $t_{m_k}(f) \to f$ в $L^p_w[0,1)$ и тем более в $L^1[0,1)$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{t_{m_k}(f)}(n) = \hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и аналогично $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{t^{[s]}_{m_k}(f)}(n) = \hat{\varphi}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Но $\widehat{t^{[s]}_{m_k}(f)}(n) = n^s \widehat{t_{m_k}(f)}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и поэтому $\hat{\varphi}(n) = n^s \hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, т. е. существует $f^{[s]} = \varphi \in L^p_w[0,1)$. Далее, если $m_k \leqslant n < m_{k+1}$, то

$$\|t^{[s]}_n(f) - t^{[s]}_{m_{k+1}}(f)\|_{p,w} \leqslant C_{15} n^s E_n(f)_{p,w} \leqslant C_{16} n^{s-r-\alpha}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|t^{[s]}_n(f) - f^{[s]}\|_{p,w} = 0$. Теперь, используя снова (4) и часть 2) теоремы A, имеем:

$$\|t^{[s]}_n(f) - f^{[s]}\|_{p,w} \leqslant \|t^{[s]}_n(f) - t^{[s]}_{m_{k+1}}(f)\|_{p,w} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \|t^{[s]}_{m_i}(f) - t^{[s]}_{m_{i-1}}(f)\|_{p,w} \leqslant$$

$$\leqslant C_{17}\left(n^s n^{-r-\alpha}+\sum_{i=k+1}^{\infty} m_{i+1}^s m_i^{-r-\alpha}\right)\leqslant C_{18}n^{s-r-\alpha}.$$

При $s=0$ условие 3) сразу следует из условия 1).

Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{r\gamma-1}k^{-(r+\alpha)\gamma}$ сходится при $\alpha>0$, по теореме B выводим существование $f^{[r]}$, причем

$$E_n(f^{[r]})_{p,w}\leqslant C_{19}\left(n^{r-r-\alpha}+\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{-\alpha\gamma-1}\right)^{1/\gamma}\right)\leqslant C_{20}n^{-\alpha},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Теперь по теореме C находим, что

$$K_r(f^{[r]},n^{-r})\leqslant C_{21}n^{-r}\left(\sum_{k=1}^{n}(k^r k^{-\alpha})^{\gamma}k^{-1}\right)^{1/\gamma}\leqslant C_{22}n^{-r}n^{r-\alpha}=C_{22}n^{-\alpha}.$$

В последнем неравенстве необходимо, чтобы $(r-\alpha)\gamma-1>-1$, т. е. $r>\alpha$. Предыдущие утверждения верны и без этого ограничения. Обратное утверждение, 2) $\Rightarrow$ 1), вытекает из (6) и первого неравенства теоремы C. Теорема доказана.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Теорема 2. *Пусть* $1<p<\infty$, $w\in A_p$, $f\in L_w^p[0,1)$, $r\in\mathbb{N}$ *и* $Z_n^r(f)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(1-k^r/n^r)\hat f(k)\chi_k(x)$. *Тогда* $\|f-Z_n^r(f)\|_{p,w}\leqslant CK_r(f,n^{-r})$.

Доказательство. Известно, что при выполнении условий теоремы справедливо неравенство $\|S_n(f)\|_{p,w}\leqslant C_1\|f\|_{p,w}$ (см. [3]), откуда стандартным образом выводится неравенство

$$\|f-S_n(f)\|_{p,w}\leqslant (C_1+1)E_n(f)_{p,w},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Имеем:

$$\|f-Z_n^r(f)\|_{p,w}\leqslant\|f-S_n(f)\|_{p,w}+\|S_n(f)-Z_n^r(f)\|_{p,w}\leqslant$$
$$\leqslant(C_1+1)E_n(f)_{p,w}+n^{-r}\|S_n^{[r]}(f)\|_{p,w}=:I_1+I_2.$$

Из теоремы C вытекает оценка $I_1\leqslant C_2K_r(f,n^{-r})$. Пусть $\varepsilon>0$ и $g\in W^rL_w^p[0,1)$ такова, что

$$K_r(f,n^{-r})\geqslant\|f-g\|_{p,w}+n^{-r}\|g^{[r]}\|_{p,w}-\varepsilon.$$

Тогда в силу части 2) теоремы A и упомянутого выше результата из [3] выводим оценку

$$I_2=n^{-r}\|S_n^{[r]}(f)\|_{p,w}\leqslant n^{-r}\|S_n^{[r]}(f-g)\|_{p,w}+n^{-r}\|S_n^{[r]}(g)\|_{p,w}\leqslant$$
$$\leqslant C_3n^{-r}n^r\|f-g\|_{p,w}+n^{-r}\|S_n(g^{[r]})\|_{p,w}\leqslant C_4(\|f-g\|_{p,w}+n^{-r}\|g^{[r]}\|_{p,w})\leqslant C_4(K_r(f,n^{-r})+\varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем $I_2\leqslant C_4K_r(f,n^{-r})$. Объединяя оценки I_1 и I_2, доказываем неравенство теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $1<p<\infty$, $w\in A_p$, $f\in L_w^p[0,1)$ *и* $\sigma_n(f)=\sum\limits_{k=1}^{n}S_k(f)/n$. *Тогда*

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{p,w}\leqslant CK_1(f,n^{-1}).$$

Следующие две теоремы являются весовыми аналогами результатов из [11]. Будем писать $\omega\in B_1$, если $\omega\in\Phi$ и справедливо неравенство $k\omega(k^{-1})\leqslant Cl\omega(l^{-1})$ при $k,l\in\mathbb{N}$, $k\leqslant l$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $w \in A_p$, $\omega \in B_1$ *и* $f \in H^{\omega}_{p,w}$ (*т. е.* $K_1(f, n^{-1}) = O(\omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$). *Пусть двойная последовательность* $\{a_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям*

$$a_{nk} \geqslant 0, \qquad a_{nk} = 0 \qquad \text{при} \qquad k > n, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1, \tag{7}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \leqslant K a_{nn}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Тогда для линейных средних $T_n(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} S_k(f)$ *верно неравенство*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leqslant C n a_{nn} \omega(n^{-1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. В силу условия (7) имеем:

$$T_n(f) - f = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} S_k(f) - \sum_{k=1}^{n} a_{nk} f = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}(S_k(f) - f).$$

Применяя преобразование Абеля и следствие 1, находим, что

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} = \left\| \sum_{k=1}^{n-1} (a_{nk} - a_{n,k+1}) k (\sigma_k(f) - f) + n a_{nn} (\sigma_n(f) - f) \right\|_{p,w} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| k \|\sigma_k(f) - f\|_{p,w} + n a_{nn} \|\sigma_n(f) - f\|_{p,w} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| k \omega(k^{-1}) + n a_{nn} \omega(n^{-1}) \right).$$

Используя условие $\omega \in B_1$ и неравенство (8), получаем $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leqslant C_2 n a_{nn} \omega(n^{-1})$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если выполнены все условия теоремы 3, кроме* (8), *и последовательность* $\{a_{nk}\}_{k=1}^{n}$ *возрастает по* k *при фиксированном* $n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leqslant C n a_{nn} \omega(n^{-1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Следствие 3. *Если выполнены все условия теоремы 3 и, кроме того, последовательность* $\{n a_{nn}\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничена, то*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leqslant C \omega(n^{-1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, кроме* (8), *которое заменено на*

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{n,k} - a_{n,k+1}| \leqslant K a_{n,1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Тогда $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leqslant C n a_{n1} \omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3 в силу неравенства (9) и условия $\omega \in B_1$ имеем:

$$\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leqslant C_1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| k \omega(k^{-1}) + n a_{nn} \omega(n^{-1}) \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_2 (n a_{n,1} \omega(n^{-1}) + n a_{n,1} \omega(n^{-1})). \tag{10}$$

Но благодаря (9) справедливо также неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (a_{n,k+1} - a_{n,k}) \leqslant K a_{n,1}$, откуда $a_{nn} \leqslant (K+1) a_{n1}$. Из последнего неравенства и (10) следует неравенство теоремы. Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 4, кроме* (9), *и последовательность* $\{a_{nk}\}_{k=1}^{n}$ *убывает по* k *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leqslant Cna_{n1}\omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 4 и* $na_{n1} = O(1)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\|f - T_n(f)\|_{p,w} \leqslant C\omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
2. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 165. P. 207–226.
3. *Young W. S.* Weighted norm inequalities for Vilenkin – Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 340, № 1. P. 273–291.
4. *Волосивец С. С.* Приближение полиномами по мультипликативным системам в весовых пространствах L^p // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 82–93.
5. *Ky N. X.* On approximation by trigonometric polynomials in L^p_u-spaces // Studia Sci. Math. Hungar. 1993. Vol. 28. P. 183–188.
6. *Ky N. X.* Moduli of mean smoothness and approximation with A_p weights // Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1997. Vol. 40. P. 37–48.
7. *Kokilashvili V., Yildirir Y. E.* On the approximation in weighted Lebesgue spaces // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2007. Vol. 143. P. 103–113.
8. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.
9. *Butzer P. L., Scherer K.* On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin // Aequationes Math. 1969. Vol. 3. P. 170–185.
10. *Butzer P. L., Wagner H. J.* On dyadic analysis based on the pointwise dyadic derivative // Analysis Math. 1975. Vol. 1, № 3. P. 171–196.
11. *Iofina T. V., Volosivets S. S.* On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm // East J. Approximations. 2009. Vol. 15, № 3. P. 143–158.

Several Questions of Approximation by Polynomials with Respect to Multiplicative Systems in Weighted L^p Spaces

S. S. Volosivets[1], T. V. Likhacheva[2]

[1]Volosivets Sergey Sergeevich, Saratov State University, 83, Astrahanskaya st., 410012, Saratov, Russia, VolosivetsSS@mail.ru
[2]Likhacheva Tatiana Vladimirovna, Neoflex Consulting Company Branch in Saratov, 66, Atkarskaya st., 410078, Saratov, Russia, iofinat@mail.ru

In this paper we study approximation by Vilenkin polynomials in weighted L^p spaces. We prove the Butzer – Scherer type result on equivalence between the rate of best approximation of a function f and the growth of generalized derivatives and approximating properties of the best approximation polynomial $t_n(f)$. Some applications to the approximation by linear means of the Fourier – Vilenkin series are given.

Key words: Vilenkin system, best approximation, generalized derivative, Zygmund – Riesz means.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).

References

1. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications.* Dordrecht, Kluwer, 1991.
2. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 165, pp. 207–226.
3. Young W. S. Weighted norm inequalities for Vilenkin – Fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1993, vol. 340, no. 1, pp. 273–291.
4. Volosivets S. S. Approximation by polynomials with respect to multiplicative systems in weighted L^p spaces. *Siberian Math. J.*, 2015, vol. 56, no. 1, pp. 82–93.
5. Ky N. X. On approximation by trigonometric

polynomials in L_u^p-spaces. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1993, vol. 28, pp. 183–188.
6. Ky N. X. Moduli of mean smoothness and approximation with A_p weights. *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 1997, vol. 40, pp. 37–48.
7. Kokilashvili V., Yildirir Y. E. On the approximation in weighted Lebesgue spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 2007, vol. 143, pp. 103–113.
8. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of a real variable*. New York, MacMillan, 1963.
9. Butzer P. L., Scherer K. On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin. *Aequationes Math.*, 1969, vol. 3, pp. 170–185.
10. Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on the pointwise dyadic derivative. *Analysis Math.*, 1975, vol. 1, no. 3, pp. 171–196.
11. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm. *East J. Approximations*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 143–158.

УДК 514.76

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С N-СВЯЗНОСТЬЮ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sgalaev@mail.ru

На многообразии с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и эндоморфизмом $N : D \to D$ вводится понятие N-связности ∇^N. Находятся условия, при которых N-связность совместима с почти контактной метрической структурой: $\nabla^N \eta = \nabla^N g = \nabla^N \vec{\xi} = 0$. Исследуются отношения между связностью Леви – Чивиты, связностью Схоутена – ван Кампена и N-связностью. С помощью N-связности находятся условия, при которых почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, N-связность, связность Схоутена – ван Кампена, тензор кривизны N-связности, почти контактные кэлеровы пространства.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264

ВВЕДЕНИЕ

Начало теории метрически аффинных пространств — (псевдо) римановых многообразий, наделенных линейной связностью с ненулевым кручением — было положено Э. Картаном (E. Cartan) в 1922 г. [1]. Наибольшим интересом среди метрических связностей с кручением пользуется полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено К. Яно (K. Yano) в работе [2]. Четвертьсимметрическая связность определена в 1975 г. С. Голабом (S. Golab) [3]. В работе [4] определяется связность, специально приспособленная к решению задач неголономной геометрии и названная позже связностью Схоутена – ван Кампена. В. В. Вагнер [5] использует связность Схоутена – ван Кампена для построения теории кривизны неголономного многообразия коразмерности 1. Определяемая при этом связность Вагнера, как показано в настоящей работе, является связностью в векторном расслоении, естественным образом возникающем на неголономном многообразии. Мы вводим новый тип линейной связности с кручением, которая определяется на многообразии с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и эндоморфизмом $N : D \to D$. При надлежащем выборе эндоморфизма N построенная нами связность (названная в работе N-связностью) совпадает со связностью Вагнера.

Работа построена следующим образом. В параграфе 1содержатся основные сведения о почти контактных метрических пространствах. В параграфе 2дается определение N-связности. Находятся условия метричности N-связности. Исследуются отношения между связностью Леви – Чивиты, связностью Схоутена – ван Кампена и N-связностью. В частности, показывается, что N-связность является более общей связностью, чем связность Схоутена – ван Кампена. Более подробные сведения о связности Схоутена – ван Кампена содержатся в работе [4]. В параграфе 3.находится выражение для тензора кривизны N-связности. В параграфе 4.N-связность рассматривается на многообразиях с почти контактной кэлеровой структурой и на многообразиях Кенмоцу.