(N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 16–22 (in Russian).

9. Bejancu A. Kahler contact distributions. *J. Geom. Phys.*, 2010, vol. 60, no. 12, pp. 1958–1967.

10. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Connections over a distribution and geodesic sprays. *Russian Math.*, 2013, vol. 57, no. 4, pp. 7–13. DOI: 10.3103/S1066369X13040026.

УДК 517.958

УСРЕДНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АКУСТИКИ

А. А. Герус[1], С. А. Гриценко[2]

[1]Герус Артур Андреевич, аспирант кафедры математики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, artur-gerus@bsu.edu.ru

[2]Гриценко Светлана Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и математической физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, sgritsenko@bsu.edu.ru

В работе исследуется математическая модель акустики в гетерогенной среде с двумя компонентами, разделенными общей границей. Одна из компонент является ограниченной жидкой областью, другая — упругим телом. Упругое тело пронизано системой пор, заполненных жидкостью. Дифференциальные уравнения модели, описывающие движение жидкости и совместное движение твердого скелета и жидкости в порах, базируются на классических законах механики сплошной среды и содержат быстро осциллирующие коэффициенты, зависящие от малого параметра, равного отношению среднего размера пор к размеру рассматриваемой области. Быстро осциллирующие коэффициенты делают невозможным применение модели для численных расчетов. В работе доказывается существование обобщенного решения начально-краевой задачи. На основе метода двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга выводятся усредненные уравнения (т. е. уравнения, не содержащие быстро осциллирующих коэффициентов) для различных случаев. Полученные приближенные модели могут быть полезны для численных расчетов.

Ключевые слова: композитные среды, периодическая структура, уравнения Стокса, уравнения Ламе, уравнения акустики, пороупругость, усреднение периодических структур, двухмасштабная сходимость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-264-272

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваемая ограниченная область $Q \in R^3$ представляет собой единичный куб: $Q = (0,1) \times \times (0,1) \times (0,1)$, в котором пороупругая среда занимает область $\Omega = (0,1) \times (0,1) \times (0,a)$, $0 < a < 1$, а область $\Omega^{(f)}$, занятая жидкостью, есть открытое дополнение области Ω:

$$Q = \Omega \cup \Omega^{(f)} \cup S^{(0)}, \quad S^{(0)} = \partial\Omega \cap \partial\Omega^{(f)}.$$

Движение жидкости в пороупругой области Ω описывается системой уравнений:

$$\left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\right) p + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \tag{1}$$

$$(\varrho_f \chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s)\, \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \varrho^\varepsilon \mathbf{F}, \tag{2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right) + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\,\mathbb{I}, \tag{3}$$

где $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ — характеристическая функция порового пространства $\Omega_f^\varepsilon \in \Omega$, $\bar{c}_s$ и $\bar{c}_f$ — скорость звука в твердой и жидкой части соответственно, ρ — плотность среды, $\mathbf{F}$ — заданный вектор распределенных массовых сил, l — средний размер пор, L — характерный размер рассматриваемой области, малый параметр $\varepsilon = l/L$. Здесь и далее в работе используются обозначения

$$B : C = tr(BC^T),$$

где B, C — тензоры второго ранга, $\mathbb{D}(x, \mathbf{u}) = \dfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^*)$ — симметрическая часть $\nabla\mathbf{u}$, $\mathbb{I}$ — единичный тензор.

Движение жидкости в области $\Omega^{(f)}$ при $t > 0$ описывается системой уравнений Стокса:

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2}\,p + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0, \tag{4}$$

$$\varrho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla\cdot\,\mathbb{P}^{(f)} + \varrho_f\mathbf{F}, \tag{5}$$

$$\mathbb{P}^{(f)} = \bar{\alpha}_\mu\mathbb{D}\left(x, \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\right) - p\,\mathbb{I}. \tag{6}$$

На общей границе $S^{(0)}$ выполняются условия непрерывности для перемещений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(s)}}}\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \tag{7}$$

и для нормальных компонент моментов

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}}\mathbb{P}^{(f)}(\mathbf{x}, t)\cdot\boldsymbol{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}}\mathbb{P}(\mathbf{x}, t)\cdot\boldsymbol{n}(\mathbf{x}^0). \tag{8}$$

Завершают задачу однородные граничные условия:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad (\mathbf{x}, t) \in S_T = S\times(0, T), \tag{9}$$

на границе $S = \partial Q$, и однородные начальные условия:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \qquad \mathbf{x}\in Q. \tag{10}$$

Пусть

$$\int_{Q_T}\left(|\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)|^2 + \left|\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\right|^2\right)dx\,dt = F^2 < \infty$$

и выполнены предположения о периодичности порового пространства и твердого скелета, а также о существовании пределов при $\varepsilon \to 0$ коэффициентов α_μ, $\alpha_\lambda, \ldots$, описанные в работе [1].

При выполнении упомянутых предположений о периодичности

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})\chi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

где $\zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω.

Обозначим

$$\varrho^\varepsilon_{(f)} = (1-\zeta)\varrho_f + \zeta\left(\varrho_f\chi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\varrho_s\right).$$

Определение. Пара функций $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ таких, что

$$\mathbf{w}^\varepsilon \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,1}(Q_T),\ p^\varepsilon \in L_2(Q_T),$$

называется *обобщенным решением* задачи (1)–(10), если эти функции удовлетворяют уравнению неразрывности:

$$\left((1-\zeta)\frac{1}{\bar{c}_f^2} + \zeta\left(\frac{\chi^\varepsilon}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-\chi^\varepsilon}{\bar{c}_s^2}\right)\right)p^\varepsilon + \nabla\cdot\mathbf{w}^\varepsilon = 0 \tag{11}$$

почти всюду в Q_T, и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T}\varrho^\varepsilon_{(f)}\left(\frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)dx\,dt = \int_{Q_T}\left(\zeta\mathbb{P} + (1-\zeta)\mathbb{P}^{(f)}\right) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})\,dx\,dt \tag{12}$$

для всех функций $\boldsymbol{\varphi}$ таких, что $\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$ и $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, T) = 0$ для $\mathbf{x} \in Q$.

Теорема 1. *Для всех $\varepsilon > 0$ на произвольном интервале времени $[0, T]$ существует единственное обобщенное решение $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ задачи (1)–(10) и для него справедлива оценка*

$$\max_{0<t<T} \int_\Omega \left(|p^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda |\mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon)|^2 \right) dx +$$

$$+ \max_{0<t<T} \int_{\Omega^{(f)}} \left(|p^\varepsilon(\mathbf{x}, t)|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 \right) dx + \int_0^T \int_{\Omega^{(f)}} \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) \right|^2 dx\, dt +$$

$$+ \max_{0<t<T} \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) \right|^2 \right) dx +$$

$$+ \max_{0<t<T} \int_{\Omega^{(f)}} \left(\left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) \right|^2 \right) dx + \int_0^T \int_{\Omega^{(f)}} \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right) \right|^2 dx\, dt +$$

$$+ \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \left(\left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) \right|^2 + \left| \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right) \right|^2 \right) dx\, dt \leqslant C_0 F^2, \tag{13}$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε и коэффициентов $\bar{\alpha}_\lambda$, $\bar{\alpha}_\lambda^{(0)}$, $\bar{\alpha}_\mu$.

Доказательство. Априорная оценка теоремы следует из энергетических тождеств:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\varrho^\varepsilon \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{\bar{\alpha}_p^\varepsilon} |p^\varepsilon|^2 \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\Omega^{(s)}} \left(\varrho_s \left| \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) + \frac{1}{\left(\bar{c}_s^{(0)}\right)^2} |p^\varepsilon|^2 \right) dx +$$

$$+ \int_\Omega \chi^\varepsilon \left(\bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) \right) dx = \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\, dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega \left(\varrho^\varepsilon \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{1}{\bar{\alpha}_p^\varepsilon} \left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{\Omega^{(s)}} \left(\varrho_s \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right|^2 + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda^{(0)} \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{1}{\left(\bar{c}_s^{(0)}\right)^2} \left| \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) dx +$$

$$+ \int_\Omega \chi^\varepsilon \left(\bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right) : \mathbb{D}\left(x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\right) \right) dx = \int_Q \tilde{\varrho}^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\, dx.$$

Эти тождества получаются подстановкой в уравнение (2) явного выражения для тензора $\mathbb{P}$ из уравнения состояния (3), умножением (2) на $\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$ и интегрированием по частям по области Q. Далее существование и единственность обобщенного решения доказывается методом Галеркина. □

2. УСРЕДНЕННЫЕ МОДЕЛИ

При выводе усредненных уравнений используются результаты А. М. Мейрманова [2–4] и применяется метод двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга (G. Nguetseng) [5]. Главная проблема в доказательстве усредненных уравнений состоит в условиях непрерывности на общей границе $S^{(0)}$ между областями $\Omega^{(f)}$ и Ω. Эти условия следуют из предельного интегрального тождества:

$$-\int_{Q_T} p\,(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})\, dx\, dt = \int_{Q_T} \int_Y \varrho_{(f)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)\, dy\, dx\, dt \tag{14}$$

для любой гладкой функции $\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{1,0}(Q_T)$ и интегрального тождества:

$$\int_{Q_T} \left(\left((1-\zeta)\frac{1}{\bar{c}_f^2} + \zeta\left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\right) \right) \frac{\partial p}{\partial t}\, \psi - \nabla \psi \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) dx\, dt = 0 \tag{15}$$

для любой гладкой функции $\psi \in W_2^{1,0}(Q_T)$. Здесь $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ — двухмасштабный предел последовательности $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$, Y — ячейка периодичности (см. [5]) и

$$\varrho_{(f)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (1-\zeta(\mathbf{x}))\,\varrho_f + \zeta(\mathbf{x})\,(\varrho_f\,\chi(\mathbf{y}) + (1-\chi(\mathbf{y}))\;\varrho_s))\,.$$

Для всех случаев (14) и (15) влекут систему уравнений акустики (17) и (18) в области $\Omega_T^{(f)}$, условия непрерывности (23) и (24) на общей границе $S^{(0)}$, и уравнение неразрывности

$$\left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\right)\frac{\partial\, p}{\partial t} + \nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

в области Ω_T.

Все различия сконцентрированы в уравнении динамики в области Ω_T и в представлении скорости смеси $\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\, p^{\,\varepsilon}\}$ *— обобщенное решение задачи* (1)–(10) *и*

$$\mu_1 = \lambda_1 = \infty.$$

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\left\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right\}$ *и* $\{p^{\,\varepsilon}\}$ *удовлетворяют системе уравнений акустики:*

$$\varrho_f\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\, p = \varrho_f\mathbf{F}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{\bar{c}_f^2}\,\frac{\partial\, p}{\partial t} + \nabla\cdot\,\mathbf{v} = 0 \tag{18}$$

в области $\Omega^{(f)}$ *при* $t>0$*, и системе уравнений акустики в области* Ω *при* $t>0$*:*

$$\hat{\varrho}\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\, p = \hat{\varrho}\mathbf{F}, \tag{19}$$

$$\left(\frac{m}{\bar{c}_f^2} + \frac{1-m}{\bar{c}_s^2}\right)\frac{\partial\, p}{\partial t} + \nabla\cdot\,\mathbf{v} = 0, \tag{20}$$

где

$$m = \int_Y \chi(y)dy.$$

Соотношения (17)–(20) *замыкаются однородным граничным условием:*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \tag{21}$$

на границе S_T*, однородными начальными условиями:*

$$p(\mathbf{x},0) = 0, \qquad \mathbf{v}(\mathbf{x},0) = 0, \qquad \mathbf{x}\in Q, \tag{22}$$

и условиями непрерывности:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0), \tag{23}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^{(f)}}} p(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega}} p(\mathbf{x},t) \tag{24}$$

на общей границе $S_T^{(0)}$*. Здесь* $\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s$*,* $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ *есть нормальный вектор к* S *в точке* $\mathbf{x}\in S$*,* $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ *— нормальный вектор к* $S^{(0)}$ *в точке* $\mathbf{x}^0\in S^{(0)}$*.*

Доказательство. Для этого случая $\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \mathbf{w}(\mathbf{x},t)$ и интегральное тождество (14) влечет уравнение динамики:

$$\hat{\varrho}\,\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = -\nabla\,p + \hat{\varrho}\,\mathbf{F} \tag{25}$$

в области Ω_T. □

Теорема 3. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon,\,p^\varepsilon\}$ — *обобщенное решение задачи* (1)–(10) *и*

$$0 \leqslant \mu_1, \qquad \lambda_1 < \infty.$$

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\left\{\dfrac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right\}$ *и* $\{p^\varepsilon\}$ *удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(f)}$ *системе уравнений акустики* (17), (18) *и системе уравнений акустики в области* Ω_T, *состоящей из уравнения баланса моментов в форме*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t-\tau)\cdot\nabla\,p\,(\mathbf{x},\tau)d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x},t) \tag{26}$$

и уравнения неразрывности (20).

Дифференциальные уравнения замыкаются граничным и начальным условиями (21), (22) *и условиями непрерывности* (23), (24).

Матрица $\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1,\lambda_1;t)$ *и функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ *задаются формулами* (33), (34).

Доказательство. Уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{1}{\bar{c}_f^2} + \frac{1}{\bar{c}_s^2}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} = 0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega, \qquad t>0.$$

Используя вложение $\nabla p \in \mathbf{L}_2(\Omega_T\times Y)$, т. е. $\nabla\,p \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$, $\nabla\left(\dfrac{\partial p}{\partial t}\right) \in \mathbf{L}_2(\Omega_T)$, выводим микроскопическое уравнение баланса моментов:

$$\begin{gathered}\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2} = \nabla_y\cdot\left(\mu_1\chi(\mathbf{y})\mathbb{D}\left(y,\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}\right) + \lambda_1\left(1-\chi(\mathbf{y})\right)\mathbb{D}(y,\mathbf{W}) - \Pi\,\mathbb{I}\right) - \\ -\nabla p + \varrho(\mathbf{y})\mathbf{F}, \qquad \mathbf{y}\in Y, \qquad t>0,\end{gathered} \tag{27}$$

где

$$\varrho(\mathbf{y}) = \varrho_f\,\chi(\mathbf{y}) + \varrho_s\,\left(1-\chi(\mathbf{y})\right),$$

и микроскопическое уравнение неразрывности:

$$\nabla_y\cdot\mathbf{W} = 0, \qquad \mathbf{y}\in Y. \tag{28}$$

Эти уравнения замыкаются однородными начальными условиями:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y},0) = \frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},\mathbf{y},0) = 0, \qquad \mathbf{y}\in Y.$$

Мы рассматриваем периодическое решение задачи как сумму

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3\int_0^t \mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^3\int_0^t \mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)\,d\tau,$$

$$\Pi(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^3\int_0^t \Pi^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau)\,d\tau + \sum_{i=1}^3\int_0^t \Pi_F^{(i)}(\mathbf{y},t-\tau)F_i(\mathbf{x},\tau)\,d\tau,$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = (F_1(\mathbf{x},t),F_2(\mathbf{x},t),F_3(\mathbf{x},t))$.

В свою очередь, пары $\{\mathbf{W}^{(i)}, \Pi^{(i)}\}$, и $\{\mathbf{W}_F^{(i)}, \Pi_F^{(i)}\}$ для $i = 1, 2, 3$ есть решения периодических начально-краевых задач в области Y для $t > 0$:

$$\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t^2} = \nabla_y \cdot \left(\mu_1 \chi(\mathbf{y}) \nabla_y \left(\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}\right) + \lambda_1 (1 - \chi(\mathbf{y})) \nabla_y \mathbf{W}^{(i)} - \Pi^{(i)}\, \mathbb{I}\right), \qquad \nabla_y \cdot \mathbf{W}^{(i)} = 0, \quad (29)$$

$$\mathbf{W}^{(i)}(\mathbf{y}, 0) = 0, \qquad \varrho(\mathbf{y})\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = -\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{y} \in Y, \quad (30)$$

и

$$\varrho(\mathbf{y})\frac{\partial^2 \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t^2} = \nabla_y \cdot \left(\mu_1 \chi(\mathbf{y}) \nabla_y \left(\frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}\right) + \lambda_1 (1 - \chi(\mathbf{y})) \nabla_y \mathbf{W}_F^{(i)} - \Pi_F^{(i)}\, \mathbb{I}\right), \qquad \nabla_y \cdot \mathbf{W}_F^{(i)} = 0, \quad (31)$$

$$\mathbf{W}_F^{(i)}(\mathbf{y}, 0) = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y \quad (32)$$

соответственно.

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t - \tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t}(\mathbf{y}, t - \tau) F_i(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \left\langle \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t} \right\rangle_Y (t - \tau)\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau + \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \left\langle \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t} \right\rangle_Y (\mathbf{y}, t - \tau) F_i(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t - \tau) \cdot \nabla p\, (\mathbf{x}, \tau) d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

где

$$\mathbb{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t) = \sum_{i=1}^{3} \left\langle \frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial t} \right\rangle_Y (t) \otimes \mathbf{e}_i, \quad (33)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \left\langle \frac{\partial \mathbf{W}_F^{(i)}}{\partial t} \right\rangle_Y (\mathbf{y}, t - \tau) F_i(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau. \quad (34)$$

Полученные соотношения дают следующее представление для скорости смеси:

$$\frac{\partial\, \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbb{B}^{(a)}(\mu_1, \lambda_1; t - \tau) \cdot \nabla p\, (\mathbf{x}, \tau) d\tau + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \qquad \square \quad (35)$$

Обозначение: матрица $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ определяется как

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, и $\mathbf{c}$

Теорема 4. *Пусть* $\{\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ *— обобщенное решение задачи* (1)–(10),

$$\mu_1 = \infty, \qquad 0 \leqslant \lambda_1 < \infty,$$

и $\mathbf{w}_f^\varepsilon = \mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}(\mathbf{w}^\varepsilon)$ *— продолжение из* Ω_f^ε *в* Ω.

Тогда пределы $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ *(скорость жидкости) и* p *(давление) последовательностей* $\left\{\dfrac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\right\}$ *и* $\{p^\varepsilon\}$, *где*

$$\mathbf{v} = (1 - \zeta)\mathbf{v} + \zeta\, m \frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \zeta\, \frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t} = (1 - \zeta)\mathbf{v} + \zeta\, m\, \mathbf{v}_f + \zeta\, \mathbf{v}^{(s)}, \quad (36)$$

и $\mathbf{w}^{(s)}$ *и* $\mathbf{w}_f$ *— пределы последовательностей* $\{(1-\chi^\varepsilon)\mathbf{w}^\varepsilon\}$ *и* $\{\mathbf{w}_f^\varepsilon\}$*, удовлетворяют в области* $\Omega_T^{(f)}$ *системе уравнений акустики* (17), (18) *и системе уравнений акустики в области* Ω_T*, состоящей из уравнения баланса моментов:*

$$m\varrho_f\,\mathbf{v}_f+\varrho_s\,\mathbf{v}^{(s)}+\int_0^t\left(-\hat{\varrho}\mathbf{F}+\nabla\,p\right)(\mathbf{x},\tau)\,d\tau=0 \tag{37}$$

для жидкой компоненты, уравнения баланса моментов

$$\mathbf{v}^{(s)}-(1-m)\mathbf{v}_f=-\int_0^t\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\left(\nabla\,p+\varrho_s\left(\frac{\partial\mathbf{v}_f}{\partial\tau}-\mathbf{F}\right)\right)(\mathbf{x},\tau)d\tau \tag{38}$$

для твердой компоненты, и уравнения неразрывности

$$\left(\frac{m}{\bar{c}_f^2}+\frac{(1-m)}{\bar{c}_s^2}\right)\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\left(m\,\mathbf{v}_f+\mathbf{v}^{(s)}\right)=0. \tag{39}$$

Задача замыкается граничным и начальными условиями (21), (22) *и условиями непрерывности* (23), (24).

В уравнениях (37), (38) $\hat{\varrho}=m\,\varrho_f+(1-m)\,\varrho_s$ *и матрица* $\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t)$ *задается формулой* (48).

В теореме используется обозначение

$$\boldsymbol{w}_f^\varepsilon=\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}\left(\mathbf{w}^\varepsilon\right),$$

где $\mathbb{E}_{\Omega_f^\varepsilon}:\mathbf{W}_2^1(\Omega_f^\varepsilon)\to\mathbf{W}_2^1(\Omega)$ — оператор продолжения из Ω_f^ε в Ω, такой, что $\mathbf{w}_f^\varepsilon=\mathbf{w}^\varepsilon$ в $\Omega_f^\varepsilon\times(0,T)$, и

$$\int_\Omega|\mathbf{w}_f^\varepsilon|^2\,dx\leqslant C_0\int_{\Omega_f^\varepsilon}|\mathbf{w}^\varepsilon|^2\,dx,\qquad\int_\Omega|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}_f^\varepsilon)|^2\,dx\leqslant C_0\int_{Q_f^\varepsilon}|\mathbb{D}(x,\mathbf{w}^\varepsilon)|^2\,dx.$$

Корректность такого продолжения обоснована в работе C. Conca [6].

Доказательство. Для этого случая скорость смеси задана формулой

$$\frac{\partial\,\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\chi(\mathbf{y})\frac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t}(\mathbf{x},t)+(1-\chi(\mathbf{y}))\,\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),$$
$$\frac{\partial\,\mathbf{w}}{\partial t}=m\frac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t}+\frac{\partial\mathbf{w}^{(s)}}{\partial t},\qquad\mathbf{w}^{(s)}(\mathbf{x},t)=\int_Y(1-\chi(\mathbf{y}))\,\mathbf{W}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\,dy.$$

Интегральное тождество (14) влечет уравнение динамики (37) для жидкой компоненты.

Получим представление (38).

Если $\mathbf{W}^{(s)}=(1-\chi(\mathbf{y}))\,\mathbf{W}$, то пара $\{\mathbf{W}^{(s)},\,\Pi^{(s)}\}$ удовлетворяет микроскопическому уравнению динамики для твердой компоненты:

$$\varrho_s\frac{\partial^2\mathbf{W}^{(s)}}{\partial t^2}=\frac{\lambda_1}{2}\triangle_y\mathbf{W}^{(s)}-\nabla_y\Pi^{(s)}-\nabla p, \tag{40}$$

микроскопическому уравнению неразрывности:

$$\nabla\cdot\mathbf{W}^{(s)}=0$$

в области Y_s, и начальным условиям

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x},0,\mathbf{y})=\frac{\partial\mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x},0,\mathbf{y})=0,\qquad\mathbf{y}\in Y_s. \tag{41}$$

В силу теоремы Нгуетсенга $\mathbf{W}^{(s)},\partial^2\mathbf{W}^{(s)}/\partial t^2,\nabla_y\mathbf{W}^{(s)}\in L_2(Q_T\times Y_s)$. Эти условия вместе с формулой (30) обеспечивают граничное условие:

$$\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\mathbf{w}_f(\mathbf{x},t),\qquad(\mathbf{y},t)\in S^{(0)}\times(0,T). \tag{42}$$

Решения $\{\mathbf{W}^{(s)}, \Pi^{(s)}\}$ периодических начально-краевых задач (40)–(42) имеют вид

$$\mathbf{W}^{(s)} = \mathbf{w}_f(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t-\tau)\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x},\tau)\right)d\tau,$$
$$\Pi^{(s)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3}\int_0^t \Pi_i^{(s)}(\mathbf{y},t-\tau)\left(\frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}(\mathbf{x},\tau)\right)d\tau,$$

где $\{\mathbf{W}_i^{(s)}, \Pi_i^{(s)}\}$, $i = 1,2,3$, в свою очередь, являются решениями периодических начально-краевых задач:

$$\varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t^2} = \frac{\lambda_1}{2}\triangle_y \mathbf{W}_i^{(s)} - \nabla_y \Pi_i^{(s)}, \qquad (\mathbf{y},t) \in Y_s \times (0,T), \tag{43}$$
$$\nabla_y \cdot \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t) = 0, \qquad (\mathbf{y},t) \in Y_s \times (0,T), \tag{44}$$
$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},0) = 0, \qquad \varrho_s\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},0) = \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{y} \in Y_s, \tag{45}$$
$$\mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t) = 0, \qquad (\mathbf{y},t) \in S^{(0)} \times (0,T). \tag{46}$$

Однозначная разрешимость задач (43)–(46) следует из энергетического тождества:

$$\int_{Y_s}\left(\varrho_s|\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},t)|^2 + \frac{\lambda_1}{2}|\nabla \mathbf{W}_i^{(s)}(\mathbf{y},t)|^2\right)dy = \frac{(1-m)}{\varrho_s}.$$

Задача (43)–(46) для соленоидальных функций $\mathbf{W}_s^{(i)}$, равных нулю на $S^{(0)}$ и при $t = 0$, понимается как интегральное тождество:

$$\int_0^T\int_{Y_s}\left(\varrho_s\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \lambda_1\nabla \mathbf{W}_i^{(s)} : \nabla\boldsymbol{\varphi}\right)dy\,dt = \int_{Y_s}\mathbf{e}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y},0)\,dy$$

для любой соленоидальной 1-периодической гладкой функции $\boldsymbol{\varphi}$, равной нулю на $S^{(0)}$ и при $t = T$. По определению

$$\frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \int_{Y_s}\frac{\partial \mathbf{W}^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\,dy =$$
$$= (1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \int_0^t\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{Y_s}\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},t-\tau)dy\right)\otimes\mathbf{e}_i\right)\cdot\left(\nabla p\,(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau)\right)d\tau =$$
$$= (1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} - \int_0^t \mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\left(\nabla p\,(\mathbf{x},\tau) + \varrho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau)\right)d\tau, \tag{47}$$

где

$$\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t) = \sum_{i=1}^{3}\left(\int_{Y_s}\frac{\partial \mathbf{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\mathbf{y},t)dy\right)\otimes\mathbf{e}_i. \qquad \square \tag{48}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-17-00556 «Математическое моделирование флюидопотоков в нефтяных резервуарах с учетом разномасштабных свойств пласта-коллектора»).

Библиографический список

1. *Герус А. А., Гриценко С. А.* Модель акустики в конфигурации упругое тело – пороупругая среда// Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2014. № 25 (196), вып. 37. С. 68–75.
2. *Мейрманов А. М.* Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 645–667.
3. *Мейрманов А. М.* Уравнения акустики в упругих пористых средах // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. XIII, № 2. С. 98–110.
4. *Мейрманов А. М.* Вывод уравнений неизотермической акустики в упругих пористых средах // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51, № 1. С. 156–174.
5. *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence // Intern. J. Pure and Appl. Math. 2002. Vol. 2, № 1. P. 35–86.
6. *Conca C.* On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // Math. Pures et Appl. 1985. Vol. 64. P. 31–75.

Homogenization of the Acoustics Mathematical Model

A. A. Gerus, S. A. Gritsenko

[1]Gerus Artur Andreevich, Belgorod State National Research University, 85, Pobedy st., 308015, Belgorod, Russia, artur-gerus@bsu.edu.ru

[2]Gritsenko Svetlana Aleksandrovna, Belgorod State National Research University, 85, Pobedy st., 308015, Belgorod, Russia, sgritsenko@bsu.edu.ru

We consider a mathematical model of acoustics in heterogeneous medium with two different components with the common boundary. One of these is a bounded liquid domain and the other is a poroelastic medium. Poroelastic medium is perforated by pores. A pore space is filled with a viscous liquid. The motion of the liquid and the joint motion of the poroelastic media with porous space are governed by the differential equations based on the continuum mechanics laws. These equations contain rapidly oscillating terms, depending on the small parameter. The small parameter is the ratio of the average pores size to the size of domain under consideration. Rapidly oscillating terms prevent from the numerical simulations. The unique existence of the generalized solution of the boundary-value problem is proved. Homogenized equations (i.e. free from rapidly oscillating terms) are based upon the Nguetseng method of the two-scale convergence. We derived approximate models useful to the numerical calculations.

Key words: composite medium, periodic structure, Stokes equations, Lame's equations, acoustics equations, poroelastic, homogenization of periodic structures, two-scale convergence..

This work was supported by the Russian Scientific Fond (projects no. 14-17-00556).

References

1. Gerus A. A., Gritsenko S. A. Acoustics Model in the Configuration Elastic Body — elastic porous medium. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics and Physics*, 2014, no. 25 (196), iss. 37, pp. 68–75.
2. Meirmanov A. Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media. *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol. 48, pp. 519–538. DOI: 10.1007/s11202-007-0054-9.
3. Meirmanov A. Acoustics Equations in Elastic Porous Media. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2010, vol. XIII, iss. 2, pp. 98–110 (in Russian).
4. Meirmanov A. Derivation of the equations of nonisothermal acoustics in elastic porous media. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, iss. 1, pp. 128–143. DOI: 10.1007/s11202-010-0014-7.
5. Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P. Two-scale convergence. *Intern. J. Pure and Appl. Math.*, 2002, vol. 2, no. 1, pp. 35–86.
6. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics. *Math. Pures et Appl.*, 1985, vol. 64, pp. 31–75.