polynomials in L_u^p-spaces. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1993, vol. 28, pp. 183–188.
6. Ky N. X. Moduli of mean smoothness and approximation with A_p weights. *Annales Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, 1997, vol. 40, pp. 37–48.
7. Kokilashvili V., Yildirir Y. E. On the approximation in weighted Lebesgue spaces. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 2007, vol. 143, pp. 103–113.
8. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of a real variable*. New York, MacMillan, 1963.
9. Butzer P. L., Scherer K. On the fundamental approximation theorems of D. Jackson, S. N. Bernstein and theorems of M. Zamansky and S. B. Stečkin. *Aequationes Math.*, 1969, vol. 3, pp. 170–185.
10. Butzer P. L., Wagner H. J. On dyadic analysis based on the pointwise dyadic derivative. *Analysis Math.*, 1975, vol. 1, no. 3, pp. 171–196.
11. Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier – Vilenkin series in Hölder and L^p norm. *East J. Approximations*, 2009, vol. 15, no. 3, pp. 143–158.

УДК 514.76

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С N-СВЯЗНОСТЬЮ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sgalaev@mail.ru

На многообразии с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и эндоморфизмом $N : D \to D$ вводится понятие N-связности ∇^N. Находятся условия, при которых N-связность совместима с почти контактной метрической структурой: $\nabla^N\eta = \nabla^N g = \nabla^N\vec{\xi} = 0$. Исследуются отношения между связностью Леви – Чивиты, связностью Схоутена – ван Кампена и N-связностью. С помощью N-связности находятся условия, при которых почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, N-связность, связность Схоутена – ван Кампена, тензор кривизны N-связности, почти контактные кэлеровы пространства.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264

ВВЕДЕНИЕ

Начало теории метрически аффинных пространств — (псевдо) римановых многообразий, наделенных линейной связностью с ненулевым кручением — было положено Э. Картаном (E. Cartan) в 1922 г. [1]. Наибольшим интересом среди метрических связностей с кручением пользуется полусимметрическая связность, систематическое исследование которой проведено К. Яно (K. Yano) в работе [2]. Четвертьсимметрическая связность определена в 1975 г. С. Голабом (S. Golab) [3]. В работе [4] определяется связность, специально приспособленная к решению задач неголономной геометрии и названная позже связностью Схоутена – ван Кампена. В. В. Вагнер [5] использует связность Схоутена – ван Кампена для построения теории кривизны неголономного многообразия коразмерности 1. Определяемая при этом связность Вагнера, как показано в настоящей работе, является связностью в векторном расслоении, естественным образом возникающем на неголономном многообразии. Мы вводим новый тип линейной связности с кручением, которая определяется на многообразии с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и эндоморфизмом $N : D \to D$. При надлежащем выборе эндоморфизма N построенная нами связность (названная в работе N-связностью) совпадает со связностью Вагнера.

Работа построена следующим образом. В параграфе 1содержатся основные сведения о почти контактных метрических пространствах. В параграфе 2дается определение N-связности. Находятся условия метричности N-связности. Исследуются отношения между связностью Леви – Чивиты, связностью Схоутена – ван Кампена и N-связностью. В частности, показывается, что N-связность является более общей связностью, чем связность Схоутена – ван Кампена. Более подробные сведения о связности Схоутена – ван Кампена содержатся в работе [4]. В параграфе 3.находится выражение для тензора кривизны N-связности. В параграфе 4.N-связность рассматривается на многообразиях с почти контактной кэлеровой структурой и на многообразиях Кенмоцу.

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m+1$, ΓTX — $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на X. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Почти контактной метрической структурой на X называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X, где φ — тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые структурным вектором и контактной формой соответственно, g — (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1, \qquad \varphi(\vec{\xi}) = 0, \qquad \eta\circ\varphi = 0,$$
$$\varphi^2\vec{x} = -\vec{x} + \eta(\vec{x})\vec{\xi}, \qquad g(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}), \qquad d\eta(\vec{\xi}, \vec{x}) = 0, \qquad \vec{x},\ \vec{y} \in \Gamma TX.$$

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой. Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N_\varphi + 2d\eta\otimes\vec{\xi} = 0$, где N_φ — кручение Нейенхейса, образованное тензором φ. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие с заданной на нем сасакиевой структурой называется сасакиевым многообразием. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = \mathrm{Span}\,(\vec{\xi})$ — его оснащение. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = \mathrm{Span}\,(\vec{\xi})$, и называется вектором Риба.

Будем называть почти контактную метрическую структуру *почти нормальной*, если выполняется условие

$$N_\varphi + 2(d\eta\circ\varphi)\otimes\vec{\xi} = 0. \tag{1}$$

Почти нормальное почти контактное метрическое пространство в дальнейшем назовем *почти контактным кэлеровым пространством*, если его фундаментальная форма замкнута. Почти контактное метрическое пространство назовем *почти K-контактным метрическим пространством*, если $L_{\vec{\xi}}g = 0$. В случае, когда форма имеет максимальный ранг, соответствующее пространство называют K-контактным.

Как следует из (1), почти нормальная контактная метрическая структура очевидным образом является сасакиевой структурой. Сасакиевы пространства пользуются большой популярностью у исследователей почти контактных метрических пространств по двум основным причинам. С одной стороны, существует большое количество интересных и содержательных примеров сасакиевых структур, с другой стороны — многообразия Сасаки обладают очень важными и естественными свойствами. В то же время почти контактные кэлеровы пространства наследуют ряд важных свойств сасакиевых пространств, что оказывается очень существенным в тех случаях, когда почти контактное метрическое пространство в принципе не может быть сасакиевым пространством [6]. Почти контактное метрическое пространство называется пространством Кенмоцу, если выполняются условия $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta\wedge\Omega$. Почти контактное метрическое пространство является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда выполняется условие [7]

$$(\nabla_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = -\eta(\vec{y})\varphi\vec{x} - g(\vec{x}, \varphi\vec{y})\vec{\xi}. \tag{2}$$

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\dots,n;\ a,\ b,\ c,\ e = 1,\dots,n-1)$ многообразия X будем называть адаптированной к распределению D, если $D^\perp = \mathrm{Span}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$ [8]. Пусть $P: TX \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D\oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = \mathrm{Span}\,(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a,\ \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a\vec{e}_b] = M^n_{ab}\partial_n$, где компоненты M^n_{ab} образуют так называемый тензор неголономности [5]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_\alpha \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma^n_a = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда при условии, что $\vec{\xi} = \partial_n$, получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Тензорное поле t типа (p, q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем *допустимым (к распределению D)*, если t — полилинейное отображение $t\colon \Gamma(D)^p \times \Gamma(D^*)^q \to F(X)$, где $F(X)$ — алгебра гладких функций на X. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид: $t = t^a_b \vec{e}_a \otimes dx^b$. Здесь и далее мы для удобства, по возможности, ограничиваемся тензором типа $(1, 1)$.

Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа $(1, 1)$. Поле аффинора φ, учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форму $\omega = d\eta$, также являющуюся допустимой формой, уместно в таком случае назвать допустимой симплектической формой.

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'},$$

где $A^a_{a'} = \dfrac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}$.

Замечание 1. Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются вновь компонентами допустимого тензорного поля. Кроме того, обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат. Последнее обстоятельство подкрепляется тем фактом, что $(L_{\vec{\xi}} t)^a_b = \partial_n t^a_b$.

Замечание 2. Допустимую тензорную структуру, для которой выполняется равенство $\partial_n t^a_b = 0$, будем называть проектируемой (в литературе можно встретить и другие термины структур с подобным свойством: «базисные», «полубазисные» и т. д.). Как будет следовать из дальнейшего, допустимые проектируемые структуры естественным образом могут рассматриваться как структуры, заданные на многообразии меньшей размерности.

Введем в рассмотрение допустимые тензорные поля $h\vec{x}$, $C(\vec{x}, \vec{y})$, $C\vec{x}$, $\psi\vec{x}$, $L\vec{x}$, полагая, что $h\vec{x} = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}}\varphi)(\vec{x})$, $C(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(L_{\vec{\xi}} g)(\vec{x}, \vec{y})$, $g(C\vec{x}, \vec{y}) = C(\vec{x}, \vec{y})$, $g(\vec{x}, \psi\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y})$, $L\vec{x} = C\vec{x} - \psi\vec{x}$, $\vec{x}$, $\vec{y} \in \Gamma TX$. В случае контактного метрического пространства эндоморфизм ψ совпадает с эндоморфизмом φ.

В адаптированных координатах получаем: $h^a_b = \frac{1}{2}\partial_n \varphi^a_b$, $C_{ab} = \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^a_b = g^{da} C_{db}$, $\psi^c_a = g^{bc}\omega_{ab}$. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви – Чивиты тензора g: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. *Коэффициенты связности Леви – Чивиты почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид*

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}, \qquad \tilde{\Gamma}^n_{ab} = \omega_{ba} - C_{ab}, \qquad \tilde{\Gamma}^b_{an} = \tilde{\Gamma}^b_{na} = C^b_a - \psi^b_a = L^b_a, \qquad \tilde{\Gamma}^n_{na} = 0, \qquad \tilde{\Gamma}^\alpha_{nn} = 0,$$

где $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$.

2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИЯХ С ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Пусть X — многообразие с почти контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ и $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения почти контактной структуры. Бежанку (A. Bejancu) [9] определяет связность ∇^B на многообразии Сасаки с помощью формулы

$$\nabla^B_{\vec{x}} \vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{y} - \eta(\vec{x}) \tilde{\nabla}_{\vec{y}} \vec{\xi} - \eta(\vec{y}) \tilde{\nabla}_{\vec{x}} \vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\xi}.$$

В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами ${\Gamma^B}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются ${\Gamma^B}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. Построенная Бежанку связность является метрической в случае, когда почти контактная метрическая структура является K-контактной. Действительно, так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна обращению в нуль производной $\partial_n g_{ab}$. Определим на многообразии с почти контактной метрической структурой связность ∇^N с помощью равенства $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$. Назовем введенную связность N-связностью. Отличными от нуля компонентами N-связности — самое большее — будут ${\Gamma^N}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, ${\Gamma^N}^a_{nc} = N^a_c$. Кручение N-связности определяется равенством $S^N(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$. Имеет место

Теорема 2. *Пусть N — симметрический оператор. N-связность является метрической связностью тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$g(N\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}(\vec{x},\vec{y}). \tag{3}$$

Равенство $\nabla^N g = 0$ в координатах перепишется в виде

$$\nabla^N_c g_{ab} = \breve{\nabla}^N_c g_{ab} = \vec{e}_c g_{ab} - \Gamma^d_{ca} g_{db} - \Gamma^d_{cb} g_{ad} = 0, \tag{4}$$

$$\nabla^N_n g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Равенство (4) выполняется всегда в силу метричности связности $\breve{\nabla}$, а равенство (5) (при условии, что N-симметрический оператор) эквивалентно равенству (3). □

Связность Схоутена – ван Кампена ∇^S определяется с помощью следующего равенства [6]:

$$\nabla^S_{\vec{x}}\vec{y} = (\breve{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^{\,h})^h + (\breve{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^{\,v})^v,$$

где $\vec{y}^{\,h} = P\vec{y}$, $\vec{y}^{\,v} = Q\vec{y}$, P, Q — проекторы на распределения D и $D^{\perp}$ соответственно.

Вычисляя компоненты связности Схоутена – ван Кампена, непосредственно убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *N-связность совпадает со связностью Схоутена – ван Кампена тогда и только тогда, когда $N = C - \psi = L$.*

В качестве следствия теорем 3 получаем следующую теорему.

Теорема 4. *N-связность является адаптированной связностью к почти контактной метрической структуре: $\nabla^N\eta = \nabla^N g = \nabla^N\vec{\xi} = 0$ тогда и только тогда, когда N — симметрический оператор такой, что $g(N\vec{X},\vec{Y}) = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g(\vec{X},\vec{Y})$.*

3. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ N-СВЯЗНОСТИ

Внутренняя связность [5, 8] определяет параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. Тензор кривизны внутренней связности, названный Вагнером [5] тензором Схоутена, является допустимым тензором и определяется равенством

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}], \qquad \vec{x},\vec{y} \in \Gamma D.$$

Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a\|e\|}\Gamma^e_{b]c}$. В случае, когда распределение D не содержит интегрируемого распределения размерности $n-2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [5]. Назовем тензор Схоутена *тензором кривизны распределения* D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Внутренняя линейная связность может быть определена [10] заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение D. Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ — естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D. Задание эндоморфизма $N : D \to D$ позволяет определить N-продолженную связность — связность в векторном расслоении с тотальным пространством D, осуществляющую параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия X.

В подходящем образом выбранной системе координат [10] векторные поля ($\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b}$, $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a}$) определяют на D неголономное поле базисов, а формы (dx^a, $\Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a$, $\Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n$) — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + x^{n+d}(2\omega_{ba} N^c_d + R^c_{bad}) \partial_{n+c}, \tag{6}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d}(\partial_n \Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d) \partial_{n+c}, \tag{7}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c}. \tag{8}$$

Из (6)–(8) получаем выражение для тензора кривизны N-продолженной связности:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} + 2\omega(\vec{x}, \vec{y}) N \vec{z}, \tag{9}$$

$$K(\vec{\xi}, \vec{x})\vec{y} = P(\vec{x}, \vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}} N)\vec{y}, \qquad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma D. \tag{10}$$

Здесь $P^a_{bc} = \partial_n \Gamma^a_{bc}$ — компоненты допустимого тензора типа $(2, 1)$.

Замечание 3. Для (почти) K-контактных пространств тензор кривизны Схоутена наделен теми же свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае это не так.

Теорема 5. *Значения тензора кривизны $K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma TX$ N-связности однозначно определяются равенствами* (9)*,* (10).

Доказательство теоремы 5 сводится к непосредственному вычислению компонент тензора кривизны N-связности.

4. N-СВЯЗНОСТЬ НА МНОГООБРАЗИИ С ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ КЭЛЕРОВОЙ СТРУКТУРОЙ И СТРУКТУРОЙ КЕНМОЦУ

Пусть X — многообразие с почти контактной кэлеровой структурой [9]. Имеет место (см. [6]):

Теорема 6. *Почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда выполняются равенства $L_{\vec{\xi}} g = 0$, $\nabla^1 \varphi = 0$, где ∇^1 — N-продолженная связность с нулевым эндоморфизмом.*

Следующая теорема является следствием теоремы 6.

Теорема 7. *Почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда $L_{\vec{\xi}} g = 0$ и эндоморфизм N коммутирует с эндоморфизмом φ.*

Доказательство. Имеет место равенство:

$$\nabla^N_n \varphi^a_b = \nabla^1_n \varphi^a_b + N^a_c \varphi^c_b - N^c_b \varphi^a_c.$$

Таким образом, как следует из теоремы 6, почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда $N^a_c \varphi^c_b - N^c_b \varphi^a_c = 0$, что и доказывает теорему. □

Пусть теперь X — многообразие Кенмоцу. Равенство (2) влечет следующее равенство [7]:

$$L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta).$$

Отсюда следует, что $L_{\vec{\xi}} g(\vec{x}, \vec{y}) = 2g(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma D$. Сравнивая последнее равенство с равенством (3), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 8. *Если ∇_n^N — метрическая N-связность многообразия Кенмоцу, то $g(\vec{x},\vec{y}) = g(N\vec{x},\vec{y})$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma D$.*

Другими словами, для метрической N-связности многообразия Кенмоцу эндоморфизм N совпадает с тождественным оператором.

Библиографический список

1. *Cartan E.* Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relative generalines. Pt. I // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1923. Vol. 40. P. 325–412.
2. *Yano K.* On semi-symmetric metric connections // Revue Roumaine de Math. Pures et Appliques. 1970. Vol. 15. P. 1579–1586.
3. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor, N. S. 1975. Vol. 29. P. 249–254.
4. *Schouten J., van Kampen E.* Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // Math. Ann. 1930. Vol. 103. P. 752–783.
5. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
6. *Галаев С. В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Матем. 2014. № 8. С. 42–52.
7. *Pitis G.* Geometry of Kenmotsu manifolds. Brasov : Publishing House of Transilvania University of Brasov, 2007. iv+160 p.
8. *Галаев С. В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
9. *Bejancu A.* Kahler contact distributions // J. Geom. Phys. 2010. Vol. 60, № 12. P. 1958–1967.
10. *Букушева А. В., Галаев С. В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. № 4. С. 1–9.

Almost Contact Metric Spaces with N-connection

S. V. Galaev

Galaev Sergei Vasil'evich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, sgalaev@mail.ru

On a manifold with an almost contact metric structure $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g, X, D)$ and an endomorphism $N : D \to D$, a notion of the N-connection is introduced. The conditions under which an N-connection is compatible with an almost contact metric structure $\nabla^N \eta = \nabla^N g = \nabla^N \vec{\xi} = 0$ are found. The relations between the Levi – Civita connection, the Schouten – van-Kampen connection and the N-connection are investigated. Using the N-connection the conditions under which an almost contact metric structure is an almost contact Kahlerian structure are investigated.

Key words: almost contact metric structure, N-connection, Schouten – van-Kampen connection, curvature tensor of N-connection, almost contact Kahlerian spaces.

References

1. Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relative generalines. Pt. I. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 1923, vol. 40, pp. 325–412.
2. Yano K. On semi-symmetric metric connections. *Revue Roumaine de Math. Pures et Appliques*, 1970, vol. 15, pp. 1579–1586.
3. Golab S. On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. *Tensor, N. S.*, 1975, vol. 29, pp. 249–254.
4. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Math. Ann.*, 1930, vol. 103, pp. 752–783.
5. Vagner V. V. The geometry of an $(n-1)$-dimensional nonholonomic manifold in an n-dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).
6. Galaev S. V. Almost contact Kähler manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Russian Math.*, 2014, vol. 58, iss. 8, pp 35–42. DOI: 10.3103/S1066369X14080040.
7. Pitis G. *Geometry of Kenmotsu manifolds*. Brasov, Publishing House of Transilvania University of Brasov, 2007, iv+160 p.
8. Galaev S. V. The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds. *Izv. Saratov Univ.*

(N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 16–22 (in Russian).

9. Bejancu A. Kahler contact distributions. *J. Geom. Phys.*, 2010, vol. 60, no. 12, pp. 1958–1967.

10. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Connections over a distribution and geodesic sprays. *Russian Math.*, 2013, vol. 57, no. 4, pp. 7–13. DOI: 10.3103/S1066369X13040026.

УДК 517.958

УСРЕДНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АКУСТИКИ

А. А. Герус[1], С. А. Гриценко[2]

[1]Герус Артур Андреевич, аспирант кафедры математики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, artur-gerus@bsu.edu.ru

[2]Гриценко Светлана Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и математической физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, sgritsenko@bsu.edu.ru

В работе исследуется математическая модель акустики в гетерогенной среде с двумя компонентами, разделенными общей границей. Одна из компонент является ограниченной жидкой областью, другая — упругим телом. Упругое тело пронизано системой пор, заполненных жидкостью. Дифференциальные уравнения модели, описывающие движение жидкости и совместное движение твердого скелета и жидкости в порах, базируются на классических законах механики сплошной среды и содержат быстро осциллирующие коэффициенты, зависящие от малого параметра, равного отношению среднего размера пор к размеру рассматриваемой области. Быстро осциллирующие коэффициенты делают невозможным применение модели для численных расчетов. В работе доказывается существование обобщенного решения начально-краевой задачи. На основе метода двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга выводятся усредненные уравнения (т. е. уравнения, не содержащие быстро осциллирующих коэффициентов) для различных случаев. Полученные приближенные модели могут быть полезны для численных расчетов.

Ключевые слова: композитные среды, периодическая структура, уравнения Стокса, уравнения Ламе, уравнения акустики, пороупругость, усреднение периодических структур, двухмасштабная сходимость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-264-272

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваемая ограниченная область $Q \in R^3$ представляет собой единичный куб: $Q = (0,1) \times \times (0,1) \times (0,1)$, в котором пороупругая среда занимает область $\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,a)$, $0 < a < 1$, а область $\Omega^{(f)}$, занятая жидкостью, есть открытое дополнение области Ω:

$$Q = \Omega \cup \Omega^{(f)} \cup S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(f)}.$$

Движение жидкости в пороупругой области Ω описывается системой уравнений:

$$\left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\right) p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \tag{1}$$

$$(\varrho_f \chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s)\,\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \mathbf{F}, \tag{2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right) + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\,\mathbb{I}, \tag{3}$$

где $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ — характеристическая функция порового пространства $\Omega_f^\varepsilon \in \Omega$, $\bar{c}_s$ и $\bar{c}_f$ — скорость звука в твердой и жидкой части соответственно, ρ — плотность среды, $\mathbf{F}$ — заданный вектор распределенных массовых сил, l — средний размер пор, L — характерный размер рассматриваемой области, малый параметр $\varepsilon = l/L$. Здесь и далее в работе используются обозначения

$$B : C = tr(BC^T),$$