УДК 514.76

ДОПУСТИМЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ САСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Галаев

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, sgalaev@mail.ru

Вводятся понятия допустимой (почти) гиперкомплексной структуры и почти контактной гиперкэлеровой структуры. На многообразии M с почти контактной структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,D)$ определяется внутренняя симметричная связность ∇. В случае контактного многообразия размерности, большей или равной пяти, доказывается, что обращение в нуль тензора кривизны связность ∇ эквивалентно существованию адаптированных систем координат, относительно которых коэффициенты внутренней связности равны нулю. На распределении D почти контактной структуры как на тотальном пространстве векторного расслоения (D,π,M) определяется допустимая почти гиперкомплексная структура $(\tilde{D},J,J_1,J_2,\vec{u},\lambda=\eta\circ\pi_*,D)$. При условии, что допустимая почти комплексная структура φ интегрируема, доказывается, что построенная почти гиперкомплексная структура интегрируема тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны. В случае сасакиевой структуры $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$ находятся условия, при которых допустимая гиперкомплексная структура $(\tilde{D},J,J_1,J_2,\vec{u},\lambda=\eta\circ\pi_*,\tilde{g},D)$ является почти контактной гиперкэлеровой структурой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, допустимая гиперкомплексная структура, почти контактная гиперкэлерова структура, распределение нулевой кривизны.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272

ВВЕДЕНИЕ

Изучение геометрии касательных расслоений начинается с основополагающей работы Сасаки (S. Sasaki) [1], опубликованной в 1958 г. Сасаки, используя риманову метрику g, заданную на гладком многообразии M, определяет риманову метрику g^S на его касательном расслоении TM. Конструкция Сасаки основана на естественном расщеплении (имеющему место благодаря существованию на римановом многообразии связности Леви – Чивита) касательного расслоения TTM многообразия TM в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений, слои которых изоморфны слоям расслоения TM. Исследования Сасаки послужили началом целой серии работ, посвященных изучению метрики Сасаки g^S и почти комплексной структуры J, естественным образом возникающих на касательном TM и кокасательном T^*M расслоениях риманова многообразия (M,g) (см., например, [2, 3]). Свойства метрики Сасаки g^S и канонической почти комплексной структуры J зависят от особенностей исходной структуры риманова многообразия (M,g). Так, например, каноническая почти комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда (M,g) — плоское риманово многообразие [4, 5]. Нечетным аналогом касательного расслоения является распределение D почти контактной метрической структуры $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$. Так же, как и расслоение TTM, касательное расслоение TD благодаря заданию связности над распределением [6, 7] (а затем и N-продолженной связности — связности в векторном расслоении (D,π,M)) разлагается в прямую сумму вертикального и горизонтального распределений. Как показано в [8, 9], на многообразии D, тем самым, естественным образом определяется почти контактная метрическая структура.

Гиперкомплексная структура на гладком многообразии M представляет собой тройку интегрируемых почти комплексных структур (I,J,K), удовлетворяющих соотношению $IJ=-JI=K$. При этом M называется гиперкомплексным многообразием. Одним из первых гиперкомплексные структуры рассматривал Обата (Obata) [10, 11]. В настоящее время активно изучаются гиперкомплексные структуры, определяемые на касательном расслоении TM эрмитова многообразия (M,g,J) (см., например, [12, 13]).

В настоящей работе определяется контактный аналог гиперкомплексной структуры — допустимая гиперкомплексная структура $(M,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,D)$. Мы требуем, чтобы каждая допустимая структура [6] φ_i, $i=1,2,3$, удовлетворяла условию $N_{\varphi_i}+2(d\eta\circ\varphi_i)\otimes\vec{\xi}=0$ [7], замещающему условие интегрируемости почти комплексной структуры. В настоящей работе доказывается, что допустимая гиперкомплексная структура естественным образом возникает на распределении нулевой кривизны D почти контактной структуры $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,D)$.

В последние годы на гладком многообразии M с почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ все чаще, наряду со связностью Леви – Чивита, исследуются как метрические, так и не метрические связности с кручением. В настоящей работе на почти контактном метрическом многообразии рассматривается связность $\nabla^N_{\vec{x}}$, называемая N-связностью, однозначно определяемая условиями

1) $S(\vec{x}, \vec{y}) = 2\omega(\vec{x}, \vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(TM)$;
2) $\nabla^N_{\vec{x}} g(\vec{y}, \vec{z}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$;
3) $\nabla^N_{\vec{x}} \vec{\xi} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$;
4) $\nabla^N_{\vec{x}} \eta = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$,

где $S(\vec{x}, \vec{y})$ — кручение связности, $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения структуры.

N-связность может быть отождествлена с парой (∇, N), где ∇ — внутренняя связность [6], осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. В настоящей работе N-связность используется для задания на распределении D допустимой гиперкэлеровой структуры.

Работа устроена следующим образом. В п. 2 на почти контактном (метрическом) многообразии M определяются внутренняя и N-продолженная связности. Устанавливается соответствие между классом N-продолженных связностей и подклассом линейных связностей на многообразии с почти контактной (метрической) структурой. Доказывается, что в случае контактного многообразия размерности большей или равной пяти обращение в нуль тензора кривизны внутренней связности эквивалентно существованию адаптированных систем координат, для которых коэффициенты внутренней связности равны нулю. В п. 3 на распределении D почти контактной структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ как на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, M) определяется допустимая почти гиперкомплексная структура $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$. Находятся условия, при которых полученная структура интегрируема. Отдельно рассматривается случай почти контактной метрической структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$.

1. ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Предположим, что на гладком многообразии M нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geqslant 1$, задана почти контактная структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$, где φ — тензор типа $(1, 1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой. В соответствии с определением почти контактной структуры выполняются следующие условия:

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \qquad \eta(\vec{\xi}) = 1.$$

Мы требуем, чтобы $\vec{\xi} \in \ker \omega$, где $\omega = d\eta$. Почти контактная структура называется контактной, если $rk\omega = 2m$. Многообразие, наделенное (почти) контактной структурой, будем называть (почти) контактным многообразием. Почти контактное многообразие называется почти контактным метрическим многообразием, если M — (псевдо) риманово многообразие, метрический тензор g которого естественным образом [6] согласован с почти контактной структурой.

Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой почти контактной метрической структуры. Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется равенство $\Omega = d\eta$. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$ — его оснащение: $TM = D \oplus D^\perp$. В контактном случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker \omega = \mathrm{Span}(\vec{\xi})$, и называется вектором Риба. Будем называть D распределением почти контактной (метрической) структуры. В работе, в частности, рассматривается пространство (многообразие) Сасаки —- контактное метрическое пространство, удовлетворяющее дополнительному условию $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ. Выполнение условия $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ означает, что пространство Сасаки является нормальным пространством. Если условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ заменено более слабым условием $N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$, то соответствующее почти контактное (метрическое) многообразие будем называть почти нормальным, а структуру φ — интегрируемой или почти нормальной структурой.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n,\ a, b, c = 1, \ldots, n-1)$ многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [6]. Пусть $P : TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^{\perp}$, и $k(x^{\alpha})$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему $D : D = \mathrm{Span}(\vec{e}_a)$. Неголономному полю базисов $(\vec{e}_a) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ соответствует поле кобазисов $(dx^a,\ \eta = \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Условие $\vec{\xi} \in \ker\omega$ влечет справедливость равенства $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $k(x^{\alpha})$ и $k'(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:

$$x^a = x^a(x^{a'}), \qquad x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'}).$$

Тензорное поле t типа (p,q), заданное на почти контактном (метрическом) многообразии, назовем *допустимым* (*к распределению* D), если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η. Координатное представление допустимого тензорного поля в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q} \vec{e}_{a_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \cdots \otimes dx^{b_q}.$$

Преобразование компонент допустимого тензорного поля в адаптированных координатах подчиняется следующему закону:

$$t^a_b = A^a_{a'} A^{b'}_b t^{a'}_{b'},$$

где $A^{a'}_a = \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$.

Из формул преобразования компонент допустимого тензорного поля следует, что производные $\partial_n t^a_b$ являются компонентами допустимого тензорного поля. Заметим, что обращение в нуль производных $\partial_n t^a_b$ не зависит от выбора адаптированных координат.

Под внутренней линейной связностью [6] на многообразии с почти контактной структурой понимается отображение

$$\nabla :\ \Gamma(D) \times \Gamma(D) \to \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$;
2) $\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$;
3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A^{a'}_a \vec{e}_{a'}$, где

$$A^{a'}_a = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}, \tag{1}$$

обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов связности:

$$\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'} \Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'} \vec{e}_a A^{c'}_b. \tag{2}$$

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем:

$$S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}.$$

Координатное представление тензора кручения внутренней связности указывает на целесообразность называть внутреннюю связность с нулевым кручением симметричной связностью. Действие внутренней линейной связности обычным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Известно, что внутренняя линейная связность естественным образом возникает на почти контактном метрическом пространстве [6]. Если кручение внутренней связности равно нулю и $\nabla g = 0$, то соответствующую связность будем называть внутренней метрической связностью без кручения.

Внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством векторного расслоения (D, π, M). Будем говорить, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^\alpha, x^{n+a})$ такого, что $HD = \mathrm{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^\alpha) x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью. Пусть ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N : D \to D$ — поле допустимого тензора типа $(1, 1)$. N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD} = HD \oplus \mathrm{Span}(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ — вертикальный лифт. Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Всякому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии M, обычным образом соответствует его горизонтальный лифт $\vec{x}^h$, при этом $\vec{x}^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда $\vec{x}$ — допустимое векторное поле: $\vec{x} \in \Gamma(D)$.

Под кручением N-продолженной связности будем понимать кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для N-продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$, где ∇ — внутренняя связность. N-продолженную связность назовем метрической, если ∇ — внутренняя симметричная метрическая связность и выполняется равенство

$$\nabla^N_{\vec{\xi}} g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N^c_a g_{cb} - N^c_b g_{ac} = 0.$$

Пусть ∇ — внутренняя симметричная связность. Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, названо Вагнером [14] тензором кривизны Схоутена. Тензор Схоутена мы иногда будем называть тензором кривизны внутренней связности. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид

$$R^d_{abc} = 2\vec{e}_{[a} \Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a|e|} \Gamma^e_{b]c}.$$

Тензор кривизны внутренней связности возникает в результате альтернирования вторых ковариантных производных:

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} v^c = R^c_{abe} v^e + 4\omega_{ba} \partial_n v^c.$$

Назовем тензор кривизны внутренней связности тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, — распределением нулевой кривизны. Из формул (1), (2) следует, что частные производные $\partial_n \Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля, обозначаемого в дальнейшем $P(\vec{x}, \vec{y})$.

Для K-контактных [6] пространств тензор кривизны внутренней связности наделен теми же формальными свойствами, что и тензор кривизны риманова многообразия. В более общем случае препятствием к этому выступает наличие производных $\partial_n g_{bc}$ в равенстве

$$\nabla_{[e} \nabla_{a]} g_{bc} = 2\omega_{ea} \partial_n g_{bc} - g_{dc} R^d_{eab} - g_{bd} R^d_{eac}.$$

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b},\ \vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b} \partial_{n+a}, \partial_{n+a})$ определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a,\ \Theta^n = dx^a + \Gamma^n_a dx^a,\ \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b + N^a_b x^{n+b} dx^n)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba} \vec{u} + x^{n+d} (2\omega_{ba} N^c_d + R^c_{bad}) \partial_{n+c}, \tag{3}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}] = x^{n+d} (\partial_n \Gamma^c_{ad} - \nabla_a N^c_d) \partial_{n+c}, \tag{4}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c}, \qquad [\vec{u}, \partial_{n+a}] = N^c_a \partial_{n+c}.$$

Из (3), (4) получаем выражение для тензора кривизны N-продолженной связности:

$$K(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x}, \vec{y}) N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}, \tag{5}$$

$$K(\vec{\xi},\vec{x})\vec{y} = P(\vec{x},\vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}}N)\vec{y}, \tag{6}$$

где $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \Gamma(D)$.

Как следует из (5), (6), тензор кривизны N-продолженной связности полностью определяется допустимыми тензорными полями. Видимо, впервые N-продолженная связность для эндоморфизма $N : D \to D$ специального вида получена в работе [14]. Координатное представление соответствующего эндоморфизма в контактном случае имеет следующий вид:

$$N^a_b = \frac{1}{4m}\omega^{cd}R^a_{cdb}.$$

Выбор эндоморфизма $N : D \to D$ зависит от характера решаемой задачи.

Теорема 1 (см. [9]). *На многообразии с контактной метрической структурой существует N-продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:*

1) $\vec{z}g(\vec{x},\vec{y}) = g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x},\vec{y}) + g(\vec{x},\nabla_{\vec{z}}\vec{y})$ (свойство метричности);

2) $\nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}] = 0$ (отсутствие кручения);

3) N — симметрический оператор такой, что

$$g(N\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g(\vec{x},\vec{y}), \tag{7}$$

где $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \Gamma(D)$ — сечения распределения D.

Пусть ∇^N — N-продолженная связность на многообразии с почти контактной метрической структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$. Поставим в соответствие связности ∇^N линейную связность на многообразии M, обозначаемую тем же символом ∇^N и удовлетворяющую следующим условиям:

1) $S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \Gamma(TM)$;

2) $\nabla^N_{\vec{x}}g(\vec{y},\vec{z}) = 0$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \Gamma(D)$;

3) $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$;

4) $\nabla^N_{\vec{x}}\eta = 0$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$,

где $S(\vec{x},\vec{y})$ — тензор кручения связности $\nabla^N_{\vec{x}}$.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда на многообразии M существует единственная связность $\nabla^N_{\vec{x}}$ такая, что выполняются следующие условия:*

$$S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y} - \eta(\vec{y})N\vec{x}, \qquad \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM); \tag{8}$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}g(\vec{y},\vec{z}) = 0, \qquad \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D); \tag{9}$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{\xi} = \vec{0}, \qquad \vec{x} \in \Gamma(TM); \tag{10}$$

$$\nabla^N_{\vec{x}}\eta = 0, \qquad \vec{x} \in \Gamma(TM), \tag{11}$$

где $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения D.

Доказательство Из предположения существования связности докажем ее единственность. Получим явное выражение для коэффициентов $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ связности $\nabla^N_{\vec{x}}$ в адаптированных координатах. Условия (8), (9) определяют коэффициенты $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$. Из условий (10), (11) следует справедливость следующих равенств: $\Gamma^a_{bn} = \Gamma^n_{an} = \Gamma^a_{nn} = \Gamma^n_{ab} = \Gamma^n_{nb} = \Gamma^n_{nn} = 0$. Повторно используя условие (8), получаем, что $\Gamma^b_{na} = N^b_a$. Что и доказывает единственность. Определим теперь отличные от нуля коэффициенты связности $\nabla^N_{\vec{x}}$, положив $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc}$, $\Gamma^b_{na} = N^b_a$. Непосредственно проверяется, что определяемая тем самым связность удовлетворяет условиям (8)–(11). Теорема доказана. □

Следующее утверждение позволяет построить N-связность, используя связность Леви – Чивита.

Теорема 3. *Пусть $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$ — почти контактная метрическая структура, заданная на многообразии M. Тогда определяемая с помощью равенства*

$$\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$$

связность $\nabla^N_{\vec{x}}$ совпадает с N-связностью с соответствующим эндоморфизмом $N : D \to D$.

Доказательство теоремы сводится к вычислению коэффициентов связности $\nabla^N_{\vec{x}}$ в адаптированных координатах.

Используя равенства (5), (6), получаем выражение для тензора кривизны N-связности $\nabla^N_{\vec{x}}$:

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x},\vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} + \eta(\vec{x})(P(\vec{y},\vec{z}) - (\nabla_{P\vec{y}}N)\vec{z}) - \\ -\eta(\vec{y})(P(\vec{x},\vec{z}) - (\nabla_{P\vec{x}}N)\vec{z}), \qquad \vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(TM).$$

Назовем тензор кривизны N-связности, так же как и тензор кривизны соответствующей N-продолженной связности, обобщенным тензором кривизны Вагнера.

Задавая надлежащим образом эндоморфизм $N : D \to D$, получаем следующие специальные классы N-связностей для случая почти контактного метрического многообразия:

1. Связность Бежанку ∇^B с нулевым эндоморфизмом $N = 0$. Бежанку (Bejancu) [15] определяет связность ∇^B на почти контактном метрическом многообразии с помощью формулы $\nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} = \tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{x})\tilde{\nabla}_{\vec{y}}\vec{\xi} - \eta(\vec{y})\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + (\omega + c)(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}$. В адаптированных координатах отличными от нуля компонентами ${\Gamma^B}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ связности ∇^B являются ${\Gamma^B}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. В случае многообразия Сасаки тензор кривизны связности Бежанку совпадает с тензором кривизны Схоутена. Построенная Бежанку связность, вообще говоря, не является метрической. Так как $\nabla^B_n g_{ab} = \partial_n g_{ab}$, то метричность связности Бежанку эквивалентна K-контактности контактной метрической структуры. N-связность ∇^N на многообразии с почти контактной метрической структурой с заданным эндоморфизмом $N : D \to D$ может быть определена с помощью равенства $\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y} = \nabla^B_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})N\vec{y}$.

2. Связность Танака – Вебстера ∇^{TW} определяется как единственная связность, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\nabla^{TW}\eta = 0$;
2) $\nabla^{TW}\vec{\xi} = 0$;
3) $\nabla^{TW}g = 0$;
4) $S(\vec{x},\vec{y}) = 2\omega(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi}$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$;
5) $S(\vec{\xi},\varphi\vec{x}) = -\varphi S(\vec{\xi},\vec{x})$, $\vec{x} \in \Gamma(TM)$.

Связность ∇^{TW} является N-связностью для случая, когда $N = C$.

3. Связность Схоутена – ван Кампена ∇^{Sk} определяется с помощью равенства [16]: $\nabla^{Sk}_{\vec{x}}\vec{y} = (\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^h)^h + (\tilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y}^v)^v$, где $\vec{y}^h = P\vec{y}$, $\vec{y}^h = P\vec{y}$, $\vec{y}^v = Q\vec{y}$. Непосредственно проверяется, что связность Схоутена – ван Кампена является N-связностью для случая, когда $N = C - \varphi$.

4. Совсем недавно было введено понятие φ-связности [17]. Для K-контактных метрических пространств φ-связность совпадает со связностью Схоутена – ван Кампена.

Пусть $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,D)$ — контактная структура, заданная на многообразии M. Предположим также, что на многообразии M определена внутренняя симметричная связность ∇. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,D)$ — контактная структура, заданная на многообразии M, $\dim M \geqslant 5$. Тогда обращение в нуль тензора Схоутена эквивалентно существованию такого атласа, состоящего из адаптированных карт, для которого выполняются равенства $\Gamma^a_{bc} = 0$.*

Доказательство. Достаточность утверждения непосредственно подтверждается координатным представлением тензора Схоутена в адаптированных координатах. Докажем необходимость. Как показано в [14], обращение в нуль тензора Схоутена при наших предположениях влечет независимость коэффициентов связности Γ^a_{bc} от последней координаты: $\partial_n\Gamma^a_{bc} = P^a_{bc} = 0$. Покажем, что на многообразии M можно построить атлас адаптированных карт, в которых коэффициенты связности равны нулю. Составим систему уравнений в полных дифференциалах:

$$\partial_a f^{b'} = A^{b'}_a, \qquad \partial_a A^{c'}_b = \Gamma^c_{ab}A^{c'}_c. \tag{12}$$

Условия интегрируемости полученной системы сводятся к следующим соотношениям:

$$S^c_{ab}A^{c'}_c = 0, \qquad R^d_{abc}A^{d'}_d = 0,$$

которые выполняются тождественно. Следовательно, система (12) вполне интегрируема и имеет решение с произвольными начальными условиями, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 5. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, g, \varphi, D)$ — контактная метрическая структура, заданная на многообразии M, $\dim M \geqslant 5$. Обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $N = 0$ и существует постоянное допустимое векторное поле любого направления.*

Доказательство. Предположим, что обобщенный тензор кривизны Вагнера тождественно равен нулю. Из равенства (5) заключаем, что $2\omega(\vec{x}, \vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \vec{0}$. В качестве следствия легко проверяемого тождества

$$R^d_{[abc]} = 0$$

получаем равенство $N^b_a(m-1) = 0$. Так как $m > 1$, то отсюда следует, что $N = 0$. Что, в свою очередь, влечет обращение в нуль тензора Схоутена. Оставшиеся рассуждения можно провести, опираясь на теорему 4.

2. ДОПУСТИМЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим на гладком многообразии M размерности $n = 4m + 1$ почти контактную структуру $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_1, D)$, где φ_1 — допустимая почти комплексная структура. Предположим, что на многообразии M заданы еще две такие допустимые почти комплексные структуры φ_2 и φ_3, что $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3$. Назовем многообразие M, наделенное структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$, $i = 1, 2, 3$, почти контактным, почти гиперкомплексным многообразием, Если каждая из почти комплексных структур φ_i интегрируема (почти нормальна), т. е. если $N_{\varphi_i} + 2(d\eta \circ \varphi_i) \otimes \vec{\xi} = 0$, то допустимую почти гиперкомплексную структуру $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$ будем называть интегрируемой или допустимой гиперкомплексной структурой, а многообразие M — почти контактным гиперкомплексным многообразием,

Рассмотрим модельный пример почти контактного гиперкомплексного многообразия. Пусть $M = R^5$, $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\vec{\xi} = \partial_5$, $\eta = dx^5 + x^2dx^1$, $D = \ker\eta$. Определим допустимые к распределению D почти комплексные структуры φ_i (таблица).

φ_i \ $\vec{e}_i$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$
φ_1	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$-\vec{e}_1$	$-\vec{e}_2$
φ_2	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	$-\vec{e}_4$	$\vec{e}_3$
φ_3	$\vec{e}_4$	$-\vec{e}_3$	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$

Из таблицы видно, что $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3$. Непосредственно проверяется, что допустимые почти комплексные структуры φ_i являются почти нормальными.

Пусть D — распределение почти контактной структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ с интегрируемым эндоморфизмом φ. Предположим, что над распределением D задана произвольная связность, т.е. распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to M$ — естественная проекция, раскладывается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D. Таким образом, используя адаптированные координаты, получаем, что $HD = \mathrm{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_a\partial_{n+b}$. Пусть $N : D \to D$ — эндоморфизм распределения D. Определим на распределении D допустимую почти гиперкомплексную структуру $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая, что

$$\vec{u} = \partial_n - N^a_b x^{n+b}\partial_{n+a}, \qquad J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}, \qquad J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a, \qquad J(\vec{u}) = \vec{0},$$
$$J_1\vec{x}^h = -(\varphi\vec{x})^h, \qquad J_1\vec{x}^v = (\varphi\vec{x})^v, \qquad J_1(\vec{u}) = \vec{0}, \qquad J_2 = J_1J, \qquad \vec{x} \in \Gamma(D).$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда связность над распределением определяется некоторой внутренней линейной связностью: $G^a_b(x^\alpha, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^\alpha)x^{n+c}$ и эндоморфизм $N : D \to D$ равен нулю.

Теорема 6. *Пусть $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ — контактная почти нормальная структура, заданная на многообразии M, $\dim M \geqslant 5$. Допустимая почти гиперкомплексная структура $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ является допустимой гиперкомплексной структурой тогда и только тогда, когда тензор кривизны Схоутена соответствующей внутренней связности равен нулю.*

Доказательство. Найдем условия, при которых $N_J + 2(d\lambda \circ J) \otimes \vec{u} = 0$.

Имеем:

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) + 2d\lambda(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = -R^e_{abc} x^{n+c} \partial_{n+e},$$
$$N_J(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) + 2d\lambda(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = 2\omega_{ba}\partial_n + R^e_{abc} x^{n+c}\partial_{n+e} - 2\omega_{ba}\partial_n = R^e_{abc} x^{n+c}\partial_{n+e},$$
$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = 0,$$
$$N_J(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = N_J(\partial_{n+a}, \partial_n) = -x^{n+c} P^b_{ac}\partial_{n+b}.$$

Таким образом, структура J интегрируема тогда и только тогда, когда $R^e_{abc} = 0$. Предположим, что тензор кривизны Схоутена равен нулю. Воспользовавшись теоремой 4, выберем такую систему координат, что $\Gamma^a_{bc} = 0$. В этом случае нетрудно заметить, что интегрируемость структур J_1, J_2 эквивалентна интегрируемости структуры φ, что и доказывает теорему.

Пусть теперь M — почти контактное метрическое многообразие с допустимой гиперкомплексной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, D)$. Пусть далее для всех $i = 1, 2, 3$ выполняются равенства $g(\varphi_i \vec{x}, \varphi_i \vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$. Назовем многообразие M почти контактным гиперкэлеровым многообразием, а структуру $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_i, g, D)$ — допустимой гиперкэлеровой структурой, если формы $\Omega_i(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi_i \vec{y})$ замкнуты.

Теорема 7. *Пусть M — многообразие Сасаки с распределением нулевой кривизны. Тогда структура $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$, где $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b)$, $\tilde{g}(\partial_n, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_n, \partial_{n+b}) = 0$, является допустимой гиперкэлеровой структурой.*

Доказательство. Введем в рассмотрение фундаментальные формы $\tilde{\Omega}(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}, J\vec{y})$, $\tilde{\Omega}_k(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}, J_k \vec{y})$, $k = 1, 2$. Покажем, что $d\tilde{\Omega} = d\tilde{\Omega}_k = 0$. Действительно, с одной стороны, равенство $d\tilde{\Omega} = 0$ является следствием обращения в нуль тензора кривизны внутренней связности. С другой стороны, равенство $d\tilde{\Omega}_k = 0$ эквивалентно равенству $d\Omega = 0$, где Ω — фундаментальная форма сасакиевой структуры, что и доказывает теорему. □

Библиографический список

1. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1958. Vol. 10. P. 338–354.
2. *Dombrowski P.* On the geometry of the tangent bundle // J. Reine Angew. Math. 1962. Vol. 210. P. 73–88.
3. *Munteanu M. I.* Some aspects on the geometry of the tangent bundles and tangent sphere bundles of a Riemannian manifold // Mediterr. J. Math. 2008. Vol. 5. P. 43–59.
4. *Kowalski O.* Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold // J. Reine Angew. Math. 1971. Vol. 250. P. 124–129.
5. *Musso E., Tricerri F.* Riemannian metrics on tangent bundles // Ann. Mat. Pura Appl. 1988. Vol. 150, iss. 4. P. 1–19.
6. *Галаев С. В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
7. *Галаев С. В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Матем. 2014. № 8. С. 42–52.
8. *Галаев С. В.* Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 258–264. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
9. *Галаев С. В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Матем. заметки СВФУ. 2015. Вып. 1. С. 25–34.
10. *Obata M.* Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure // Jap. J. Math. 1956. Vol. 26. P. 43–77.
11. *Obata M.* Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure // J. Math. Soc. Japan. 1957. Vol. 9. P. 406–416.
12. *Bogdanovich S. A., Ermolitski A. A.* On almost hyperHermitian structures on Riemannian manifolds and tangent bundles // Cent. Eur. J. Math. 2004. Vol. 2, iss. 5. P. 615–623.
13. *Oproiu V.* Hyper-Kähler structures on the tangent bundle of a Kähler manifold // Balkan J. Geom. Appl. 2010. Vol. 15, iss. 1. P. 104–119.
14. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

15. *Bejancu A.* Kahler contact distributions // J. Geometry and Physics. 2010. Vol. 60. P. 1958–1967.
16. *Schouten J., van Kampen E.* Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde // Math. Ann. 1930. Vol. 103. P. 752–783.
17. *Букушева А. В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. № 17(214), вып. 40. С. 20–24.

Образец для цитирования:
Галаев С. В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 263–272. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.

Admissible Hypercomplex Structures on Distributions of Sasakian Manifolds

S. V. Galaev

Galaev Sergei Vasil'evich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, sgalaev@mail.ru

The notions of admissible (almost) hypercomplex structure and almost contact hyper-Kählerian structure are introduced. On a manifold M with an almost contact metric structure $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ an interior symmetric connection ∇ is defined. In the case of a contact manifold of dimension bigger than or equal to five, it is proved that the curvature tensor of the connection ∇ is zero if and only if there exist adapted coordinate charts with respect to that the coefficients of the interior connection are zero. On the distribution D of an almost contact structure as on the total space of the vector bundle (D, π, M), an admissible almost hypercomplex structure $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ is defined. Under the condition that the admissible almost complex structure φ is integrable, it is proved that the constructed almost hypercomplex structure is integrable if and only if the distribution D is a distribution of zero curvature. In the case of a Sasakian structure $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, the conditions that imply that the admissible hypercomplex structure $(\tilde{D}, J, J_1, J_2, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ is an almost contact hyper-Kählerian structure.

Key words: almost contact metric structure, admissible hypercomplex structure, almost contact hyper-Kählerian structure, distribution of zero curvature.

References

1. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J.*, 1958, vol. 10, pp. 338–354.
2. Dombrowski P. On the geometry of the tangent bundle. *J. Reine Angew. Math.*, 1962, vol. 210, pp. 73–88.
3. Munteanu M. I. Some aspects on the geometry of the tangent bundles and tangent sphere bundles of a Riemannian manifold. *Mediterr. J. Math.*, 2008, vol. 5, pp. 43–59.
4. Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold. *J. Reine Angew. Math.*, 1971, vol. 250, pp. 124–129.
5. Musso E., Tricerri F. Riemannian metrics on tangent bundles. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1988, vol. 150, iss. 4, pp. 1–19.
6. Galaev S. V. The intrinsic geometry of almost contact metric manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 16–22 (in Russian).
7. Galaev S. V. Almost contact Ka?hlerian manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Russian Math.*, 2014, iss. 8, pp. 42–52.
8. Galaev S. V. Almost contact metric spaces with N-connection. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 3, pp. 258–264. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-258-264.
9. Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by an N-prolonged connection. *Yakutian Math. J.*, 2015, iss. 1, pp. 25–34 (in Russian).
10. Obata M. Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure. *Jap. J. Math.*, 1956, vol. 26, pp. 43–77.
11. Obata M. Affine connections in a quaternion manifold and transformations preserving the structure. *J. Math. Soc. Japan*, 1957, vol. 9, pp. 406–416.
12. Bogdanovich S. A., Ermolitski A. A. On almost hyperHermitian structures on Riemannian manifolds and tangent bundles. *Cent. Eur. J. Math.*, 2004, vol. 2, iss. 5, pp. 615–623.
13. Oproiu V. Hyper-Kähler structures on the tangent bundle of a Kähler manifold. *Balkan J. Geom. Appl.*, 2010, vol. 15, iss. 1, pp. 104–119.
14. Vagner V. V. The geometry of an $(n-1)$-dimensional nonholonomic manifold in an n-dimensional space. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Analiza*, Moscow, Moscow Univ. Press, 1941, iss. 5, pp. 173–255 (in Russian).
15. Bejancu A. Kahler contact distributions. *J. Geome-*

try and Physics, 2010, vol. 60, pp. 1958–1967.
16. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Math. Ann.*, 1930, vol. 103, pp. 752–783.
17. Bukusheva A. V. The geometry of the contact metric spaces φ-connection. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2015, no 17 (214), iss. 40, pp. 20–24 (in Russian).

Please cite this article in press as:
Galaev S. V. Admissible Hypercomplex Structures on Distributions of Sasakian Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 263–272 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.

УДК 517.977

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И. В. Гребенникова[1], А. Г. Кремлёв[2]

[1]Гребенникова Ирина Владимировна, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, giv001@mail.ru
[2]Кремлёв Александр Гурьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры мультимедиа технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, kremlev001@mail.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на ресурсы управления. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы с постоянным запаздыванием по фазовым переменным. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [1, 2] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на управляющие воздействия. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А. Г. Кремлёвым в работе [3], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных пременных, в виде равномерно сходящейся последовательности. При реализации метода используются результаты исследований [1–5] также аппарат выпуклого анализа [6]. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_{11}(t)x(t-h) + \mu G_{12}(t)y(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_{21}(t)x(t-h) + \mu G_{22}(t)y(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$