10. Levin B. Ja. *Distribution of Zeros of Entire Functions*. Translations of Math. Monographs, vol. 5, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1964; revised ed. 1980.

11. Abuzyarova N. F. A property of subspaces admitting spectral synthesis. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1999, vol. 190, no. 4, pp. 3—22.

УДК 517.54

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТЫМ КОНЦОМ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Е. Г. Ганенкова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Петрозаводский государственный университет, g_ek@inbox.ru

В 1954 г. М. Хайнс (M. Heins) доказал, что если A — аналитическое множество, содержащее бесконечность, то существует целая функция, для которой A является асимптотическим множеством. В статье получен аналог теоремы Хайнса: для произвольной многосвязной плоской области D с изолированным граничным фрагментом, аналитического множества A, содержащего бесконечность, и простого конца области D с носителем p построен пример аналитической в D функции, для которой множество асимптотических значений, связанных с p, совпадает с A.

Ключевые слова: асимптотическое значение, простой конец, аналитическая функция, аналитическое множество.

Пусть D — область из $\mathbb{C}$, f — определенная в D функция, $z_0 \in \partial D$ — достижимая граничная точка, т. е. существует кривая, лежащая в D, кроме конца z_0.

Определение 1 [1, гл. 1.6, с. 21; 2, с. 336]. Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *асимптотическим значением* функции f в точке z_0, если существует кривая Γ_a, целиком лежащая в D, кроме своего конца z_0, такая, что

$$\lim_{\Gamma_a \ni z \to z_0} f(z) = a.$$

Кривая Γ_a называется *асимптотической кривой*, соответствующей асимптотическому значению a. Множество всех асимптотических значений (*асимптотическое множество*) функции f в точке z_0 обозначается $\mathrm{As}(f, z_0)$.

По теореме Иверсена (F. Iversen) [1, гл. 1.6, с. 23; 3; 4, гл. 5.1, с. 224] для непостоянной целой функции f асимптотическое множество $\mathrm{As}(f, \infty)$ содержит бесконечность. Также это множество является аналитическим (в смысле Суслина) [5], т. е. может быть представлено в виде

$$A = \bigcup_{(n_1, n_2, \dots)} \{A_{n_1} \cap A_{n_1 n_2} \cap A_{n_1 n_2 n_3} \cap \dots\},$$

где $A_{n_1 \dots n_k}$ — замкнутые множества, а объединение берется по всевозможным наборам $(n_1, n_2, \dots)$ натуральных чисел (более подробную информацию об аналитических множествах можно найти, например, в [6, гл. VIII, § 32; 7, с. 135]).

В 1918 г. В. Гросс (W. Gross) [8] построил пример целой функции, множеством асимптотических значений которой является расширенная комплексная плоскость. В 1954 г. М. Хайнс (M. Heins) [9] доказал, что для любого аналитического множества A, $\infty \in A$, существует целая функция, асимптотическое множество которой совпадает с A.

В [10, 11] рассматривались функции более общего вида: аналитические в некоторой плоской области произвольной связности с изолированным граничным фрагментом.

Определение 2 [12]. Область $D \subset \mathbb{C}$ имеет *изолированный граничный фрагмент*, если выполняется одно из условий:

(I) существуют континуум $K \subset \partial D$ и открытое множество U такие, что $K \subset U$ и $(\partial D \setminus K) \cap U = \emptyset$;

(II) существуют простая кривая $\Gamma \subset \partial D$ с различными концами ξ, η и открытый круг B такие, что $\xi, \eta \in \partial B$, $\Gamma \setminus \{\xi, \eta\} \subset B$ и $(\partial D \setminus \Gamma) \cap B = \emptyset$.

(III) существует изолированная точка множества ∂D.

Если выполняется условие (I), (II) или (III), то говорят, что D имеет изолированный граничный фрагмент I, II или III рода соответственно.

В [11] был получен следующий аналог результата М. Хайнса.

Теорема A. *Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F. Пусть точка $z_0 \in F$. Если F — фрагмент I рода, то будем дополнительно предполагать, что z_0 — достижимая граничная точка, являющаяся носителем некоторого простого конца области D. Пусть A — аналитическое множество, содержащее бесконечность. Тогда существуют аналитическая и однолистная в D функция φ и целая функция Φ, для которых $As(\Phi \circ \varphi, z_0) = A$. Если A — бесконечное множество, то*

$$\overline{\lim_{z\to z_0}} \frac{\ln\ln|\Phi(\varphi(z))|}{\ln|\varphi(z)|} = \infty.$$

Ранее в [10] теорема A была доказана в случае $A = \overline{\mathbb{C}}$.

Напомним определение простого конца односвязной области. Для этого введем необходимые определения (см., например, [1, гл. 9, с. 220; 13, гл. II, § 3, с. 42; 14, гл. 2.4, с. 27]).

Определение 3. Простая кривая с концами на границе односвязной области D_0, остальные точки которой лежат в D_0, называется *разрезом* области D_0.

Определение 4. Последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ разрезов области D_0 называется *цепью* разрезов, если выполнены следующие условия:

1) никакие два разреза не имеют общих точек (включая и их концы);

2) разрез C_n разделяет область D_0 на две подобласти, одна из которых содержит C_{n-1}, другая C_{n+1};

3) $\operatorname{diam} C_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{C_n'\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторые цепи разрезов области D_0. Через V_n (V_n'), $n = 1, 2, \ldots$, будем обозначать ту из двух компонент $D_0 \setminus C_n$ $(D_0 \setminus C_n')$, которая не содержит разреза C_0 (C_0').

Определение 5. Две цепи $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{C_n'\}_{n=1}^{\infty}$ называются *эквивалентными*, если для достаточно большого m существует такой номер n, что $V_n \subset V_m'$ и $V_n' \subset V_m$.

Определение 6. *Простым концом* односвязной области D_0 называется класс эквивалентных цепей, *носитель* простого конца определяется как $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$.

Заметим, что носитель простого конца области D_0 — множество на ∂D_0, которое может быть континуальным.

В теореме A под носителем p простого конца области D (может быть многосвязной) понимается носитель p простого конца односвязной области D_0, обладающей свойствами $D \subset D_0$, $\partial D_0 = K$ — граничная компонента области D, содержащая p.

Кроме асимптотических значений функции в точке рассматривают также асимптотические значения, связанные с подмножеством E на ∂D. Пусть D — плоская область, $E \subset \partial D$, f — определенная в D функция.

Определение 7 [2, с. 337]. Число $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *асимптотическим значением* функции f, *связанным с* E, если существует кривая $\Gamma_a \subset D$ с параметризацией $\upsilon_a(t)$, $t \in [0; 1)$, $\operatorname{dist}(\upsilon_a(t), E) \to 0$ при $t \to 1-$ такая, что

$$\lim_{\substack{\operatorname{dist}(z,E)\to 0\\ z\in\Gamma_a}} f(z) = a.$$

Множество всех таких значений обозначают $\operatorname{As}(f, E)$.

Обобщим теорему A, заменяя граничную точку z_0 области D носителем некоторого простого конца.

Теорема 1. *Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F, $p \in F$ — носитель простого конца области D. Пусть A — аналитическое множество, содержащее бесконечность. Тогда существуют аналитическая и однолистная в D функция φ и целая функция Φ такие, что $As(\Phi \circ \varphi, p) = A$. Если A — бесконечное множество, то*

$$\overline{\lim_{\operatorname{dist}(z,p)\to 0}} \frac{\ln\ln|\Phi(\varphi(z))|}{\ln|\varphi(z)|} = \infty.$$

Доказательство. Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F, $p \in F$ — носитель простого конца области D. Чтобы доказать теорему 1 достаточно рассмотреть случай фрагмента I рода. Если же F — фрагмент II или III рода, то носителем простого конца $p \in F$ всегда является точка, т. е. получаем утверждение известной теоремы A.

Рассмотрим односвязную область D_0 такую, что $\partial D_0 = F$, $D \subset D_0$. По теореме Римана существует аналитическая функция ψ, однолистная, отображающая D_0 на верхнюю полуплоскость $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$. Функцию ψ подберем так, чтобы простому концу области D с носителем p соответствовала точка $0 \in \partial\Pi$. Это соответствие следует понимать так (см., например, [13, гл. II, § 3; 14, с. 31]): $\Pi \ni z_n \to 0$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{dist}(\psi^{-1}(z_n), p) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, если γ — кривая в Π с концом в нуле и параметризацией $\nu(t), t \in [0; 1)$, то $\psi^{-1}(\gamma)$ — кривая в D_0, причем $\mathrm{dist}(\psi^{-1}(\nu(t)), p) \to 0$ при $t \to 1-$.

Обозначим $D_1 = \psi(D)$. Тогда $D_1 \subset \Pi$ и в силу того что F — изолированный граничный фрагмент, $\partial D_1 \setminus \mathbb{R}$ содержится в некотором компактном множестве из Π. Поэтому существует полукруг

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho,\ \mathrm{Im} z > 0\},$$

целиком лежащий в D_1.

Применим к D_1 аналитическую функцию:

$$w(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Образом D_1 под действием $w(z)$ является область D_2, содержащаяся в области $H = \mathbb{C} \setminus \{t, t \geq 0\}$, причем $\partial D_2 \setminus \{t, t \geq 0\}$ содержится в круге $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/\rho^2\}$.

Пусть Φ — целая функция, построенная в [9], такая, что $\mathrm{As}(\Phi, \infty) = A$. Пусть γ_a — ее асимптотические кривые, соответствующие $a \in A$. В [11] исследовалось местоположение кривых γ_a. Было показано, что существует простая кривая l, идущая в бесконечность, и такая, что $\gamma_a \cap l = \varnothing$ для всех $a \in A$. Обозначим $G = \mathbb{C} \setminus l$. По теореме Римана существует аналитическая однолистная функция τ, отображающая H на G. Функцию τ подберем таким образом, что $H \ni w_n \to \infty$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $G \ni \tau(w_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда $D_3 = \tau(D_2) \subset G$ и $\partial D_3 \setminus l$ лежит в некотором круге $K = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| < R\}$.

Чтобы построить искомую аналитическую и однолистную в D функцию φ, возьмем суперпозицию $\varphi = \tau \circ w \circ \psi$. По построению φ отображает D на D_3 и простому концу области D (т. е. области D_0) с носителем p соответствует бесконечность. Для $a \in A$ положим

$$\Gamma_a = \varphi^{-1}(\gamma_a \cap K).$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\mathrm{dist}(z,p)\to 0 \\ z \in \Gamma_a}} \Phi(\varphi(z)) = \lim_{\gamma_a \ni \tau \to \infty} \Phi(\tau) = a,$$

т. е. $\mathrm{As}(\Phi \circ \varphi, p) = A$.

Если A — бесконечное множество, то по теореме Л. В. Альфорса (L. V. Ahlfors) [15] (см. также [4, с. 234]) Φ — функция бесконечного порядка. Это означает, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \max\limits_{|t|=r} |\Phi(t)|}{\ln r} = \infty.$$

Следовательно, существует последовательность $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln |\Phi(t_n)|}{\ln |t_n|} = \infty.$$

Предположим, что существует ее подпоследовательность $\{t_n\}$ (сохраним обозначение), содержащаяся в D_3. В [11] показано, что свойство $\gamma_a \cap l = \varnothing$, $\forall\, a \in A$, выполняется не только для кривой l, но и для некоторой другой кривой l', идущей в бесконечность, $l \cap l' = \varnothing$. Поэтому, если подпоследовательности $\{t_n\} \subset D_3$ не существует, мы добьемся нужного свойства ($\{t_n\} \subset D_3$) заменой l на l' в определении области G.

Пусть $z_n = \varphi^{-1}(t_n)$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\ln |\Phi(\varphi(z_n))|}{\ln |\varphi(z_n)|} = \infty.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{\operatorname{dist}(z,p)\to 0}} \frac{\ln\ln|\Phi(\varphi(z))|}{\ln|\varphi(z)|} = \infty. \qquad \square$$

Следствие. *Если в теореме 1 взять непустое аналитическое множество A, не обязательно содержащее бесконечность, то можно построить мероморфную в D функцию f, обладающую свойством $As(f,p) = A$. Таковой является функция*

$$\frac{1}{\Phi\circ\varphi(z)} + a_0,$$

где $a_0 \in A$, а Φ и φ — функции из теоремы 1, для которых

$$\mathrm{As}(\Phi\circ\varphi, p) = \widetilde{A} = \left\{ w\in\mathbb{C} : w = \frac{1}{z-a_0}, z \in A \right\}, \qquad \infty \in \widetilde{A}.$$

Пусть f — функция, аналитическая в плоской области D с изолированным граничным фрагментом F. Рассмотрим множество простых концов с носителями $p_\alpha \in F$, для которых множество $\mathrm{As}(f, p_\alpha)$ состоит более, чем из одной точки. Множество таких простых концов не более чем счетно. Этот факт следует из теоремы Ф. Бейджмила (F. Bagemihl) о точках неопределенности [16] (см. также [1, гл. 4.7, с. 118]).

В приведенной теореме 2 для заданных аналитического множества A, $\infty \in A$ и области D с изолированным граничным фрагментом F I рода строится пример аналитической в D функции f, обладающей свойством $\mathrm{As}(f,p_n) = A_n$ для некоторой последовательности простых концов с носителями $p_n \in F$, где $A_1 = A$, а множества A_n, $n = 2,3,\ldots,$ — аналитические множества, полученные из A линейным преобразованием. Таким образом, в случае, когда $A = \overline{\mathbb{C}}$, получаем пример функции, имеющей максимальное асимптотическое множество для максимального по мощности множества простых концов с носителями на F. Результат, подобный теореме 2 (теорема B), был получен в [11] для области с фрагментом II рода (носителем простого конца в этом случае всегда является точка, а в теореме 2 p_n — это, вообще говоря, континуальные множества).

Теорема B. *Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F II рода, A — аналитическое множество, $\infty \in A$. Тогда существуют аналитическая в D функция f и счетное множество точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, принадлежащих F, такие, что $As(f,z_n) = A_n$, где $A_1 = A$, $A_n = c^{1-n}A + b_n$, $n = 2,3,\ldots,$ c — любая константа, обладающая свойством $|c| > 1$ и b_n — некоторые константы.*

С помощью теоремы B докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть D — область с изолированным граничным фрагментом F I рода, A — аналитическое множество, $\infty \in A$. Тогда существует последовательность простых концов области D с носителями $p_n \in F$ и аналитическая в D функция f, обладающая свойством $As(f,p_n) = A_n$, где $A_1 = A$, $A_n = c^{1-n}A + b_n$, $n = 2,3,\ldots,$ c — любая константа, обладающая свойством $|c| > 1$, b_n — некоторые константы.*

Доказательство. Рассмотрим односвязную область D_0 такую, что $\partial D_0 = F$ и $D \subset D_0$. Отобразим ее с помощью некоторой аналитической однолистной функции g на единичный круг Δ. Тогда $D_1 = g(D) \subset \Delta$ — область с изолированным граничным фрагментом II рода. Этим фрагментом является дуга $\Gamma \subset \partial\Delta$. По теореме B существуют последовательность $w_n \in \Gamma$ и аналитическая в D_1 функция h, для которых $\mathrm{As}(h, w_n) = A_n$. По теореме о соответствии границ (см., например, [13, гл. II, § 3; 14, с. 30]) точкам $w_n \in \Gamma$ соответствуют простые концы области D с носителями $p_n \in F$.

Пусть $\gamma_{a,n}$ — кривые из D_1 с концом в w_n такие, что

$$\lim_{\gamma_{a,n}\ni w\to w_n} h(w) = c^{1-n}a + b_n, \quad a \in A.$$

Тогда $\Gamma_{a,n} = g^{-1}(\gamma_{a,n})$ — кривые в D с параметризацией $\nu_{a,n}(t)$, $t \in [0;1)$, такие, что

$$\operatorname{dist}(\nu_{a,n}(t), p_n) \underset{t\to 1-}{\to} 0.$$

Следовательно, для всех $a \in A$

$$\lim_{\substack{\operatorname{dist}(z,p_n)\to 0\\ z\in\Gamma_{a,n}}} h(g(z)) = \lim_{\gamma_{a,n}\ni w\to w_n} h(w) = c^{1-n}a + b_n.$$

Поэтому $\mathrm{As}(h\circ g, p_n) = A_n$, $n = 1,2,\ldots,$ т. е. $f = h\circ g$ — искомая функция. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00510) и программы стратегического развития Петразаводского государственного университета в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию научно-исследовательской деятельности.

Библиографический список

1. *Коллингвуд Э., Ловатер Л.* Теория предельных множеств. М. : Мир, 1971. 312 с.
2. Математическая энциклопедия / гл. ред. И. М. Виноградов : в 5 т. Т. 1. А–Г. М. : Сов. энцикл., 1977. 576 с.
3. *Iversen F.* Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Helsinki : Imprimerie de la Société de littérature finnoise, 1914.
4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М. : Наука, 1970. 592 с.
5. *Mazurkiewicz S.* Sur les points singuliers d'une fonction analytique // Fund. Math. 1931. Vol. 17, iss. 1. P. 26–29.
6. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М. ; Л. : Объединенное науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1937. 305 с.
7. *Sierpinski W.* General topology. Toronto : Univ. Toronto Press, 1952. 304 p.
8. *Gross W.* Eine ganze Funktion, für die jede Komplexe Zahl Konvergenzwert ist // Math. Ann. 1918. Vol. 79, iss. 1–2. P. 201–208.
9. *Heins M.* The set of asymptotic values of an entire function // Proc. of the Scandinavian Math. Congress. Lund, 1953, 1954. P. 56–60.
10. *Ganenkova E. G., Starkov V. V.* Asymptotic values of functions, analytic in planar domains // Проблемы анализа. Issues of Analysis. 2013. Т. 2(20), № 1. С. 38–42.
11. *Ganenkova E. G., Starkov V. V.* Analytic in planar domains functions with preassigned asymptotic set // J. Appl. Anal. 2014. Vol. 20, iss. 1. P. 7–14. DOI: 10.1515/jaa2014-0002.
12. *Liczberski P., Starkov V. V.* On locally biholomorhic mappings from multi-connected onto simply connected domains // Ann. Polon. Math. 2005. Vol. 85, № 2. P. 135–143.
13. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966. 628 с.
14. *Pommerenke Ch.* Boundary behaviour of conformal maps. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1992. 301 p.
15. *Ahlfors L. V.* Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen // Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Series A. 1930. Vol. 1, № 9. P. 1–40.
16. *Bagemihl F.* Curvilinear cluster sets of arbitrary functions // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1955. Vol. 41, № 6. P. 379–382.

Asymptotic Values of Analytic Functions Connected with a Prime End of a Domain

E. G. Ganenkova

Petrozavodsk State University, 33, Lenina ave., Petrozavodsk, 185910, Russia, g_ek@inbox.ru

In 1954 M. Heins proved that for any analytic set A, containing the infinity, there exists an entire function with asymptotic set A. In the article we prove the following analog of Heins's theorem: for a multi-connected planar domain D with an isolated boundary fragment, an analytic set A, $\infty \in A$, and a prime end of D with impression p there exists an analytic in D function f such that A is the set of asymptotic values of f connected with p.

Key words: asymptotic set, prime end, analytic function, analytic set.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-01-00510) and by the program of strategic development of Petrozavodsk State University in the framework of implementation of complex of measures on development scientific research.

References

1. Collingwood E. F., Lohwater A. J. *The theory of cluster sets*. Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 1966, 213 p. (Rus. ed. : Collingwood E., Lohwater A. Teorija predel'nyh mnozhestv. Moscow, Mir, 1971, 312 p.)
2. *Encyclopedia of Mathematics* : ed. I. M. Vinogradov, Vol. 1 : A–G, Moscow, Sovetskaja Jenciklopedija, 1977, 576 p. (in Russian).
3. Iversen F. *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Helsinki, Imprimerie de la Société de littérature finnoise, 1914.
4. Goldberg A. A., Ostrovskii I. V. *Value Distribution of Meromorphic Functions*. Transl. Math. Mono., vol. 236, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 2008, 499 p. (Rus. ed. : Goldberg A. A., Ostrovskii I. V. Raspredelenie znachenii meromorfnykh funktsii. Moscow, Nauka, 1970, 592 p.)
5. Mazurkiewicz S. Sur les points singuliers d'une fonction analytique. *Fund. Math.*, 1931, vol. 17, iss. 1, pp. 26–29.
6. Hausdorff F. *Teorija mnozhestv* [Set theory]. Moscow, Leningrad, Ob'edinennoe nauchno-tehnicheskoe izdatel'stvo NKTP USSR, 1937, 305 p. (in Russian).

7. Sierpinski W. *General topology*. Toronto, Univ. Toronto Press, 1952, 304 p.
8. Gross W. Eine ganze Funktion, für die jede Komplexe Zahl Konvergenzwert ist. *Math. Ann.*, 1918, vol. 79, iss. 1–2, pp. 201–208.
9. Heins M. The set of asymptotic values of an entire function. *Proceedings of the Scandinavian Math. Congress*, Lund, 1953, 1954, pp. 56–60.
10. Ganenkova E. G., Starkov V. V. Asymptotic values of functions, analytic in planar domains. *Issues of Analysis*, 2013, vol. 2(20), no. 1, pp. 38–42.
11. Ganenkova E. G., Starkov V. V. Analytic in planar domains functions with preassigned asymptotic set. *J. Appl. Anal.*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 7–14. DOI: 10.1515/jaa2014-0002.
12. Liczberski P., Starkov V. V. On locally biholomorhic mappings from multi-connected onto simply connected domains. *Ann. Polon. Math.*, 2005, vol. 85, no. 2, pp. 135–143.
13. Goluzin G. M. *Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of functions of complex variables]. Moscow, Nauka, 1966, 628 p.
14. Pommerenke Ch. *Boundary behaviour of conformal maps*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1992, 301 p.
15. Ahlfors L. V. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. *Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Series A*, 1930, vol. 1, no. 9, pp. 1–40.
16. Bagemihl F. Curvilinear cluster sets of arbitrary functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1955, vol. 41, no. 6, pp. 379–382.

УДК 519.853

О ПОДХОДЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

С. И. Дудов[1], М. А. Осипцев[2]

[1] Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, DudovSI@info.sgu.ru

[2] Старший преподаватель кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Osipcevm@gmail.com

Рассматривается конечномерная задача о наилучшем приближении в метрике Хаусдорфа выпуклого тела шаром произвольной нормы с фиксированным радиусом. Показано, что в случае, когда приближаемое тело и шар нормы являются многогранниками, задача сводится к задаче линейного программирования. Это позволяет предложить получение приближённого решения задачи через предварительную аппроксимацию приближаемого компакта и единичного шара нормы многогранниками.

Ключевые слова: выпуклое тело, метрика Хаусдорфа, функция расстояния, аппроксимация, субдифференциал.

1. Пусть D — заданное выпуклое тело из конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^p$, а $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Рассматривается задача

$$\phi(x,r) \equiv h(D, Bn(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{1}$$

Здесь $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x,

$$h(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b),\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\right\} \quad — \tag{2}$$

расстояние Хаусдорфа между множествами A и B, индуцированное нормой $n(\cdot)$.

Впервые задача о приближении выпуклого компакта евклидовым шаром в метрике Хаусдорфа, причём произвольного радиуса, т. е. когда функция $\phi(x,r)$ минимизируется по $(x,r) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+$, рассматривалась в [1]. Для случая произвольной нормы эта задача исследовалась в работе [2].

В работе [3] показано, что задача (1) своими решениями для значений радиуса r из определённых диапазонов, выражает решения задач об описанном и вписанном шарах для D и задачи наилучшего приближения шаром произвольного радиуса. Авторам известны и другие задачи по шаровым оценкам выпуклого компакта (например, задача об асферичности [4]), на которое распространяется это универсальное свойство задачи (1).

Важное значение имеет полученная в [2] формула, выражающая расстояние Хаусдорфа (2) между выпуклым компактом D и шаром $Bn(x,r)$:

$$h(D, Bn(x,R)) = \max\{R(x) - r,\ P(x) + r\}. \tag{3}$$