12. Terekhin P. A. Translates and dilates of function with nonzero integral. *Mathematics. Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 1999, iss. 1, pp. 67–68 (in Russian).
13. Terekhin P. A. Inequalities for the components of summable functions and their representations by elements of a system of contractions and shifts. *Russian Math.*, 1999, vol. 43, no. 8, pp. 70–77.
14. Terekhin P. A. Riesz bases generated by contractions and translations of a function on an interval. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 4, pp. 505–518. DOI: 10.1023/A:1020536412809.
15. Terekhin P. A. On perturbations of the Haar system. *Math. Notes*, 2004, vol. 75, iss. 3, pp. 466–469. DOI: 10.1023/B:MATN.0000023325.89390.66.
16. Terekhin P. A. Convergence of biorthogonal series in the system of contractions and translations of functions in the spaces $L^p[0,1]$. *Math. Notes*, 2008, vol. 83, iss. 5, pp. 722–740. DOI: 10.1134/S000143460805009X.
17. Terekhin P. A. On the components of summable functions represented by elements of families of wavelet functions. *Russian Math.*, 2008, vol. 52, no. 2, pp. 51–57. DOI: 10.1007/s11982-008-2008-3.
18. Terekhin P. A. Linear algorithms of affine synthesis in the Lebesgue space $L^1[0,1]$. *Izv. Math.*, 2010, vol. 74, iss. 5, pp. 993–1022. DOI: 10.1070/IM2010v074n05ABEH002513.
19. Terekhin P. A. Best approximation of functions in L^p by polynomials on affine system. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 2, pp. 279—306. DOI: 10.1070/SM2011v202n02ABEH004146.

Please cite this article in press as:
Al-Jourany Kh. H. H., Mironov V. A., Terekhin P. A. Affine System of Walsh Type. Completeness and Minimality. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 247–256 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-247-256.

УДК 517.51

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СДВИГОВ В ПОЛЕ p-АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

А. М. Водолазов[1], С. Ф. Лукомский[2]

[1]Водолазов Александр Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, vam21@yandex.ru

[2]Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, LukomskiiSF@nfo.sgu.ru

В 2010 г. S. Albeverio, С. Евдокимов и М. Скопина доказали, что если система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))$ ступенчатой функции φ ортонормирована, функция φ порождает ортогональный p-адический кратно масштабный анализ (КМА), то носитель ее преобразования Фурье лежит в единичном шаре. Мы доказываем, что в некоторых случаях требование «φ порождает КМА» можно опустить. В общем случае мы указываем количество линейно независимых ступенчатых функций, сдвиги которых образуют ортонормированную систему.

Ключевые слова: ортогональные системы сдвигов, поле p-адических чисел, p-адический КМА.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262

ВВЕДЕНИЕ

Первые примеры вейвлетов на нуль-мерных группах принадлежат В. Ленгу [1–3] и относятся к случаю двоичной группы Кантора. Начиная с этого момента можно выделить две группы работ. С одной стороны, начались исследования кратно масштабного и вейвлет-анализа на группах Виленкина [4–7], с другой стороны — на полях p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Оказалось, что эти две теории существенно отличаются. В случае групп Виленкина при любых натуральных M, N можно построить ступенчатую ортогональную масштабирующую функцию φ, порождающую кратно масштабный анализ (КМА), которая постоянна на смежных классах по подгруппе G_M и имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi \subset G_{-N}$, где (G_n) — основная цепочка подгрупп, порождающая топологию [7]. Для групп p-адических чисел ситуация иная. Если ступенчатая ортогональная масштабирующая функция φ, порождающая КМА, имеет носитель $\operatorname{supp}\varphi \subset G_{-N}$ и постоянна на смежных классах по подгруппе G_M, то $M = 0$ [8, 9]. Оказывается, что в некоторых случаях в последнем утверждении можно не требовать, чтобы φ была масштабирующей и порождала КМА. Достаточно потребовать, чтобы система сдвигов $\varphi(x\dot{-}h)$ была ортонормированной и выполнялось условие $|\hat{\varphi}(G_N^{\perp})| = 1$. Доказательству этого утверждения и посвящена настоящая статья.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть p — простое, G — локально компактная нуль-мерная группа с основной цепочкой подгрупп $(G_n)_{n\in\,\mathbb{Z}}, (G_n/G_{n+1})^{\sharp} = p$, базисной последовательностью $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Последнее означает, что любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде суммы ряда

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n g_n, \qquad x_n = \overline{0, p-1},$$

в котором количество слагаемых с отрицательными номерами конечно. Отображение

$$\lambda(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n p^n, \qquad x_n = \overline{0, p-1}$$

переводит группу G в полупрямую $[0, +\infty)$. Его обычно называют отображением Монна. Пусть (g_n) удовлетворяют условиям $pg_n = g_{n+1}$. Группа с таким условием называется группой p-адических чисел. Она есть аддитивная группа поля $\mathbb{Q}_p$ всех p-адических чисел, т. е. $G = \mathbb{Q}_p^+$. Конкретной реализацией такой группы является совокупность бесконечных в обе стороны последовательностей $x = (..., 0, x_k, x_{k+1}, ...)$, $\quad k \in \mathbb{Z}$, $\quad x_l = 0$ при $l < k$ и $x_l = \overline{0, p-1}$. Операция сложения в такой группе определяется покоординатно по модулю p с переносом единицы, возникающей при переполнении, в следующий разряд направо. Основная цепочка в этом случае состоит из подгрупп

$$G_n = \{x = (..., 0, x_n, x_{n+1}, ...) :\ x_l = \overline{0, p-1}\}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

В качестве g_n удобно выбирать элементы $g_n = (..., 0, 1_n, 0_{n+1}, ...)$. Обозначим

$$H_0 = \{h = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-1}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-s}g_{-s} :\ s \in \mathbb{N}\},$$

$$H_0^{(N)} = \{h = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-1}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}a_{-N}g_{-N}\}, \qquad N \in \mathbb{N}.$$

Множество H_0 есть множество сдвигов, так как при отображении Монна оно переходит в множество целых неотрицательных чисел.

Через X будем обозначать множество характеров группы G, через $G_n^{\perp}$ — аннуляторы подгрупп G_n. Совокупность аннуляторов $(G_n^{\perp})_{n\in\mathbb{Z}}$ образуют возрастающую последовательность:

$$G_n^{\perp} \subset G_{n+1}^{\perp}, \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} G_n^{\perp} = 1, \qquad (G_{n+1}^{\perp}/G_n^{\perp})^{\sharp} = p, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} G_n^{\perp} = X.$$

При каждом $k \in \mathbb{Z}$ выбираем характеры $r_k \in (G_{k+1}^{\perp} \setminus G_k^{\perp})$ и фиксируем их. Характеры r_k называют функциями Радемахера. Любой характер $\chi \in X$ однозначно представим в виде произведения

$$\chi = \prod_{k\in\mathbb{Z}} r_k^{\alpha_k} = \prod_{k=-\infty}^{m} r_k^{\alpha_k}, \qquad \alpha_k = \overline{0, p-1},$$

в котором лишь конечное число показателей α_k с положительными номерами отлично от нуля.

Лемма 1. *Для любой локально-компактной нуль-мерной группы*
1) $\int\limits_{G_0^{\perp}} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = \mathbf{1}_{G_0}(x)$;
2) $\int\limits_{G_0} (\chi, x)\, d\mu(x) = \mathbf{1}_{G_0^{\perp}}(\chi)$.

Первое равенство доказано в [7], второе равенство двойственно первому.

Лемма 2. *Для любой локально-компактной нуль-мерной группы и для любого* $n \in \mathbb{Z}$
1) $\int\limits_{G_n^\perp} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = p^n \mathbf{1}_{G_n}(x)$;
2) $\int\limits_{G_n} (\chi, x)\, d\mu(x) = \frac{1}{p^n} \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)$.

Доказательство. Докажем первое равенство. Пусть $\mathscr{A}$ — оператор растяжения. Используя равенство

$$\int\limits_X f(\chi\mathscr{A})\, d\nu(\chi) = p \int\limits_X f(\chi)\, d\nu(\chi), \qquad \mathbf{1}_{G_n}(x) = \mathbf{1}_{G_0}(\mathscr{A}^n x)$$

и лемму 1, имеем:

$$\int\limits_{G_n^\perp} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = \int\limits_X \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)(\chi, x)\, d\nu(\chi) = p^n \int\limits_X (\chi\mathscr{A}^n, x) \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi\mathscr{A}^n)\, d\nu(\chi) =$$

$$= p^n \int\limits_X (\chi, \mathscr{A}^n x) \mathbf{1}_{G_0^\perp}(\chi)\, d\nu(\chi) = p^n \mathbf{1}_{G_0}(\mathscr{A}^n x) = p^n \mathbf{1}_{G_n}(x).$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

Лемма 3. *Пусть G — локально-компактная нуль-мерная группа и* $\chi_{n,s} = r_n^{\alpha_n} r_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \ldots r_{n+s}^{\alpha_{n+s}}$ *характер, не принадлежащий* $G_n^\perp$. *Тогда*

$$\int\limits_{G_n^\perp \chi_{n,s}} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = p^n (\chi_{n,s}, x) \mathbf{1}_{G_n}(x).$$

Доказательство. По аналогии с предыдущим имеем:

$$\int\limits_{G_n^\perp \chi_{n,s}} (\chi, x)\, d\nu(\chi) = \int\limits_X \mathbf{1}_{G_n^\perp}(\chi)(\chi_{n,s}\chi, x)\, d\nu(\chi) = \int\limits_{G_n^\perp} (\chi_{n,s}, x)(\chi, x)\, d\nu(\chi) = p^n (\chi_{n,s}, x) \mathbf{1}_{G_n}(x). \quad \square$$

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СДВИГОВ

Теорема 1. *Пусть* $M, N \in \mathbb{N}$, $G = \mathbb{Q}_p^+$, $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$. *Система сдвигов* $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0^{(N)}}$ — *будет ортонормированной тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{\alpha_{-N},\ldots,\alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, b_{M-1}g_{M-1} \dot{+} \ldots \dot{+} b_{-N}g_{-N}) =$$

$$= \begin{cases} p^N, & \text{если все } b_j = 0, \\ 0, & \text{если } b_{M-1} = \ldots = b_0 = p-1 \text{ и } b_{-1}^2 + \ldots + b_{-N}^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } b_{M-1} = \ldots = b_0 = 0 \text{ и } b_{-1}^2 + \ldots + b_{-N}^2 \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $h_1, h_2 \in H_0^{(N)}$. Учитывая лемму 3, получаем:

$$\int\limits_G \varphi(x \dot{-} h_1)\overline{\varphi(x \dot{-} h_2)}\, d\mu(x) = \int\limits_G \varphi(x)\overline{\varphi(x \dot{-} (h_2 \dot{-} h_1))}\, d\mu(x) = \int\limits_X |\hat{\varphi}(\chi)|^2 (\chi, (h_2 \dot{-} h_1))\, d\nu(\chi) =$$

$$= \int\limits_{G_M^\perp} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 (\chi, (h_2 \dot{-} h_1))\, d\nu(\chi) = \sum_{\alpha_{-N},\ldots,\alpha_{M-1}=0}^{p-1} \int\limits_{G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}} |\hat{\varphi}(\chi)|^2 (\chi, (h_2 \dot{-} h_1))\, d\nu(\chi) =$$

$$= \sum_{\alpha_{-N},\ldots,\alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 \int\limits_{G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}} (\chi, (h_2 \dot{-} h_1))\, d\nu(\chi) =$$

$$= \frac{\mathbf{1}_{G_{-N}}(h_2 \dot{-} h_1)}{p^N} \sum_{\alpha_{-N},\ldots,\alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, (h_2 \dot{-} h_1)). \tag{1}$$

Пусть вначале $h_1 \neq h_2$. Так как $h_1, h_2 \in H_0^{(N)}$ и $h_1 \dot{-} h_2 \neq 0$, то либо

$$h_1 \dot{-} h_2 = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N}g_{-N},$$

либо

$$h_1 \dot{-} h_2 = b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} b_{-N}g_{-N} \dot{+} \sum_{k=0}^{+\infty}(p-1)g_k.$$

При этом если $h_1 \dot{-} h_2 = a_{-1}g_{-1} \dot{+} a_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{-N}g_{-N}$, то

$$h_2 \dot{-} h_1 = b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} b_{-N}g_{-N} \dot{+} \sum_{k=0}^{\infty}(p-1)g_k.$$

Поэтому

$$\int_G \varphi(x \dot{-} h_1)\overline{\varphi(x - h_2)}\, d\mu(x) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\alpha_{-N}\ldots\alpha_0\ldots\alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, b_{-1}g_{-1} \dot{+}$$
$$\dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} b_{-N}g_{-N}) = 0$$

и

$$\sum_{\alpha_{-N}\ldots\alpha_0\ldots\alpha_{M-1}=0}^{p-1} |\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 (r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}, \sum_{k=0}^{M-1}(p-1)g_k \dot{+}$$
$$\dot{+} b_{-1}g_{-1} \dot{+} b_{-2}g_{-2} \dot{+} \ldots \dot{+} b_{-N}g_{-N}) = 0.$$

При $h_1 = h_2$ утверждение леммы очевидно. □

Определим систему p^{N+M}-мерных векторов

$$\mathbf{e}_l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}), \qquad l = l_{-N} + l_{-N+1}p + \cdots + l_0 p^N + l_1 p^{N+1} + \cdots + l_{M-1}p^{N+M-1}$$

равенствами

$$\mathbf{e}_l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = \frac{1}{p^{\frac{M+N}{2}}} e^{\frac{-2\pi i}{p^{M+N}}(l_{-N} + \cdots + l_{M-1}p^{N+M-1})(\alpha_{M-1} + \alpha_{M-2}p + \cdots + \alpha_{-N}p^{N+M-1})}. \qquad (2)$$

Ясно, что векторы $(\mathbf{e}_l)_{l=0}^{p^{N+M}-1}$ образуют ортонормированную систему. Поэтому условие ортогональности в теореме 1 можно представить в виде

$$c_0 = p^{\frac{N-M}{2}}, \qquad c_1 = c_2 = \cdots = c_{p^N-1} = 0, \qquad c_{p^N(p^M-1)+j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p^N - 1), \qquad (3)$$

где c_l — коэффициенты Фурье разложения функции $|\hat{\varphi}|^2$ по системе $(\mathbf{e}_l)$, т.е.

$$|\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = \sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} c_l \mathbf{e}_l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0} \ldots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}). \qquad (4)$$

Если $|\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp})| = 1$, то, полагая в этом равенстве $\alpha_{-N} = \cdots = \alpha_{M-1} = 0$, получаем:

$$\sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} c_l \cdot \frac{1}{p^{\frac{M+N}{2}}} = |\hat{\varphi}(G_{-N}^{\perp})|^2 = 1,$$

т. е.

$$\sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} c_l = p^{\frac{M+N}{2}}. \qquad (5)$$

Теорема 2. *Пусть $M = 1$, $p = 2$, $N \in \mathbb{N}$, $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(G_1^\perp)$ и $|\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp| = 1$. Если система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ есть ортонормированная система, то $\hat{\varphi}(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$.*

Доказательство. Из (3) и (4) следует, что

$$|\hat{\varphi}|^2 = c_0\mathbf{e}_0 + c_{2^N}\mathbf{e}_{2^N}. \tag{6}$$

Из (2) видим, что $\mathbf{e}_0 \equiv \frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}}$. Найдем значения $\mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0})$ при $l = 2^N$. Имеем:

$$\mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0}) = \frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}} e^{\frac{2\pi i}{2^{N+1}} 2^N(\alpha_0+\alpha_{-1}\cdot 2+\dots+\alpha_{-N}2^N)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}}, & \text{если } \alpha_0 = 0, \\ -\dfrac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}}, & \text{если } \alpha_0 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Из (6) и (5) при $\chi = 1$ следует

$$c_0\frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}} + c_{2^N}\frac{1}{2^{\frac{N+1}{2}}} = 1.$$

Так как $c_0 = 2^{\frac{N-1}{2}}$, то отсюда находим, что $c_{2^N} = c_0 = 2^{\frac{N-1}{2}}$. Тогда из (7) следует, что

$$|\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}} \dots r_0^{\alpha_0})|^2 = \begin{cases} \dfrac{c_0}{2^{\frac{N+1}{2}}} + \dfrac{c_{2^N}}{2^{\frac{N+1}{2}}} = 1, & \text{если } \alpha_0 = 0, \\ \dfrac{c_0}{2^{\frac{N+1}{2}}} - \dfrac{c_{2^N}}{2^{\frac{N+1}{2}}} = 0, & \text{если } \alpha_0 = 1, \end{cases}$$

и теорема доказана. □

Покажем теперь, что в общем случае доказанная теорема неверна. Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n, \\ \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{8}$$

в которой $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$, ранг системы (8) равен $m + 1$ и вектор $(1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ является решением этой системы. Определим для системы (8) вспомогательную систему:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,(\alpha_{11})x_1 + \dots + \mathrm{Re}\,(\alpha_{1n})x_n = 0, \\ \dots \\ \mathrm{Re}\,(\alpha_{m1})x_1 + \dots + \mathrm{Re}\,(\alpha_{mn})x_n = 0, \\ \mathrm{Im}\,(\alpha_{11})x_1 + \dots + \mathrm{Im}\,(\alpha_{1n})x_n = 0, \\ \dots \\ \mathrm{Im}\,(\alpha_{m1})x_1 + \dots + \mathrm{Im}\,(\alpha_{mn})x_n = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\mathrm{Re}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(z)$ действительная и мнимая части комплексного числа z.

Лемма 4. *Любое решение $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ системы (8), у которого все координаты $\alpha_i \geqslant 0$ можно найти как линейную комбинацию:*

$$\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}' + m(\overline{\alpha}')\overline{\alpha}_0)\frac{n}{nm(\overline{\alpha}') + \sum_{i=1}^n \alpha_i'}, \tag{10}$$

где константа $m(\overline{\alpha}')$ определена равенством

$$m(\overline{\alpha}') = \begin{cases} \min\{\alpha_i'\}, & \text{если существует } \alpha_i' < 0, \\ 0, & \text{если все } \alpha_i' \geqslant 0, \end{cases} \tag{11}$$

$\overline{a}_0 = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ и $\overline{\alpha}'$ — произвольное решение системы (9), отличное от $-m(\overline{\alpha}')\overline{\alpha}_0$.

Доказательство. Пусть $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — неотрицательное решение системы (8), т. е. $\alpha_i \geqslant 0$. Тогда при всех j комплексное число

$$\alpha_{j1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_{jn}\alpha_n = 0,$$

и, значит,

$$\mathrm{Re}\,(\alpha_{j1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_{jn}\alpha_n) = 0, \qquad \mathrm{Im}\,(\alpha_{j1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_{jn}\alpha_n) = 0.$$

Так как $\alpha_i \in \mathbb{R}$, то

$$\mathrm{Re}\,(\alpha_{j1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_{jn}\alpha_n) = \mathrm{Re}\,(\alpha_{j1})\alpha_1 + \cdots + \mathrm{Re}\,(\alpha_{jn})\alpha_n = 0,$$

$$\mathrm{Im}\,(\alpha_{j1}\alpha_1 + \cdots + \alpha_{jn}\alpha_n) = \mathrm{Im}\,(\alpha_{j1})\alpha_1 + \cdots + \mathrm{Im}\,(\alpha_{jn})\alpha_n = 0.$$

Следовательно, $\overline{\alpha}$ — решение системы (9), и равенство (10) выполнено при $\overline{\alpha}' = \overline{\alpha}$. В этом случае $m(\overline{\alpha}') = 0$, так как все $\alpha_i \geqslant 0$, а $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n$.

Пусть теперь $\overline{\alpha}'$ — произвольное решение системы (9). Проверим, что $\overline{\alpha}$, определенное по формуле (10), является решением системы (8) и все компоненты $\alpha_i \geqslant 0$. Последнее условие следует из определения $m(\overline{\alpha}')$. Так как $\overline{\alpha}'$ является решением системы (9), то $\overline{\alpha}'$ есть решение системы (8) без первого уравнения. Учитывая, что $\overline{a}_0 = (1, 1, ..., 1)$ есть решение системы (8), то $\overline{\alpha}$ является решением системы (8) без первого уравнения. А так как $\overline{\alpha}' \neq -m(\overline{\alpha}')\overline{\alpha}_0$, то из (10) следует, что $\overline{\alpha}$ удовлетворяет и первому уравнению. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Если $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1', \ldots, \overline{\alpha}_r'$ — фундаментальная система решений системы* (9)*, то соответствующие решения $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_r$ системы* (8) *являются линейно независимыми.*

Доказательство. Пусть $\gamma_1\overline{\alpha}_1 + \cdots + \gamma_r\overline{\alpha}_r = 0$, и существует $\gamma_j \neq 0$. Тогда

$$\gamma_1(\overline{\alpha}_1' + m(\overline{\alpha}_1')\overline{\alpha}_0) + \cdots + \gamma_r(\overline{\alpha}_r' + m(\alpha_r')\overline{\alpha}_0) = 0,$$

$$\gamma_1\overline{\alpha}_1' + \cdots + \gamma_r\overline{\alpha}_r' + (m(\overline{\alpha}_1') + \cdots + m(\overline{\alpha}_r'))\overline{\alpha}_0) = 0,$$

и так как существует $\gamma_j \neq 0$, то это противоречит линейной независимости векторов $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1', \ldots, \overline{\alpha}_r'$. □

Теорема 3. *Пусть p — простое число и выполнено одно из условий:*
1) $p \geqslant 5$ и $M \in \mathbb{N}$;
2) $p < 5$ и $M \geqslant 2$, $M \in \mathbb{N}$.
Тогда существуют функции $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$, сдвиги котрой на элементы H_0 образуют ортонормированную систему в $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Количество линейно независимых функций φ в пространстве $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ не меньше $p^{N+M} - 4(p^N - 1)$.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений из теоремы 1. Из леммы 3 следует, что $\overline{\alpha}_0 = (1, \ldots, 1)$ является решением системы. Эта система имеет p^{N+M} неизвестных и $2(p^N - 1) - 1$ уравнений, а вспомогательная система имеет $4(p^N - 1)$ уравнений. Следовательно, из лемм 3 и 4 получаем, что система линейных уравнений из теоремы 1 имеет не меньше $p^{N+M} - 4(p^N - 1)$ линейно независимых решений. При $p \geqslant 5$, $M \in \mathbb{N}$ и $p = 2, 3$, $M \geqslant 2$ выполняется неравенство $p^{N+M} - 4(p^N - 1) > 1$, значит, система имеет решение, отличное от $\overline{\alpha}_0 = (1, \ldots, 1)$. □

Работа подготовлена частично в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

Библиографический список

1. *Lang W. C.* Orthogonal Wavelets on the Cantor Dyadic Group // SIAM J. Math. Anal. 1996. Vol. 27, iss. 1. P. 305–312. DOI: 10.1137/S003614 1093248049.
2. *Lang W. C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Housten J. Math. 1998. Vol. 24, № 3. P. 533–544.
3. *Lang W. C.* Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. Math. Sci. 1998. Vol. 21, iss. 2. P. 307–314. DOI: 10.1155/ S0161171298000428.
4. *Protasov V. Yu., Farkov Yu. A.* Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line // Sb. Math.

2006. Vol. 197, № 10. P. 1529–1558. DOI: 10.1070/SM2006v197n10ABEH003811.
5. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 193–220. DOI: 10.4213/im644.
6. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952. DOI: 10.4213/mzm4181.
7. *Lukomskii S. F.* Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, iss. 1. P. 42–65. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.
8. *Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Skopina M.* p-adic refinable functions and MRA-based wavelets // J. Approx. Theory. 2009. Vol. 161, iss. 1. P. 226–238. DOI: 10.1016/j.jat.2008.08.008.
9. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames // J. Fourier Anal. Appl. 2010. Vol. 16, iss. 5. P. 693–714. DOI : 10.1007/s00041-009-9118-5.

Образец для цитирования:
Водолазов А. М., Лукомский С. Ф. Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 256–262. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262.

Orthogonal Shift Systems in the Field of p-adic Numbers

A. M. Vodolazov[1], S. F. Lukomskii[2]

[1]Aleksandr M. Vodolazov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, vam21@yandex.ru
[2]Sergey F. Lukomskii, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, LukomskiiDS@info.sgu.ru

In 2010 S. Albeverio, S. Evdokimov and M. Skopina proved that if the shift system $(\varphi(x\dot{-}h))$ of a step function φ is orthonormal and φ generates p-adic MRA then its Fourier transform lies in the unit ball. We prove then in some cases the condition "φ generates MRA" is possible to be omitted. In general, we indicate the number of linearly independent step-functions, which shifts form an orthonormal system.

Key words: orthogonal shift systems, field of p-adic numbers, p-adic MRA .

This work was supported by the Russian Ministry of Science and Education (projects no. 1.1520.2014/K) and Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-01-00152).

References

1. Lang W. C. Orthogonal Wavelets on the Cantor Dyadic Group. *SIAM J. Math. Anal.*, 1996, vol. 27, iss. 1, pp. 305–312. DOI:10.1137/S00361410 93248049.
2. Lang W. C. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group. *Housten J. Math.*, 1998, vol. 24, no. 3, pp. 533–544.
3. Lang W. C. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group. *Intern. J. Math. Math. Sci.*, 1998, vol. 21, iss 2, pp. 307–314. DOI: 10.1155/S0161171298000428.
4. Protasov V. Yu., Farkov Yu. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line. *Sb. Math.*, 2006, vol. 197, no. 10, pp. 1529–1558. DOI: 10.1070/SM2006v197n10ABEH003811.
5. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 623–650. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000540.
6. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, iss. 5, pp. 843–859. DOI: 10.1134/S0001434607110296.
7. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 42–65. DOI: 10.1007/s00041-013-9301-6.
8. Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M., Skopina M. p-adic refinable functions and MRA-based wavelets. *J. Approx. Theory*, 2009, vol. 161, iss. 1, pp. 226–238. DOI: 10.1016/j.jat.2008.08.008.
9. Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M. p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2010, vol. 16, iss. 5, pp. 693–714. DOI : 10.1007/s00041-009-9118-5.

Please cite this article in press as:
Vodolazov A. M., Lukomskii S. F. Orthogonal Shift Systems in the Field of p-adic Numbers. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 256–262 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-256-262.