Пусть γ — $(0,0,t-1)$-компонента φ. Тогда имеем следующее равенство:

$$\omega = d_{0,0,1}\gamma + \mu_{n+i}\theta^{n+i},$$

где μ_{n+i} — $(0,t-1)$-форма. Получим $\omega = d_{0,0,1}\gamma$, поэтому каждая $d_{0,0,1}$-замкнутая является локально $d_{0,0,1}$-точной. □

Библиографический список

1. *Manea A.* Cohomology of foliated Finsler manifolds // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III : Mathmatics, Informatics, Physics. 2011. Vol 4(53), № 2. P. 23–30.
2. *Bejancu A., Farran H. R.* Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle // Reports on Math. Physics. 2006. Vol. 58, № 1. P. 131–146.
3. *Vaisman I.* Cohomology and differential forms. N. Y. : Marcel Dekker Inc., 1973.
4. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 17–22.
5. *Galaev S. V.* Contact structures with admissible Finsler metrics // Physical Interpretation of Relativity Theory : Proc. of Intern. Meeting. Moscow, 4–7 July 2011. Moscow : BMSTU, 2012. P. 80–87.

Foliation on Distribution with Finslerian Metric

A. V. Bukusheva

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, bukusheva@list.ru

A distribution D with a admissible Finsler metric is defined on a smooth manifold X. Let F be a foliation on X. On the distribution of D as on a smooth manifold foliation F corresponds to the foliation TF. Using this foliation and connection over distribution we define analog exterior derivative. Exterior differential forms is applied to a special form.

Key words: sub Finslerian manifold, interior connection, almost contact metric space, cohomology.

References

1. Manea A. Cohomology of foliated Finsler manifolds. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser.* III : *Mathmatics, Informatics, Physics*, 2011, vol. 4(53), no. 2, pp. 23–30.
2. Bejancu A., Farran H. R. Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle. *Reports on Math. Physics*, 2006, vol. 58, no. 1, pp. 131–146.
3. Vaisman I. *Cohomology and differential forms.* New York, Marcel Dekker Inc., 1973.
4. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost Contact Metric Structures Defined by Connection over Distribution with Admissible Finslerian Metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 17–22 (in Russian).
5. Galaev S. V. Contact structures with admissible Finsler metrics. *Physical Interpretation of Relativity Theory : Proc. of Intern. Meeting. Moscow,* 4–7 *July* 2011, Moscow, BMSTU, 2012, pp. 80–87.

УДК 517.5

СИНТЕЗ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ЯДРЕ ДВУХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Т. А. Волковая

Преподаватель кафедры математики, информатики и методики их преподавания, Кубанский государственный университет, филиал в г. Славянске-на-Кубани, vta1987@yandex.ru

Пусть π — целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$, $\pi(D)$ — соответствующий дифференциальный оператор. Максимальное $\pi(D)$-инвариантное подпространство ядра аналитического функционала называется его $\mathbf{C}[\pi]$-ядром. $\mathbf{C}[\pi]$-ядром системы аналитических функционалов называется пересечение их $\mathbf{C}[\pi]$-ядер. В статье описаны условия, при которых $\mathbf{C}[\pi]$-ядро двух аналитических функционалов допускает синтез по корневым элементам оператора $\pi(D)$.

Ключевые слова: спектральный синтез, дифференциальный оператор бесконечного порядка, инвариантные подпространства, подмодули целых функций.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbf{C}$; H — пространство функций, аналитических в Ω, с топологией равномерной сходимости на компактах; H^* — сильное сопряженное к H; $\pi(z)$ — целая функция минимального типа при порядке $\rho = 1$; $\pi(D)$ — соответствующий дифференциальный оператор бесконечного порядка. Считаем, что функция π отлична от константы. Следовательно, $\pi(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. Оператор $\pi(D)$ является линейным непрерывным оператором, действующим из H в H. Замкнутое подпространство $W \subseteq H$ называем инвариантным, если $\pi(D)W \subseteq W$. Говорят, что замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает *спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием в H линейной оболочки корневых элементов оператора $\pi(D)$, содержащихся в W.

Пусть H^* — сильное сопряженное к пространству H, P — интерпретация H^* в терминах преобразований Лапласа. Известно, что пространство P совпадает с индуктивным пределом $P[1, H_\Omega)$, где H_Ω — сопряженная к опорной функции области Ω [1]. Оператор умножения на функцию π является непрерывным отображением из P в P. Это позволяет рассматривать P как топологический модуль над кольцом $\mathbf{C}[\pi]$. Из теоремы о биполяре вытекает, что между совокупностью $\{W\}$ замкнутых инвариантных подпространств в H и совокупностью $\{I\}$ замкнутых подмодулей в P можно установить взаимно однозначное соответствие по правилу ортогональности:

$$I = T(W^0), \qquad W = (T^{-1}(I))^0,$$

где T — преобразование Лапласа $H^* \to P$, W^0 — аннулятор W в H^*, T^{-1} — обратное преобразование $P \to H^*$, $(T^{-1}(I))^0$ — аннулятор $T^{-1}(I)$ в H. В работе А. Б. Шишкина [2] развивается общий метод, позволивший А. Н. Чернышеву [3] доказать *теорему двойственности*: замкнутое инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда подмодуль $T(W^0)$ является обильным.

В работе [4] обильность замкнутого подмодуля в P расщепляется на три отдельных свойства: интенсивность, устойчивость и насыщенность. В работе [5] эти свойства подвергаются дополнительному исследованию. Используя описание ограниченных множеств в P, легко показать, что в этом пространстве выполняется аксиома *локальной равномерной устойчивости*: для любой точки $\lambda \in \mathbf{C}$ и любого ограниченного множества $B \subset P$ существуют окрестность U_λ точки λ и ограниченное множество $B' \subset P$ такие, что

$$f \in B, \quad \zeta \in U_\lambda, \quad \frac{f}{\pi - \zeta} \in H(\mathbf{C}) \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{\pi - \zeta} \in B'.$$

Это означает, что результаты статей [4] и [5] применимы к P.

Пусть $S \in H^*$. Замкнутое инвариантное подпространство

$$W_S := \{f \in H : \langle S, \pi(D)^k f\rangle = 0,\ k = 0, 1, \ldots\} \subseteq H$$

называется *полиномиальным ядром* функционала S (точнее, $\mathbf{C}[\pi]$-ядром функционала S). Если $\pi(\zeta)$ — многочлен, то подпространство W_S совпадает с множеством решений однородного уравнения π-свертки $\langle S, f(z,h)\rangle = 0$, где $f(z,h)$ — π-сдвиг функции $f \in H$ на шаг h. В этом случае подпространство W_S допускает спектральный синтез ($\pi(\zeta) = \zeta$ [6], $\pi(\zeta) = \zeta^q$ [7], $\pi(\zeta) \in \mathbf{C}[\zeta]$ [8]). Случай π — целая функция минимального типа при порядке 1 рассмотрен Р. Г. Письменным [9]. Им же доказана следующая теорема: если существует уточненный порядок $\rho(r) \to \rho$, $0 < \rho < 1$, такой, что функция π является целой функцией вполне регулярного роста при этом уточненном порядке и индикатор $h(\theta)$ функции π при уточненном порядке $\rho(r)$ всюду положителен, то подпространство W_S допускает спектральный синтез.

Полиномиальным ядром (точнее, $\mathbf{C}[\pi]$-ядром) системы функционалов $S_1, S_2 \in H^*$ называется замкнутое инвариантное подпространство $W_{S_1,S_2} := W_{S_1} \cap W_{S_2} \subseteq H$. Существуют системы из двух функционалов, $\mathbf{C}[\pi]$-ядра которых не допускают спектральный синтез. Пусть $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ — преобразования Лапласа функционалов $S_1, S_2 \in H^*$ и отношение $\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$ является мероморфной функцией от π. В настоящей работе найдены некоторые достаточные условия на целые функции $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$, при выполнении которых $\mathbf{C}[\pi]$-ядро системы функционалов S_1, S_2 допускает спектральный синтез.

1. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Неотрицательную функцию μ, определенную в окрестности $+\infty$, называют *уточненным весом порядка* $\rho \in [0, +\infty)$, если она возрастает, дифференцируема в окрестности $+\infty$ и $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\mu(r)}{\ln r} = \infty$, $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\mu'(r)r}{\mu(r)} = \rho$. Если μ — уточненный вес порядка ρ, то функция $\rho(r) := \dfrac{\ln\mu(r)}{\ln r}$ является уточненным порядком. При $\rho > 0$ верно и обратное, т. е. для любого уточненного порядка $\rho(r) \to \rho$ функция $\mu(r) := r^{\rho(r)}$ является уточненным весом порядка ρ. По известным свойствам уточненного порядка функция $\mu(r)r^{-\rho} = r^{\rho(r)-\rho}$ является медленно растущей, значит, равномерно по k из любого отрезка $[a; b] \subset (0; +\infty)$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\mu(kr)(kr)^{-\rho}}{\mu(r)r^{-\rho}} = 1, \qquad \lim_{r\to+\infty} \frac{\mu(kr)}{\mu(r)} = k^{\rho}. \tag{1}$$

Множество $E \subset \mathbf{C}$ называем *нуль-множеством*, если множество $|E| := \{|z| : z \in E\}$ имеет нулевую относительную меру.

Пусть π — целая функция вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r) \to \rho \in (0, 1)$ с всюду положительным индикатором, ν — обратная к функции $\mu(r) := r^{\rho(r)}$. Легко убедиться, что функция $\hat{\mu}(r) = \nu(\ln r)$ является уточненным весом нулевого порядка и существует такая константа $\kappa \geq 1$, что вне некоторого нуль-множества E выполняются оценки

$$\kappa^{-1}|z| \leq \hat{\mu}(|\pi(z)|) \leq \kappa |z|. \tag{2}$$

При этом

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln\hat{\mu}(r)}{\ln\ln r} = \lim_{t\to\infty} \frac{\hat{\mu}'(e^r)e^r r}{\hat{\mu}(e^r)} = \frac{1}{\rho} =: \hat{\rho} > 1. \tag{3}$$

Условие (3) означает, что функция $\hat{\mu}(e^r)$ является уточненным весом порядка $\hat{\rho}$. Значит, равномерно по k из любого отрезка $[a; b] \subset (0; +\infty)$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\hat{\mu}(e^{kr})}{\hat{\mu}(e^r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\hat{\mu}(r^k)}{\hat{\mu}(r)} = k^{\hat{\rho}} = k^{\frac{1}{\rho}}. \tag{4}$$

Пусть $\hat{\nu}(r) = \exp\mu(r)$ — обратная к функции $\hat{\mu}(r)$. Тогда функция $\ln\hat{\nu}(r)$ является обратной к функции $\hat{\mu}(e^r)$. Значит, функция $\ln\hat{\nu}(r)$ является уточненным весом порядка ρ. Следовательно, равномерно по k из любого отрезка $[a; b] \subset (0; +\infty)$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln\hat{\nu}(kr)}{\ln\hat{\nu}(r)} = k^{\rho}. \tag{5}$$

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — целые функции, допускающие представления $\mathscr{F} = \varphi f F$, $\mathscr{G} = \varphi g G$, где φ, f, F, g, G — целые функции. Считаем, что функции f, F, g, G являются π-симметричными, т. е. $f := \hat{f} \circ \pi$, $F := \hat{F} \circ \pi$, $g := \hat{g} \circ \pi$, $G := \hat{G} \circ \pi$, где $\hat{f}$, $\hat{F}$, $\hat{g}$, $\hat{G}$ — некоторые целые функции. Пусть разложения Адамара для функций $\hat{F}$ и $\hat{G}$ имеют вид

$$\hat{F}(\zeta) = \prod\nolimits_{\hat{\Lambda}} \left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\lambda}_i}\right), \qquad \hat{G}(\zeta) = \prod\nolimits_{\hat{\Gamma}} \left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\gamma}_i}\right),$$

где $\hat{\Lambda} := \{\hat{\lambda}_i\}$, $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_i\}$ — последовательности нулей функций $\hat{F}$ и $\hat{G}$ соответственно, занумерованные каким-либо образом. Считаем, что все элементы последовательностей $\hat{\Lambda} := \{\hat{\lambda}_i\}$ и $\hat{\Gamma} := \{\hat{\gamma}_i\}$ лежат вне единичного круга, т. е. $t_0 := \min_{i\in\mathbf{N}} \min\left\{|\hat{\lambda}_i|, |\hat{\gamma}_i|\right\} \geq 1$.

Введем обозначения. Во-первых, пусть

$$\Delta_{\hat{\Lambda}} := \sup\nolimits_n \frac{n}{\hat{\mu}(|\hat{\lambda}_n|)}, \qquad \Delta_{\hat{\Gamma}} := \sup\nolimits_n \frac{n}{\hat{\mu}(|\hat{\gamma}_n|)}, \qquad \Delta := \max\left\{\Delta_{\hat{\Lambda}};\ \Delta_{\hat{\Gamma}}\right\} < +\infty.$$

Во-вторых, для любого натурального n

$$L_n(z) := g(z)G_n(z)\mathscr{F}(z) - f(z)F_n(z)\mathscr{G}(z),$$

$$r_n(\delta) := (\kappa\hat{\mu}(R_n(\delta))), \qquad R_n(\delta) := \exp\left\{\left(4\kappa\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{2\rho}{1-\rho}}\ln t_n\right\},$$

где $t_n := \max\limits_{i=1,\dots,n} \max\left\{|\hat{\lambda}_i|, |\hat{\gamma}_i|\right\}$, $F_n := \hat{F}_n \circ \pi$, $G_n := \hat{G}_n \circ \pi$,

$$\hat{F}_n(\zeta) := \prod_{i\le n}\left(1-\frac{\zeta}{\hat{\lambda}_i}\right), \qquad \hat{G}_n(\zeta) := \prod_{i\le n}\left(1-\frac{\zeta}{\hat{\gamma}_i}\right).$$

В-третьих, для оценки функции $L_n(z)$ воспользуемся специальными характеристиками:

$$S_n := \sum_{i\ge n}\left|\frac{1}{\hat{\gamma}_i}-\frac{1}{\hat{\lambda}_i}\right|, \qquad K_M := \max_{i\in M}\left\{\max\left\{\left|\frac{\hat{\lambda}_i}{\hat{\gamma}_i}\right|, \left|\frac{\hat{\gamma}_i}{\hat{\lambda}_i}\right|\right\}\right\},$$

где M — произвольное непустое множество натуральных чисел. Если $M = \varnothing$, то полагаем $K_M = 1$.

3. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ

Рассмотрим вспомогательные оценки для функций F_n, G_n и L_n в терминах характеристик S_n и K_M.

Лемма 1. *При любых $\delta > 0$, достаточно больших натуральных n и z, удовлетворяющих условию $|z| \ge r_n(\delta)$, выполняются оценки:*

$$\ln|F_n(z)| \le \delta\,|z|, \qquad \ln|G_n(z)| \le \delta\,|z|, \tag{6}$$

$$|L_n(z)| \le (|f(z)\mathscr{G}(z)| + |g(z)\mathscr{F}(z)|)\, e^{\delta|z|}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $n(t;\hat{\Lambda})$ — число точек $\hat{\lambda}_i \in \hat{\Lambda}$ в круге $\{\zeta : |\zeta| < t\}$. Покажем, что для любого $t \ge 0$ выполняется неравенство $n(t;\hat{\Lambda}) \le \Delta\hat{\mu}(t)$. Для этого рассмотрим упорядочение $\hat{\Lambda}$: $\hat{\lambda}_{i_1}, \hat{\lambda}_{i_2}, \dots$, при котором $|\hat{\lambda}_{i_1}| \le |\hat{\lambda}_{i_2}| \le \dots$. Предположим, что в круге $|\zeta| \le t$ содержится n точек $\hat{\lambda}_{i_1}, \dots, \hat{\lambda}_{i_n}$. Положим $i_0 := \max\limits_{m=1,\dots,n} i_m$. Тогда по определению числа $\Delta_{\hat{\Lambda}}$ имеем $n(t;\hat{\Lambda}) = n \le i_0 \le \le \Delta_{\hat{\Lambda}}\hat{\mu}(|\hat{\lambda}_{i_0}|) \le \Delta\hat{\mu}(t)$. Значит (см. [10, гл. I, § 4, лемма 2]),

$$\ln\left|\hat{F}_n(\zeta)\right| \le \sum_{i\le n}\ln\left(1+\left|\frac{\zeta}{\hat{\lambda}_i}\right|\right) = \int_0^{t_n}\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right)dn(t;\hat{\Lambda}) \le$$

$$\le n(t_n;\hat{\Lambda})\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t_n}\right) + |\zeta|\int_0^{t_n}\frac{n(t;\hat{\Lambda})}{t\,(t+|\zeta|)}dt \le n(t_n;\hat{\Lambda})\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t_n}\right) + \int_1^{t_n}\frac{n(t;\hat{\Lambda})}{t}dt \le$$

$$\le \Delta\hat{\mu}(t_n)\left(\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t_n}\right)+\ln t_n\right) \le \Delta\frac{\hat{\mu}(t_n)}{\hat{\mu}(|\zeta|)}\ln\left(t_n+|\zeta|\right)\hat{\mu}(|\zeta|).$$

В силу (3) $\varepsilon := \dfrac{\hat{\rho}-1}{2} > 0$. При $k = \dfrac{\ln|\zeta|}{\ln t_n} \in [1;+\infty)$ логарифмическая производная

$$\frac{\psi_k'(k;t_n)}{\psi(k;t_n)} = \frac{1}{k}\left(\frac{t_n^k}{t_n+t_n^k}\frac{\ln t_n^k}{\ln\left(t_n+t_n^k\right)} - \frac{\hat{\mu}'(t_n^k)t_n^k\ln t_n^k}{\hat{\mu}(t_n^k)}\right)$$

функции $\psi(k;t_n) := \dfrac{\hat{\mu}(t_n)}{\hat{\mu}(t_n^k)}\ln\left(t_n+t_n^k\right)$ (по переменной k) мажорируется функцией $\dfrac{1}{k}\left(1-\hat{\rho}+\varepsilon\right) = -\dfrac{\varepsilon}{k}$ равномерно по достаточно большим t_n. Значит, при $k \ge 1$ и всех достаточно больших $t_n \ge 1$ выполняется неравенство

$$\ln\psi(k;t_n) = \int_1^k\frac{\psi_k'(t;t_n)}{\psi(t;t_n)}\,dt - \ln 2t_n \le \ln\frac{1}{2k^\varepsilon}.$$

Следовательно, при $|\zeta| \ge t_n$ и достаточно больших n имеем:

$$\ln\left|\hat{F}_n(\zeta)\right| \le \frac{\Delta}{2}\left(\frac{\ln t_n}{\ln|\zeta|}\right)^\varepsilon\hat{\mu}(|\zeta|). \tag{8}$$

Пусть $\delta > 0$. Из (8) вытекает, что $\ln\left|\hat{F}_n(\zeta)\right| \le \dfrac{\delta}{2\kappa}\hat{\mu}(|\zeta|)$ при достаточно большом n и $|\zeta| \ge$ $\ge R_n(\delta)$. Если $|z| \ge r_n(\delta)$ и $z \notin E$, то в силу (2) $|\zeta| = |\pi(z)| \ge \hat{\nu}\left(\dfrac{1}{\kappa}r_n(\delta)\right) \ge R_n(\delta)$, значит, $\ln|F_n(z)| = \ln\left|\hat{F}_n(\zeta)\right| \le \dfrac{\delta}{2\kappa}\hat{\mu}(|\zeta|) = \dfrac{\delta}{2\kappa}\hat{\mu}(|\pi(z)|)$. Выберем окружности $|z| = t'_k$, которые не пересекаются с исключительным нуль-множеством E и удовлетворяют условиям: $t'_k < t'_{k+1} \le 2t'_k$ и $t'_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Если $t'_k \le |z| \le t'_{k+1}$, то $\ln|F_n(z)| \le \ln M_{F_n}(|z|) \le \ln M_{F_n}(t'_{k+1}) \le \dfrac{\delta}{2\kappa}\hat{\mu}(M_\pi(t'_{k+1})) \le$ $\le \dfrac{\delta}{2}t'_{k+1} \le \delta t'_k \le \delta\,|z|$. Так как $r_n(\delta) \to \infty$ при $n \to \infty$, то при достаточно большом n выполняется неравенство $r_n(\delta) \ge t'_1$, значит, для таких n и z, удовлетворяющих условию $|z| \ge r_n(\delta)$, выполняется оценка $\ln|F_n(z)| \le \delta\,|z|$. Значит, первая из оценок (6) доказана. Вторая доказывается аналогично. Оценка (7) следует из оценок (6). Лемма доказана. □

Для $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbf{C}$ обозначим через $D_\sigma(\lambda)$ замкнутый круг с центром в точке λ радиуса $\sigma\,|\lambda|$. Пусть M — некоторое множество натуральных чисел, $m := \min M$. Если $M \ne \varnothing$, то положим

$$E_M := \bigcup_{i\in M}\left(D_\sigma\left(\hat{\lambda}_i\right) \cup D_\sigma\left(\hat{\gamma}_i\right)\right), \qquad \hat{F}_M(\zeta) := \prod\nolimits_{i\in M}\left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\lambda}_i}\right), \qquad \hat{G}_M(\zeta) := \prod\nolimits_{i\in M}\left(1 - \frac{\zeta}{\hat{\gamma}_i}\right).$$

Если $M = \varnothing$, то $E_M := \varnothing$, а $\hat{F}_M$ и $\hat{G}_M$ полагаем тождественно равными единице. Легко показать (см. [11]), что вне множества E_M

$$\left|\ln\left|\frac{\hat{G}_M(\zeta)}{\hat{F}_M(\zeta)}\right|\right| \le \frac{1}{\sigma}S_m(|\zeta|+1), \tag{9}$$

$$\left|1 - \frac{\hat{G}_M(\zeta)}{\hat{F}_M(\zeta)}\right| \le S'_m(|\zeta|+1)\exp\left(S'_m(|\zeta|+1)\right), \qquad S'_m := \frac{\sqrt{2}\pi}{\sigma}S_m. \tag{10}$$

Пусть $0 < \sigma < 1/2$. Символом $M_n(\delta)$ обозначим множество значений индекса i, больших n, для которых хотя бы одно из чисел $|\hat{\lambda}_i|\,(1-\sigma)$ и $|\hat{\gamma}_i|\,(1-\sigma)$ не превосходит $R_n(\delta)$, а символом $N_n(\delta)$ обозначим множество $\{i > n : i \notin M_n(\delta)\}$. Множество кружков $E_{N_n(\delta)} = \bigcup_{i\in N_n(\delta)}\left(D_\sigma\left(\hat{\lambda}_i\right) \cup D_\sigma\left(\hat{\gamma}_i\right)\right)$ и круг $|\zeta| \le R_n(\delta)$ не имеют общих точек, так как по определению множества $N_n(\delta)$

$$\min\left\{|\zeta| : \zeta \in E_{N_n(\delta)}\right\} \ge \min\left\{|\hat{\lambda}_i|\,(1-\sigma),\ |\hat{\gamma}_i|\,(1-\sigma)\right\} > R_n(\delta).$$

Выберем $\alpha > 1$ и обозначим через $r'_{n,\alpha}(\delta)$ число из отрезка $[r_n(\delta);\ (\kappa\hat{\mu}(R_n^\alpha(\delta)))]$, которое не лежит во множестве $|E|$. Такое число при достаточно больших n найдется, так как из (4) вытекает, что $(\kappa\hat{\mu}(R_n^\alpha(\delta)))\,r_n(\delta)^{-1} \to \alpha^{\hat{\rho}} > 1$. Для всех z из окружности $|z| = r'_{n,\alpha}(\delta)$ выполняется неравенство

$$|\pi(z)| \le R'_{n,\alpha}(\delta) := 3K_{M_n(\delta)}R_n^{\alpha\kappa'}(\delta), \qquad \kappa' := \kappa^{2\rho}.$$

Действительно, так как окружность $|z| = r'_{n,\alpha}(\delta)$ не пересекается с множеством E, то из (2) вытекают неравенства $|\pi(z)| \le \hat{\nu}\left(\kappa r'_{n,\alpha}(\delta)^\rho\right) \le \hat{\nu}\left(\kappa^2\hat{\mu}(R_n^\alpha(\delta))\right)$. Значит (см. формулу (5)), при достаточно большом n выполняются неравенства $|\pi(z)| \le R_n^{\alpha\kappa'}(\delta)$. Остальное вытекает из очевидных неравенств $3 \ge 1$ и $K_{M_n(\delta)} \ge 1$.

Если $M_n(\delta) \ne \varnothing$, то при любом $i \in M_n(\delta)$, по крайней мере, одно из чисел $|\hat{\lambda}_i|\,(1-\sigma)$, $|\hat{\gamma}_i|\,(1-\sigma)$ не превосходит $R_n(\delta)$. Предположим, что $|\hat{\lambda}_i|\,(1-\sigma) \le R_n(\delta)$. Из неравенства $K_{M_n(\delta)} \ge 1$ вытекает, что

$$|\hat{\lambda}_i|\,(1+\sigma) \le \frac{1+\sigma}{1-\sigma}R_n(\delta) \le 3R_n^{\alpha\kappa'}(\delta) \le 3K_{M_n(\delta)}R_n^{\alpha\kappa'}(\delta). \tag{11}$$

Так как при $i \in M_n(\delta)$ выполняется неравенство $|\hat{\gamma}_i| \le K_{M_n(\delta)}\,|\lambda_i|$, то

$$|\hat{\gamma}_i|\,(1+\sigma) \le K_{M_n(\delta)}|\hat{\lambda}_i|\,(1+\sigma) \le 3K_{M_n(\delta)}R_n^{\alpha\kappa'}(\delta). \tag{12}$$

Из неравенств (11) и (12) вытекает, что при достаточно большом n множество $E_{M_n(\delta)}$ лежит в круге $|\zeta| \le R'_{n,\alpha}(\delta)$.

В следующей лемме проводится оценка $L_n(z)$ при условии, что $|z| \le r_n(\delta)$.

Лемма 2. *Предположим, что* $\Delta < +\infty$. *Для любых* $\delta > 0$ *и* $\sigma \in (0; 1/2)$ *при достаточно больших* n *в круге* $|z| \le r_n(\delta)$ *верна следующая оценка:*

$$|L_n(z)| \le C_\sigma S_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right) M_{g\mathscr{F}}\left(r'_{n,\alpha}(\delta)\right) \exp\left\{C_\sigma S_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right)+\delta r_n(\delta)\right\},$$

где $C_\sigma = 2\sqrt{2}\pi/\sigma$.

Доказательство. Пусть $G^{(n)} := \hat{G}^{(n)} \circ \pi$, $F^{(n)} := \hat{F}^{(n)} \circ \pi$, где

$$\hat{F}^{(n)}(\zeta) = \prod_{i>n}\left(1-\frac{\zeta}{\hat{\lambda}_i}\right), \qquad \hat{G}^{(n)}(\zeta) = \prod_{i>n}\left(1-\frac{\zeta}{\hat{\gamma}_i}\right).$$

Учитывая, что $\mathbf{N} \cap (n; +\infty) = M_n \cup N_n$, получим представления:

$$\hat{F}^{(n)}(\zeta) = \hat{F}_{M_n(\delta)}(\zeta)\,\hat{F}_{N_n(\delta)}(\zeta), \qquad \hat{G}^{(n)}(\zeta) = \hat{G}_{M_n(\delta)}(\zeta)\,\hat{G}_{N_n(\delta)}(\zeta),$$

где функции $\hat{F}_{M_n(\delta)}$, $\hat{G}_{M_n(\delta)}$, $\hat{F}_{N_n(\delta)}$, $\hat{G}_{N_n(\delta)}$ определяются по множествам $M_n(\delta)$ и $N_n(\delta)$. Пусть $F_{M_n(\delta)} := \hat{F}_{M_n(\delta)} \circ \pi$, $F_{N_n(\delta)} := \hat{F}_{N_n(\delta)} \circ \pi$, $G_{M_n(\delta)} := \hat{G}_{M_n(\delta)} \circ \pi$, $G_{N_n(\delta)} := \hat{G}_{N_n(\delta)} \circ \pi$. Тогда для любого $z \in \tilde{\zeta} := \pi^{-1}(\zeta)$ комплексное число $L_n(z)$ можно представить в следующем виде:

$$g(z)G_n(z)\mathscr{F}(z)\left[\left(1-\frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)}\right)+\frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)}\left(1-\frac{G_{N_n(\delta)}(z)}{F_{N_n(\delta)}(z)}\right)\right].$$

Оценим это выражение в круге $|z| \le r_n(\delta)$. В силу оценок (6) при достаточно больших n и $|z| \le r_n(\delta)$ верно неравенство

$$|G_n(z)| \le \max_{|z|=r_n(\delta)} |G_n(z)| \le e^{\delta r_n(\delta)}. \tag{13}$$

Функция $g(z)\mathscr{F}(z)\left(1-\dfrac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)}\right)$ целая, и окружность $|\zeta| = R'_n(\delta)$ охватывает исключительное множество $E_{M_n(\delta)}$, вне которого выполняется оценка (10) с $M = M_n(\delta)$. Поэтому для $|z| \le r'_{n,\alpha}(\delta)$ и, тем более, при $|z| \le r_n(\delta)$ с учетом того, что $\min M_n(\delta) > n$, получим:

$$\begin{aligned}\left|g(z)\mathscr{F}(z)\left(1-\frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)}\right)\right| &\le M_{g\mathscr{F}}\left(r'_{n,\alpha}(\delta)\right) \max_{|\zeta|=R'_{n,\alpha}(\delta)}\left|1-\frac{\hat{G}_{M_n(\delta)}(\zeta)}{\hat{F}_{M_n(\delta)}(\zeta)}\right| \le \\ &\le M_{g\mathscr{F}}\left(r'_{n,\alpha}(\delta)\right) \sup_{|\zeta|=R'_{n,\alpha}(\delta)}\left\{S'_n(|\zeta|+1)\exp\left(S'_n(|\zeta|+1)\right)\right\} \le \\ &\le M_{g\mathscr{F}}\left(r'_{n,\alpha}(\delta)\right) S'_n(R'_{n,\alpha}(\delta)+1)\exp S'_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Аналогично, используя оценку (9) с $M = M_n(\delta)$ и тот факт, что функция $g(z)\mathscr{F}(z)\dfrac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)}$ является целой, при $|r| \le r'_{n,\alpha}(\delta)$ получим:

$$\left|g(z)\mathscr{F}(z)\frac{G_{M_n(\delta)}(z)}{F_{M_n(\delta)}(z)}\right| \le M_{g\mathscr{F}}\left(r'_{n,\alpha}(\delta)\right)\exp S'_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right). \tag{15}$$

Из определения множества $N_n(\delta)$ следует, что множество $E_{N_n(\delta)}$ лежит вне круга $|\zeta| \le R_n(\delta)$, следовательно, в этом круге функция $1-\dfrac{\hat{G}_{N_n(\delta)}(\zeta)}{\hat{F}_{N_n(\delta)}(\zeta)}$ голоморфна и для нее выполняется оценка (10) с $M = N_n(\delta)$. Поэтому при $|z| \le r_n(\delta)$ имеем:

$$\left|1-\frac{G_{N_n(\delta)}(z)}{F_{N_n(\delta)}(z)}\right| \le \max_{|\zeta|=R_n(\delta)}\left|1-\frac{\hat{G}_{N_n(\delta)}(\zeta)}{\hat{F}_{N_n(\delta)}(\zeta)}\right| \le S'_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right)\exp\left(S'_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right)\right). \tag{16}$$

Из выражения для $L_n(z)$ и оценок (13)–(16) получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|L_n(z)| &\le 2S'_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right) M_{g\mathscr{F}}\left(r'_{n,\alpha}(\delta)\right)\exp\left(2S'_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right)+\delta r_n(\delta)\right) \le \\ &\le C_\sigma S_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right) M_{g\mathscr{F}}\left(r'_{n,\alpha}(\delta)\right)\exp\left(C_\sigma S_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta)+1\right)+\delta r_n(\delta)\right).\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

4. ИТОГОВЫЕ ОЦЕНКИ

Предположим, что для функций φ, f, F, g, G выполнено следующее условие: существуют постоянная $C > 0$ и ограниченная тригонометрически выпуклая 2π-периодическая функция $h(\theta)$, такие, что для любых $z \in \mathbf{C}$

$$\max\left\{|f(z)\mathscr{G}(z)|\,; |g(z)\mathscr{F}(z)|\right\} \le C\exp\left(h(\theta)\,|z|\right), \tag{17}$$

где $\theta := \arg z$. При этом предположении справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Если нулевые множества $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что для некоторого $\delta > 0$ выполняется неравенство*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln S_n}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} < -\hat{C}(\delta)\left(h+\delta\right), \tag{18}$$

где $\hat{C}(\delta) := \kappa^{1+2\rho}\left(2\kappa\Delta/\delta\right)^{\frac{2}{1-\rho}}$, $h = \max_\theta h(\theta) - \min\left\{\min_\theta h(\theta); 0\right\}$, то существуют возрастающая последовательность $N_0 = \{n_j\}$ натуральных чисел и убывающая к нулю последовательность $\{\varepsilon_j\}$ такие, что $|L_{n_j}(z)| \le \varepsilon_j \exp\left(\left(h(\theta)+\delta\right)|z|\right)$ для любых $z \in \mathbf{C}$.

Доказательство. Из соотношения (18) вытекает, что найдутся $\alpha > 1$, $\delta' \in (0,\delta)$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $N_0 = \{n_j\}$ такая, что для любых j выполняется неравенство $\ln(1/S_{n_j}) > h'\hat{\mu}\left(t_{n_j}\right)$, где $h' > \hat{C}(\delta')(h+\delta') > 0$, $\delta' \in (0,\delta)$. Поэтому для любых j имеем $S_{n_j} < \exp\left[-h'\hat{\mu}\left(t_{n_j}\right)\right]$. Значит, для любого $r \in \mathbf{R}$ последовательность $S_{n_j}t_{n_j}^r$ сходится к нулю.

В силу нашего предположения (17) и оценки (7) для всех $n \ge n_0$ и $|z| \ge r_n(\delta')$ получим:

$$|L_n(z)| \le \left(|f(z)\mathscr{G}(z)| + |g(z)\mathscr{F}(z)|\right)e^{\delta'|z|} \le 2C\exp\left(\left(h(\theta)+\delta'\right)|z|\right). \tag{19}$$

Оценим характеристику $K_{M_n(\delta')}$. Из определения множества $M_n(\delta')$ вытекает, что при всех $i \in M_n(\delta')$ хотя бы одно из чисел $\left|\hat{\lambda}_i\right|$ или $|\hat{\gamma}_i|$ не превосходит $\dfrac{R_n(\delta')}{1-\sigma}$. Пусть, например, $\left|\hat{\lambda}_i\right| \le \dfrac{R_n(\delta')}{1-\sigma}$. Тогда равномерно по $i \in M_n(\delta')$ выполняются неравенства

$$\left|1-\left|\frac{\hat{\lambda}_i}{\hat{\gamma}_i}\right|\right| \le \left|\frac{1}{\hat{\lambda}_i}-\frac{1}{\hat{\gamma}_i}\right|\left|\hat{\lambda}_i\right| \le S_n\frac{R_n(\delta')}{1-\sigma}.$$

Из этих неравенств вытекает, что $K_{M_{n_j}(\delta')} \to 1$ при $j \to \infty$.

Фиксируем произвольное $\sigma \in (0,1/2)$ и воспользуемся оценкой из леммы 2. Согласно этой оценке, при $|z| \le r_n(\delta')$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}|L_n(z)| &\le C_\sigma S_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta')+1\right)M_{g\mathscr{F}}\left(r'_{n,\alpha}(\delta')\right)\exp\left\{C_\sigma S_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta')+1\right)+\delta' r_n(\delta')\right\} \le\\ &\le CC_\sigma S_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta')+1\right)\exp\left\{C_\sigma S_n\left(R'_{n,\alpha}(\delta')+1\right)+\delta' r_n(\delta')\right\}\exp\left\{h_{\max}r'_{n,\alpha}(\delta')\right\}.\end{aligned}$$

Так как $\max\limits_\theta h(\theta)r'_{n,\alpha}(\delta') \le hr'_{n,\alpha}(\delta') + h(\theta)|z|$ при любом θ, то для любого θ при $|z| \le r_n(\delta')$ и достаточно больших n выполняется неравенство

$$|L_n(z)| \le \exp\left\{\left(\frac{D_n}{\hat{\mu}\left(t_n\right)}+\frac{d_n}{\hat{\mu}\left(t_n\right)}\right)\hat{\mu}\left(t_n\right)\right\}\exp h(\theta)\,|z| =: \varepsilon_n \exp h\left(\theta\right)|z|,$$

где

$$\frac{D_n}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} := -\frac{\ln\frac{1}{S_n}}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} + h\frac{r'_{n,\alpha}(\delta')}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} + \delta'\frac{r_n(\delta')}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} \le -\frac{\ln\frac{1}{S_n}}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} + \kappa\frac{\hat{\mu}\left(R_n^\alpha(\delta')\right)}{\hat{\mu}\left(t_n\right)}\left(h+\delta'\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{d_n}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} &:= \frac{\ln\left(CC_\sigma\left(R'_n(\delta')+1\right)\right)+C_\sigma S_n\left(R'_n(\delta')+1\right)}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} \le\\ &\le \frac{\ln R'_n(\delta')}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} + \frac{\ln 2CC_\sigma}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} + C_\sigma S_n R'_n(\delta') + C_\sigma S_n.\end{aligned}$$

Так как $K_{M_{n_j}(\delta')} \to 1$ и $S_{n_j}t_{n_j}^\alpha \to 0$ при любом $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\dfrac{d_{n_j}}{\hat{\mu}\left(t_{n_j}\right)} \to 0$ при $j \to \infty$. Из определения $R_n(\delta)$ и соотношения (4) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\hat{\mu}\left(R_n(\delta)\right)}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} = \left(4\kappa\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{2\hat{\rho}}{\hat{\rho}-1}} = \left(4\kappa\frac{\Delta}{\delta}\right)^{\frac{2}{1-\rho}}.$$

Значит, если α достаточно близко к единице, то начиная с некоторого номера

$$\frac{D_{n_j}}{\hat{\mu}\left(t_{n_j}\right)} \leq \frac{\ln S_{n_j}}{\hat{\mu}\left(t_{n_j}\right)} + \kappa \frac{\hat{\mu}\left(R^{\alpha}_{n_j}(\delta')\right)}{\hat{\mu}\left(t_{n_j}\right)}(h+\delta') < -h' + \hat{C}(\delta')(h+\delta') < 0.$$

Это означает, что последовательность ε'_{n_j} сходится к нулю. При этом для всех $|z| \leq r_{n_j}(\delta')$ выполняется неравенство $\left|L_{n_j}(z)\right| \leq \varepsilon'_{n_j} \exp\left(h(\theta)|z|\right)$.

Далее, из оценки (19) следует, что для всех $|z| \geq r_{n_j}(\delta')$ будет выполняться неравенство

$$\left|L_{n_j}(z)\right| \leq \varepsilon''_{n_j} \exp\left(\left(h(\theta)+\delta\right)|z|\right), \tag{20}$$

где $\varepsilon''_{n_j} := 2C\exp\left(-\left(\delta-\delta''\right)r_{n_j}(\delta')\right) \to 0$ при $j \to \infty$. Для всех комплексных z получим $\left|L_{n_j}\right| \leq \varepsilon_j \times \exp\left(\left(h(\theta)+\delta\right)|z|\right)$, причем $\varepsilon_j := \max\left\{\varepsilon'_{n_j}; \varepsilon''_{n_j}\right\} \to 0$ при $j \to \infty$. Лемма доказана. □

Далее рассмотрим некоторые дополнения к лемме 3. Во-первых, в лемме 3 предположение существования мажоранты $C\exp\left(h(\theta)|z|\right)$ для функций $f\mathscr{G}$ и $g\mathscr{F}$ можно заменить следующим предположением: функции $f\mathscr{G}$ и $g\mathscr{F}$ имеют конечный тип, а функцию $h(\theta)$ положить равной $\max\left\{h_{f\mathscr{G}}(\theta), h_{g\mathscr{F}}(\theta)\right\} + \varepsilon$, где $h_{f\mathscr{G}}(\theta)$, $h_{g\mathscr{F}}(\theta)$ — индикаторы $f\mathscr{G}$ и $g\mathscr{F}$ соответственно и ε — произвольное положительное число.

Во-вторых, если $f\mathscr{G}$ и $g\mathscr{F}$ имеют конечный тип, то оценку (19) можно заменить оценкой $|L_n(z)| \leq 2C\exp\left(\left(\hat{h}(\theta)+\varepsilon+\delta''\right)|z|\right)$, где $\hat{h}(\theta) := \max\left\{h_{f\mathscr{G}}(\theta); h_{g\mathscr{F}}(\theta)\right\}$. Из этой оценки следует, что для $|z| \geq r_{n_j}(\delta')$ вместо (20) будет иметь место оценка $|L_{n_\nu}| \leq \varepsilon''_\nu \exp\left(\left(\hat{h}(\theta)+\varepsilon+\delta\right)|z|\right)$. В остальном, повторяя доказательство леммы 3, приходим к заключению о справедливости следующей леммы.

Лемма 4. *В условиях леммы 3 для любого $\varepsilon > 0$ существуют возрастающая последовательность $N_0 = \{n_j\}$ натуральных чисел и убывающая к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_j\}$ такие, что для всех достаточно больших j выполнена оценка*

$$\left|L_{n_j}(z)\right| \leq \varepsilon_j \exp\left(\left(\hat{h}(\theta)+\varepsilon+\delta\right)|z|\right).$$

В-третьих, рассмотрим случай

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln S_n}{\hat{\mu}\left(t_n\right)} = -\infty. \tag{21}$$

Лемма 5. *Если нулевые множества $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что выполняется условие* (21), *то в условиях леммы 3 существуют возрастающая последовательность $N_0 = \{n_j\}$ натуральных чисел и убывающая к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_j\}$ такие, что для любого $\delta > 0$ и всех достаточно больших j выполнена равномерная по z оценка $\left|L_{n_j}(z)\right| \leq \varepsilon_j \exp\left(\left(\hat{h}(\theta)+\delta\right)|z|\right)$.*

Доказательство. Так как функция $\hat{C}(\delta)$ убывает и $\lim\limits_{\delta\to 0}\hat{C}(\delta) = +\infty$, то для любого $k \in \mathbf{N}$ существует единственное решение $\delta_k \in (0;1)$ уравнения $\kappa\hat{C}(\delta)(h+1) = k + \kappa\hat{C}(1)(h+1)$. При этом последовательность $\{\delta_k\}$ убывает, стремится к нулю и для всех k

$$\kappa\hat{C}(\delta_k)(h+\delta_k) = \kappa\hat{C}(\delta_k)(h+1) + \kappa\hat{C}(\delta_k)(\delta_k-1) < \kappa\hat{C}(\delta_k)(h+1) = k + \kappa\hat{C}(1)(h+1).$$

В силу соотношения (21) можно считать, что для каждого $j \geq k$ выполнены неравенства

$$-\frac{\ln S_{n_j}}{\hat{\mu}\left(t_{n_j}\right)} > h'_k > \kappa\hat{C}(\delta_k)(h+\delta_k),$$

где $h'_k := k + \kappa\hat{C}(1)(h+1)$. Пусть $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Ссылаясь на лемму 4, заключаем, что для любого $k \in \mathbf{N}$ существует убывающая к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_{k.j}\}$ такая, что для всех достаточно больших j выполняется равномерная по z оценка

$$\left|L_{n_j}(z)\right| \leq \varepsilon_{k,j} \exp\left(\left(\hat{h}(\theta)+\varepsilon_k+\delta_k\right)|z|\right).$$

Осталось для любого j положить $\varepsilon_j := \varepsilon_{j,,j}$. Лемма доказана. □

5. ПОДМОДУЛИ С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

Пусть $O(\mathbf{C})$ — кольцо целых функций одной комплексной переменной с топологией равномерной сходимости на компактах, $O_\pi(\mathbf{C})$ — подкольцо $O(\mathbf{C})$, состоящее из π-симметричных целых функций, т. е. из целых функций, допускающих представление в виде композиции $c \circ \pi$, где $c \in O(\mathbf{C})$. Система элементов $f_1, \dots, f_n \in O(\mathbf{C})$ называется *независимой*, если выполняется импликация: если $c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n = 0$ и $c_1, \dots, c_n \in O_\pi(\mathbf{C})$, то $c_1, \dots, c_n = 0$. Ранг множества $I \subseteq O(\mathbf{C})$ — это максимальное число элементов в независимых системах $f_1, \dots, f_n \in I$. Замкнутый подмодуль в P ранга 1 автоматически является интенсивным и насыщенным [5]. Это означает, что проверка обильности такого подмодуля в P сводится к проверке его устойчивости.

Пусть замкнутый подмодуль $I \subseteq P$ порожден функциями $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$. Покажем, что ранг I равен 1. Если $f_1, f_2 \in I$, то $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$, где $c_1 := f_2/\varphi$, $c_2 := -f_1/\varphi$ — целые функции. Убедимся, что $c_1, c_2 \in O_\pi(\mathbf{C})$ на примере c_1. Действительно, существуют обобщенные последовательности $r_1^\alpha := \hat{r}_1^\alpha \circ \pi$, $r_2^\alpha := \hat{r}_2^\alpha \circ \pi \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что $r_1^\alpha \mathscr{F} + r_2^\alpha \mathscr{G} = \varphi\left(r_1^\alpha fF + r_2^\alpha gG\right) \to f_2$ в топологии пространства P. Так как вложение $P \subseteq O(\mathbf{C})$ является непрерывным, то $r_1^\alpha fF + r_2^\alpha gG \to c_1$ в топологии пространства $O(\mathbf{C})$. Это означает, что обобщенная последовательность $\hat{r}_1^\alpha \hat{f}\hat{F} + \hat{r}_2^\alpha \hat{g}\hat{G}$ сходится к некоторой целой функции $\hat{c}_1$ в топологии пространства $O(\mathbf{C})$. При этом $c_1 = \hat{c}_1 \circ \pi$.

Фиксируем $\lambda \in \mathbf{C}$, для которой выполняется условие: найдется $z_0 \in \tilde{\lambda} := \pi^{-1}(\lambda)$ такое, что $\mathscr{F}(z_0)\mathscr{G}(z_0) \neq 0$. Символом $A(\lambda)$ обозначим совокупность векторов $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{C}^2$, для которых $a_1\mathscr{F}(z) + a_2\mathscr{G}(z) = 0$ при любом $z \in \tilde{\lambda}$. В силу предложения 5.5 из [5] замкнутый подмодуль I является устойчивым тогда и только тогда, когда для каждого вектора $a \in A(\lambda)$ существуют обобщенные последовательности $r_1^\alpha, r_2^\alpha \in \mathbf{C}[\pi]$, такие, что $r_1^\alpha|_{\tilde{\lambda}} = a_1$, $r_2^\alpha|_{\tilde{\lambda}} = a_2$ и $r_1^\alpha \mathscr{F} + r_2^\alpha \mathscr{G} \to 0$ в топологии P.

Теорема 1. *Если для некоторого $\delta > 0$ и некоторой ограниченной тригонометрически выпуклой 2π-периодической функции $h(\theta)$, удовлетворяющей условию $\hat{h}(\theta) + \delta < h(\theta) + \delta < H_\Omega(\theta)$, нулевые множества $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что выполнено* (18)*, то замкнутый подмодуль I, порождаемый функциями $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$, является обильным.*

Доказательство. Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbf{C}$ такую, что $\mathscr{F}(z_0)\mathscr{G}(z_0) \neq 0$. Функции $\mathscr{F}(z)/\mathscr{F}(z_0)$, $\mathscr{G}(z)/\mathscr{G}(z_0)$ порождают тот же подмодуль I, что и исходные, кроме того, они удовлетворяют условиям теоремы вместе с функциями $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$. Поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $\mathscr{F}(z_0) = 1$, $\mathscr{G}(z_0) = 1$. Для доказательства теоремы достаточно построить последовательности P_j, $Q_j \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что

$$P_j\mathscr{F} - Q_j\mathscr{G} \to 0 \quad \text{в} \quad P \quad \text{и} \quad P_j(z_0) = Q_j(z_0) = 1. \tag{22}$$

Так как любой главный подмодуль в P является обильным, то существуют последовательности $p_m, q_m \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что $p_m\mathscr{F} \to g\mathscr{F}$ и $q_m\mathscr{G} \to f\mathscr{G}$ по норме $\|\psi(z)\| := \sup\limits_{z\in\mathbf{C}} |\psi(z)| \exp\left(-h(\theta)\,|z|\right)$. Пусть $N_0 := \{n_j\}$, $\{\varepsilon_j\}$ — последовательности из леммы 3. Положим $\hat{P}_j(\zeta) := \hat{p}_{m_j}(\zeta)\hat{G}_{n_j}(\zeta)$, $\hat{Q}_j(\zeta) := \hat{q}_{m_j}(\zeta)\hat{F}_{n_j}(\zeta)$. Здесь $\{k_j\}$, $\{l_j\}$, $\{m_j\}$ — возрастающие последовательности натуральных чисел, $\hat{p}_{m_j}$, $\hat{q}_{m_j}$ — последовательности полиномов. Покажем, как выбрать эти последовательности, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) последовательность $\tilde{L}_j(z) := \tilde{P}_j(z)\mathscr{F}(z) - \tilde{Q}_j(z)\mathscr{G}(z)$, где $\tilde{P}_j := \hat{P}_j \circ \pi$, $\tilde{Q}_j := \hat{Q}_j \circ \pi$, сходится к нулю в топологии P;

2) существуют $\alpha > 0$ и $j_0 \in \mathbf{N}$, для которых при $j \geq j_0$ выполняется неравенство $\left|\tilde{P}_j(z_0)\right| \geq \alpha$.

Пусть $p_{m_j} := \hat{p}_{m_j} \circ \pi$, $q_{m_j} := \hat{q}_{m_j} \circ \pi$. Функция $\tilde{L}_j(z)$ отличается от функции $L_{n_j}(z)$ функциональными множителями $g(z)$ и $f(z)$, которые заменены аппроксимирующими их π-симметричными многочленами $p_{m_j}(z)$ и $q_{m_j}(z)$ соответственно. Представим $\tilde{L}_j(z)$ в виде суммы

$$\tilde{L}_j^{(1)}(z) + \tilde{L}_j^{(2)}(z) + \tilde{L}_j^{(2)}(z),$$

где

$$\tilde{L}_j^{(1)}(z) := \left[p_{m_j}(z) - g(z)\right] G_{n_j}(z)\mathscr{F}(z), \qquad \tilde{L}_j^{(2)}(z) := g(z)G_{n_j}(z)\mathscr{F}(z) - f(z)F_{n_j}(z)\mathscr{G}(z),$$
$$\tilde{L}_j^{(3)}(z) := \left[f(z) - q_{m_j}(z)\right] F_{n_j}(z)\mathscr{G}(z).$$

$\tilde{L}_j^{(2)}(z)$ совпадает с $L_{n_j}(z)$. По лемме 4 $\left|\tilde{L}_j^{(2)}(z)\right| \leq \varepsilon_j \exp\left(\left(h(\theta) + \delta\right)|z|\right)$ для любого $z \in \mathbf{C}$. При фиксированном n_j значение $m_j = m\left(n_j\right)$ подбирается так, чтобы выполнялись неравенства

$\left|\tilde{L}_j^{(1)}(z)\right| \le \varepsilon_j \exp\left(\left(h(\theta)+\delta\right)|z|\right)$, $\left|\tilde{L}_j^{(3)}(z)\right| \le \varepsilon_j \exp\left(\left(h(\theta)+\delta\right)|z|\right)$ при всех $z \in \mathbf{C}$. Из вышеизложенного следует, что для всех j верна равномерная по $z \in \mathbf{C}$ оценка $\left|\tilde{L}_j(z)\right| \le 3\varepsilon_j \exp\left(\left(h(\theta)+\delta\right)|z|\right)$, и, значит, при указанном выборе m_j выполняется условие 1).

Далее, $\hat{p}_{m_j}(\zeta_0)\,\bar{G}_{n_j}(\zeta_0) = p_{m_j}(z_0)\tilde{G}_{n_j}(z_0) \to \mathscr{G}(z_0) = 1$ при $j \to \infty$. Поэтому при некоторых $\alpha > 0$ и $j_0 \ge j'$ для всех $j \ge j_0$ будет выполнено неравенство $\left|\tilde{P}_j(z_0)\right| = \left|p_{m_j}(z_0)\tilde{G}_{n_j}(z_0)\right| \ge \alpha$. Это означает, что выполняется условие 2).

Далее построим по функциям $\tilde{P}_j$ и $\tilde{Q}_j$ функции $P_j, Q_j \in \mathbf{C}[\pi]$ такие, что выполнены соотношения (22). Это можно сделать следующим образом. Положим $P_j(z) = (\pi(z) - a_j)\,\tilde{P}_j(z)$, $Q_j(z) = (\pi(z) - a_j)\,\tilde{Q}_j(z) - \dfrac{\tilde{Q}_j(z_0)}{\tilde{P}_j(z_0)} + 1$, где $a_j = \zeta_0 - \dfrac{1}{\tilde{P}_j(z_0)}$, $j \ge j_0$. Тогда $P_j(z_0) = Q_j(z_0) = 1$ и

$$P_j(z)\mathscr{F}(z) - Q_j(z)\mathscr{G}(z) = (\pi(z) - a_j)\left(\tilde{P}_j(z)\mathscr{F}(z) - \tilde{Q}_j(z)\mathscr{G}(z)\right) - \left(1 - \frac{\tilde{Q}_j(z_0)}{\tilde{P}_j(z_0)}\right)\mathscr{G}(z).$$

Так как $|\pi(z) - a_\nu| \le |\pi(z)| + |\zeta_0| + \frac{1}{\alpha}$ при $j \ge j_0$, и $\tilde{P}_j\mathscr{F} - \tilde{Q}_j\mathscr{G} \to 0$ в P, то первое слагаемое в правой части равенства стремится к нулю в P. При этом в силу условий 1) и 2)

$$1 - \frac{\tilde{Q}_j(z_0)}{\tilde{P}_j(z_0)} = \frac{1}{\tilde{P}_j(z_0)}\left(\tilde{P}_j(z_0) - \tilde{Q}_j(z_0)\right) = \frac{1}{\tilde{P}_j(z_0)}\left(\tilde{P}_j(z_0)\mathscr{F}(z_0) - \tilde{Q}_j(z_0)\mathscr{G}(z_0)\right) \to 0.$$

Значит, и второе слагаемое стремится к нулю в P. Теорема доказана. □

С уменьшением δ усиливаются требования на близость точек из $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$, а возможный рост функций $f\mathscr{G}$ и $g\mathscr{F}$ приближается к экстремальному.

Теорема 2. *Если для некоторого $\delta > 0$ и некоторой ограниченной тригонометрически выпуклой 2π-периодической функции $h(\theta)$, удовлетворяющей условию $\hat{h}(\theta) + \delta < h(\theta) + \delta < H_\Omega(\theta)$, нулевые множества $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Gamma}$ можно упорядочить так, что выполнено* (21)*, то замкнутый $\mathbf{C}[\pi]$-подмодуль $I \subseteq P$, порождаемый функциями $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$, является обильным.*

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и доказательство теоремы 1, но при оценке функции $L_{n_j}(z)$ вместо леммы 4 нужно использовать лемму 5.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ К СПЕКТРАЛЬНОМУ СИНТЕЗУ

Пусть $S_1, S_2 \in H^*$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ — характеристические функции функционалов S_1 и S_2 соответственно. Из теоремы двойственности, теоремы 1 и теоремы 2 вытекает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если целые функции $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ удовлетворяют условиям теоремы 1 или теоремы 2, то $\mathbf{C}[\pi]$ — ядро W_{S_1,S_2} системы функционалов $S_1, S_2 \in H^*$ допускает спектральный синтез.*

Рассмотрим примеры применения теоремы 3. Во-первых, пусть произведения $\mathscr{F}(z) = \varphi(z)f(z)$, $\mathscr{G}(z) = \varphi(z)g(z)$ и частное $\dfrac{\mathscr{F}(z)\mathscr{G}(z)}{\varphi(z)} = \varphi(z)f(z)g(z)$ принадлежат P. Здесь $f = \hat{f} \circ \pi$, $g = \hat{g} \circ \pi$ и φ, $\hat{f}$, $\hat{g}$ — целые функции экспоненциального типа. В этом случае $F(z) \equiv G(z) \equiv 1$, следовательно, $S_n = 0$. Все условия теоремы 2 выполнены, значит, подпространство W_{S_1,S_2} допускает спектральный синтез.

Во-вторых, в условиях предыдущего примера предположим, что функция φ имеет вполне регулярный рост и ее индикатор $h_\varphi(\theta)$ удовлетворяет неравенству

$$h_{\mathscr{F}}(\theta) + h_{\mathscr{G}}(\theta) - h_\varphi(\theta) < H_\Omega(\theta), \tag{23}$$

где $h_{\mathscr{F}}(\theta)$ и $h_{\mathscr{G}}(\theta)$ — индикаторы функций $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ соответственно. В этом случае $h_f(\theta) = h_{\mathscr{F}}(\theta) - h_\varphi(\theta)$, $h_g(\theta) = h_{\mathscr{G}}(\theta) - h_\varphi(\theta)$. Из неравенства (23) следует, что функции $g\mathscr{F}$ и $f\mathscr{G}$ принадлежат P. Таким образом, условия теоремы 2 выполнены, значит, подпространство W_{S_1,S_2} допускает спектральный синтез.

В-третьих, предположим, что образующие $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ являются π-симметричными функциями и произведение $\mathscr{F}\mathscr{G}$ принадлежит P. В этом случае выполнение условий теоремы 2 следует из естественных представлений $\mathscr{F} = f$, $\mathscr{G} = g$. Так что подпространство W_{S_1,S_2} допускает спектральный синтез.

В заключение автор выражает свою признательность профессору А. Б. Шишкину за постановку задачи и полезные консультации.

Библиографический список

1. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб. 1972. Т. 88, № 1. С. 3–30.
2. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 9. С. 143–160.
3. *Чернышев А. Н.* Спектральный синтез для бесконечного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Труды ФОРА. 2001. № 6. С. 75–87.
4. *Волковая Т. А., Шишкин А. Б.* Локальное описание целых функций // Исследования по математическому анализу. Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН, 2014. С. 218–230.
5. *Волковая Т. А., Шишкин А. Б.* Локальное описание целых функций. Подмодули ранга 1 // Владикавказ. мат. журн. 2014. Т. 16, № 2. С. 14–28.
6. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Мат. сб. 1972. Т. 88, № 3. С. 331–362.
7. *Мерзляков С. Г.* О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно оператора кратного дифференцирования // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 5. С. 635–639.
8. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 11. С. 1559–1588.
9. *Письменный Р. Г.* Главные подмодули и инвариантные подпространства аналитических функций : дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Славянск-на-Кубани, 2010. 104 с.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Гостехиздат, 1956. 632 с.
11. *Абузярова Н. Ф.* Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 4. С. 3–22.

Synthesis in the Polynomial Kernel of Two Analytic Functionals

T. A. Volkovaya

Kuban State University, Branch in Slavyansk-on-Kuban, 200, Kubanskaya str., Slavyansk-on-Kuban, 353560, Russia, vta1987@yandex.ru

Let π be an entire function of minimal type and order $\rho = 1$ and let $\pi(D)$ be the corresponding differential operator. Maximal $\pi(D)$-invariant subspace of the kernel of an analytic functional is called its $\mathbf{C}[\pi]$-kernel. $\mathbf{C}[\pi]$-kernel of a system of analytic functionals is called the intersection of their $\mathbf{C}[\pi]$-kernels. The paper describes the conditions which allow synthesis of $\mathbf{C}[\pi]$-kernels of two analytical functionals with respect to the root elements of the differential operator $\pi(D)$.

Key words: spectral synthesis, differential operator of infinite order, invariant subspaces, submodules of entire functions.

References

1. Krasichkov-Ternovskii I. F. Invariant subspaces of analytic functions. II. Spectral synthesis of convex domains. *Mathematics of the USSR–Sbornik*, 1972, vol. 88, no. 1, pp. 3—30.
2. Shishkin A. B. Spectral synthesis for systems of differential operators with constant coefficients. Duality theorem. *Mathematics of the USSR–Sbornik*, 1998, vol. 189, no. 9, pp. 1423–1440.
3. Chernyshev A. N. Spectral synthesis for infinitely differential operator with constant coefficients. Duality theorem. *Trudi FORA*, 2001, vol. 6, pp. 75–87 (in Russian).
4. Volkovaya T. A., Shishkin A. B. Local description of entire functions. *Mathematical forum*, vol. 8. Sequence analysis and related problems of mathematical modeling. Vladikavkaz, UMI VSC RAS and RSO-A, 2014, pp. 218–230 (in Russian).
5. Volkovaya T. A., Shishkin A. B. Local description of entire functions. Submodules of rank 1. *Vladikavkaz. Math. Journal*, 2014, vol. 16, no. 2, pp. 14–28 (in Russian).
6. Krasichkov-Ternovskii I. F. Invariant subspaces of analytic functions. III. On the extension of spectral synthesis. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 88, no. 3, pp. 331—352.
7. Merzlyakov S. G. Invariant subspaces of the operator of multiple differentiation. *Math. Notes*, 1983, vol. 33, no. 5, pp. 701—713.
8. Krasichkov-Ternovskii I. F. Spectral synthesis in a complex domain for a differential operator with constant coefficients. I: A duality theorem. *Mathematics of the USSR–Sbornik*, 1991, vol. 182, no. 11, pp. 1559—1587.
9. Pismenny R. G. *Glavnye podmoduli i invariantnye podprostranstva analiticheskih funkcij* : dis. kand. fiz.-mat. nauk [Principal submodules and invariant subspaces analytic functions : Dr. phys. and math. sci. diss.]. Slavyansk-on-Kuban, 2010, 104 p. (in Russian).

10. Levin B. Ja. *Distribution of Zeros of Entire Functions*. Translations of Math. Monographs, vol. 5, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1964; revised ed. 1980.

11. Abuzyarova N. F. A property of subspaces admitting spectral synthesis. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1999, vol. 190, no. 4, pp. 3—22.

УДК 517.54

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТЫМ КОНЦОМ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Е. Г. Ганенкова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Петрозаводский государственный университет, g_ek@inbox.ru

В 1954 г. М. Хайнс (M. Heins) доказал, что если A — аналитическое множество, содержащее бесконечность, то существует целая функция, для которой A является асимптотическим множеством. В статье получен аналог теоремы Хайнса: для произвольной многосвязной плоской области D с изолированным граничным фрагментом, аналитического множества A, содержащего бесконечность, и простого конца области D с носителем p построен пример аналитической в D функции, для которой множество асимптотических значений, связанных с p, совпадает с A.

Ключевые слова: асимптотическое значение, простой конец, аналитическая функция, аналитическое множество.

Пусть D — область из $\mathbb{C}$, f — определенная в D функция, $z_0 \in \partial D$ — достижимая граничная точка, т. е. существует кривая, лежащая в D, кроме конца z_0.

Определение 1 [1, гл. 1.6, с. 21; 2, с. 336]. Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *асимптотическим значением* функции f в точке z_0, если существует кривая Γ_a, целиком лежащая в D, кроме своего конца z_0, такая, что

$$\lim_{\Gamma_a \ni z \to z_0} f(z) = a.$$

Кривая Γ_a называется *асимптотической кривой*, соответствующей асимптотическому значению a. Множество всех асимптотических значений (*асимптотическое множество*) функции f в точке z_0 обозначается $\mathrm{As}(f, z_0)$.

По теореме Иверсена (F. Iversen) [1, гл. 1.6, с. 23; 3; 4, гл. 5.1, с. 224] для непостоянной целой функции f асимптотическое множество $\mathrm{As}(f, \infty)$ содержит бесконечность. Также это множество является аналитическим (в смысле Суслина) [5], т. е. может быть представлено в виде

$$A = \bigcup_{(n_1, n_2, \dots)} \{A_{n_1} \cap A_{n_1 n_2} \cap A_{n_1 n_2 n_3} \cap \dots\},$$

где $A_{n_1 \dots n_k}$ — замкнутые множества, а объединение берется по всевозможным наборам $(n_1, n_2, \dots)$ натуральных чисел (более подробную информацию об аналитических множествах можно найти, например, в [6, гл. VIII, § 32; 7, с. 135]).

В 1918 г. В. Гросс (W. Gross) [8] построил пример целой функции, множеством асимптотических значений которой является расширенная комплексная плоскость. В 1954 г. М. Хайнс (M. Heins) [9] доказал, что для любого аналитического множества A, $\infty \in A$, существует целая функция, асимптотическое множество которой совпадает с A.

В [10, 11] рассматривались функции более общего вида: аналитические в некоторой плоской области произвольной связности с изолированным граничным фрагментом.

Определение 2 [12]. Область $D \subset \mathbb{C}$ имеет *изолированный граничный фрагмент*, если выполняется одно из условий:

(I) существуют континуум $K \subset \partial D$ и открытое множество U такие, что $K \subset U$ и $(\partial D \setminus K) \cap U = \varnothing$;

(II) существуют простая кривая $\Gamma \subset \partial D$ с различными концами ξ, η и открытый круг B такие, что $\xi, \eta \in \partial B$, $\Gamma \setminus \{\xi, \eta\} \subset B$ и $(\partial D \setminus \Gamma) \cap B = \varnothing$.

(III) существует изолированная точка множества ∂D.

Если выполняется условие (I), (II) или (III), то говорят, что D имеет изолированный граничный фрагмент I, II или III рода соответственно.

В [11] был получен следующий аналог результата М. Хайнса.