7. Sierpinski W. *General topology*. Toronto, Univ. Toronto Press, 1952, 304 p.
8. Gross W. Eine ganze Funktion, für die jede Komplexe Zahl Konvergenzwert ist. *Math. Ann.*, 1918, vol. 79, iss. 1–2, pp. 201–208.
9. Heins M. The set of asymptotic values of an entire function. *Proceedings of the Scandinavian Math. Congress*, Lund, 1953, 1954, pp. 56–60.
10. Ganenkova E. G., Starkov V. V. Asymptotic values of functions, analytic in planar domains. *Issues of Analysis*, 2013, vol. 2(20), no. 1, pp. 38–42.
11. Ganenkova E. G., Starkov V. V. Analytic in planar domains functions with preassigned asymptotic set. *J. Appl. Anal.*, 2014, vol. 20, iss. 1, pp. 7–14. DOI: 10.1515/jaa2014-0002.
12. Liczberski P., Starkov V. V. On locally biholomorhic mappings from multi-connected onto simply connected domains. *Ann. Polon. Math.*, 2005, vol. 85, no. 2, pp. 135–143.
13. Goluzin G. M. *Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo* [Geometric theory of functions of complex variables]. Moscow, Nauka, 1966, 628 p.
14. Pommerenke Ch. *Boundary behaviour of conformal maps*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1992, 301 p.
15. Ahlfors L. V. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. *Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Series A*, 1930, vol. 1, no. 9, pp. 1–40.
16. Bagemihl F. Curvilinear cluster sets of arbitrary functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1955, vol. 41, no. 6, pp. 379–382.

УДК 519.853

О ПОДХОДЕ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

С. И. Дудов[1], М. А. Осипцев[2]

[1] Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, DudovSI@info.sgu.ru

[2] Старший преподаватель кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Osipcevm@gmail.com

Рассматривается конечномерная задача о наилучшем приближении в метрике Хаусдорфа выпуклого тела шаром произвольной нормы с фиксированным радиусом. Показано, что в случае, когда приближаемое тело и шар нормы являются многогранниками, задача сводится к задаче линейного программирования. Это позволяет предложить получение приближённого решения задачи через предварительную аппроксимацию приближаемого компакта и единичного шара нормы многогранниками.

Ключевые слова: выпуклое тело, метрика Хаусдорфа, функция расстояния, аппроксимация, субдифференциал.

1. Пусть D — заданное выпуклое тело из конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^p$, а $n(x)$ — некоторая норма на $\mathbb{R}^p$. Рассматривается задача

$$\phi(x,r) \equiv h(D, Bn(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}. \tag{1}$$

Здесь $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке x,

$$h(A,B) = \max\left\{ \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b),\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} n(a-b)\right\} \quad — \tag{2}$$

расстояние Хаусдорфа между множествами A и B, индуцированное нормой $n(\cdot)$.

Впервые задача о приближении выпуклого компакта евклидовым шаром в метрике Хаусдорфа, причём произвольного радиуса, т. е. когда функция $\phi(x,r)$ минимизируется по $(x,r) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+$, рассматривалась в [1]. Для случая произвольной нормы эта задача исследовалась в работе [2].

В работе [3] показано, что задача (1) своими решениями для значений радиуса r из определённых диапазонов, выражает решения задач об описанном и вписанном шарах для D и задачи наилучшего приближения шаром произвольного радиуса. Авторам известны и другие задачи по шаровым оценкам выпуклого компакта (например, задача об асферичности [4]), на которое распространяется это универсальное свойство задачи (1).

Важное значение имеет полученная в [2] формула, выражающая расстояние Хаусдорфа (2) между выпуклым компактом D и шаром $Bn(x,r)$:

$$h(D, Bn(x,R)) = \max\{R(x) - r,\ P(x) + r\}. \tag{3}$$

Здесь функция $R(x)$ выражает расстояние в норме $n(\cdot)$ от точки x до самой удалённой от неё точки из D, т. е.

$$R(x) = \max_{y \in D} n(x - y),$$

а функция $P(x)$ определяется формулой

$$P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x),$$

где $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$, $\rho_A(x) = \min_{y \in A} n(x - y)$ — расстояние от точки x до множества A в норме $n(\cdot)$.

Известно [5–7], что функции $R(x)$ и $\rho_D(x)$ выпуклы на $\mathbb{R}^p$, а $\rho_\Omega(x)$ вогнута на D. Функция $P(x)$, введённая в [8], также является выпуклой на $\mathbb{R}^p$. Эти факты позволяют считать задачу (1) задачей выпуклого программирования и применять для её численного решения широкий спектр методов оптимизации, например [6, 9], используя формулы субдифференциалов функций $R(x)$ и $P(x)$ (см., например, [2]).

Цель данной работы — показать, что в случае, когда выпуклое тело D и шар нормы $n(\cdot)$ являются многогранниками, задача (1) сводится к задаче линейного программирования. Этот факт может быть положен в основу подхода к получению приближённого решения задачи (1) через предварительную аппроксимацию компакта D и единичного шара нормы $n(\cdot)$ многогранниками. Отметим, что данный приём уже применялся для других задач по шаровым оценкам выпуклого компакта, например, [4, 10].

В работе будут использованы следующие обозначения:

$\overline{A}$, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{co} A$ — замыкание, внутренность, выпуклая оболочка множества A;

$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение элементов x и y;

$K(x, A)$ — конус возможных направлений множества A в точке x;

K^+ — сопряжённый конус к конусу K;

$K(A)$ — коническая оболочка множества A;

$\partial f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции в точке x;

$n^*(x)$ — полярная норма по отношению к норме $n(\cdot)$;

$0_p = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$, $A + B = \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}$.

2. Если шар нормы $n(\cdot)$ является многогранником, норма представима в виде

$$n(x) = \max_{i=\overline{1,m}} |\langle B_i, x\rangle|. \tag{4}$$

При этом вектора $\{\pm B_i : i = \overline{1,m}\}$ — это нормали к граням многогранников, являющихся шарами. Естественно считать $\{\pm B_i : i = \overline{1,m}\}$ угловыми точками множества $M = \operatorname{co}\{\pm B_i : i = \overline{1,m}\}$ и $0_p \in \operatorname{int} M$. Очевидно, полярная норма $n^*(v) = \max_{n(x) \leqslant 1} \langle v, x\rangle$ является функцией Минковского множества M.

Для нормы (4) легко получается представление функции $R(x)$ в виде максимума от аффинных функций:

$$R(x) = \max_{i=\overline{1,m}} \max\{\langle B_i, x\rangle - b_{i_1}, b_{i_2} - \langle B_i, x\rangle\}, \tag{5}$$

где $b_{i_1} = \min_{y \in D} \langle B_i, y\rangle$, $b_{i_2} = \max_{y \in D} \langle B_i, y\rangle$.

Пусть также выпуклое тело D является многогранником, заданным в виде

$$D = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_j, y\rangle \leqslant a_j, \ j = \overline{1, l}\}, \tag{6}$$

где $A_j \in \mathbb{R}^p$, $a_j \in \mathbb{R}$. Предполагается, что $0_p \in \operatorname{int} \operatorname{co}\{A_j : j = \overline{1, l}\}$, а также без потери общности $n^*(A_j) = 1$, $j = \overline{1, l}$. Очевидно, для точки $x \in D$ справедливо

$$\rho_\Omega(x) = \min_{j=\overline{1,l}} \rho_{\omega_j}(x), \tag{7}$$

где $\omega_j = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_j, y\rangle - a_j = 0\}$, $j = \overline{1, l}$, — гиперплоскости, образующие грани многогранника D. Известно, что

$$\rho_{\omega j}(x) = \frac{\langle A_j, y\rangle - a_j}{n^*(A_j)}. \tag{8}$$

Поэтому из (6)–(8), учитывая $n^*(A_j) = 1$, получаем:

$$\rho_\Omega(x) = \min_{j=\overline{1,\,l}}\{a_j - \langle A_j,\, x\rangle\}, \qquad \forall\, x \in D. \tag{9}$$

3. Теперь, как и для функции $R(x)$ (см. (5)), получим представление функции $P(x)$ в виде максимума от аффинных функций. Обозначим $G(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^p : \rho_D(x) \leqslant \alpha\}$. Нетрудно доказать, что справедлива

Лемма 1. *Если* $\alpha \geqslant 0$, *то*

$$G(\alpha) = D + Bn(0_p, \alpha). \tag{10}$$

Поскольку множества D и $Bn(0_p, \alpha)$ являются многогранниками, то из леммы 1 вытекает, что и множество $G(\alpha)$ также является многогранником. Предположим, что нам известно его представление в виде

$$G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j,\, y\rangle \leqslant d_j(\alpha),\, j = \overline{1,k}\}, \tag{11}$$

где $C_j \in \mathbb{R}^p$, $d_j(\alpha) \in \mathbb{R}$, $n^*(C_j) = 1$ и все гиперплоскости

$$\{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j,\, y\rangle = d_j(\alpha),\, j = \overline{1,k}\}$$

являются опорными к $G(\alpha)$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что набор нормалей $\{C_j : j = \overline{1,k}\}$ к граням многогранника $G(\alpha)$ можно считать инвариантными относительно значений $\alpha > 0$. Как следует из (4), (6) и (10), в этот набор входят $\{A_j : j = \overline{1,l}\}$ и $\{B_i : i = \overline{1,m}\}$, но при этом, как показывают простые примеры, могут содержаться и другие элементы. Вопрос практического получения набора $\{C_j : j = \overline{1,k}\}$ обсудим в § 4.

Лемма 2. *Для точек* $x \notin D$ *справедлива формула*

$$\rho_D(x) = \max_{j=\overline{1,k}}\{\langle C_j,\, x\rangle - c_j\}, \tag{12}$$

где $c_j = \max\limits_{y\in D}\langle C_j,\, y\rangle$.

Доказательство. Гиперплоскости

$$\pi_j \equiv \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j,\, y\rangle = c_j\}, \qquad j = \overline{1,k}$$

являются опорными для тела D, причём

$$D \subset \pi_j^+ \equiv \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j,\, y\rangle \leqslant c_j\}, \qquad j = \overline{1,k}.$$

Поэтому имеют место неравенства

$$\rho_D(x) \geqslant \rho_{\pi_j^+}(x), \qquad j = \overline{1,k}. \tag{13}$$

Поскольку $n^*(C_j) = 1$, то, учитывая формулу (8) расстояния от точки до гиперплоскости, получаем:

$$\rho_{\pi_j^+}(x) = \max\{0,\, \langle C_j,\, x\rangle - c_j\}. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует

$$\rho_D(x) \geqslant \max_{j=\overline{1,k}}\{\langle C_j,\, x\rangle - c_j\}. \tag{15}$$

Точка $x \notin D$ является граничной для множества $G(\alpha)$ при $\alpha = \rho_D(x)$, а значит, ввиду представления $G(\alpha)$ в виде (11),

$$J(x) \equiv \{j \in [1:k] : \langle C_j,\, x\rangle = d_j(\alpha)\} \neq \varnothing.$$

Покажем, что для произвольного индекса $j_0 \in J(x)$ выполняется

$$\rho_D(x) = \rho_{\pi_{j_0}^+}(x). \tag{16}$$

Предположим противное, т. е. учитывая (13),

$$\rho_D(x) > \rho^+_{\pi_{j_0}}(x). \tag{17}$$

Пусть точка y_0 принадлежит проекции точки x на гиперплоскость π_{j_0}:

$$\langle C_{j_0}, y_0\rangle = c_{j_0}, \qquad n(x - y_0) = \rho_{\pi_{j_0}}(x). \tag{18}$$

Гиперплоскость π_{j_0} является опорной к D, а гиперплоскость $\{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_{j_0}, \rangle = d_{j_0}(\alpha)\}$, содержащая точку x, является опорной к $G(\alpha)$. Поэтому из (10), (11) следует $D \subset \mathrm{int}G(\alpha)$, а следовательно,

$$\langle C_{j_0}, x\rangle > \langle C_{j_0}, y_0\rangle, \tag{19}$$

$$\rho_{\pi^+_{j_0}}(x) = \rho_{\pi_{j_0}}(x) = \langle C_{j_0}, x\rangle - c_{j_0}. \tag{20}$$

Пусть точка $z \in \pi_{j_0} \bigcap D$. Рассмотрим точку

$$z^* = z + \frac{\rho_D(x)}{n(x - y_0)}(x - y_0) \in D + Bn(0_p, \alpha). \tag{21}$$

Поскольку точки z и y_0 содержатся в π_{j_0}, то $\langle C_{j_0}, z\rangle = \langle C_{j_0}, y_0\rangle$. Учитывая также $\langle C_{j_0}, x\rangle = d_{j_0}(\alpha)$, из (17)–(21) получаем:

$$\langle C_{j_0}, z^*\rangle = \langle C_{j_0}, z\rangle + \frac{\rho_D(x)}{n(x - y_0)}\langle C_{j_0}, x - y_0\rangle = (\frac{\rho_D(x)}{n(x - y_0)} - 1)\langle C_{j_0}, x - y_0\rangle + d_{j_0}(\alpha) > d_{j_0}(\alpha).$$

Это противоречит тому, что $z^* \in D + Bn(0_p, \alpha)$ ввиду (10), (11). Тем самым мы доказали справедливость равенства (16). А тогда ввиду (20) имеем:

$$\rho_D(x) = \langle C_{j_0}, x\rangle - c_{j_0}. \tag{22}$$

Из (15) и (22) получаем (12). Лемма доказана.

Теорема 1. *Для любого $x \in \mathbb{R}^p$ справедлива формула*

$$P(x) = \max_{j=\overline{1,k}}\{\langle C_j, x\rangle - c_j\}, \tag{23}$$

где $\{C_j\, j = \overline{1,k}\}$ — нормали к граням многогранника $G(\alpha)$ в представлении (11)*, причём $n^*(C_j) = 1$, а $c_j = \max\limits_{y\in D}\langle C_j, y\rangle$.*

Доказательство. Гиперплоскости $\pi_j = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle C_j, y\rangle = c_j\}$, $j = \overline{1,k}$, являются опорными к D. Поэтому расстояние от точки $x \in D$ до любой из них не меньше чем до множества $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$. Таким образом, имеем:

$$\rho_\Omega(x) \leqslant \min_{j=\overline{1,k}} \rho_{\pi_j}(x) = \min_{j=\overline{1,k}}\{c_j - \langle C_j, x\rangle\},\ x \in D. \tag{24}$$

Как указывалось в замечании 1, набор $\{A_j : j = \overline{1,l}\}$ входит в набор нормалей $\{C_j : j = \overline{1,k}\}$. Поэтому и опорные гиперплоскости $\omega_j = \{y \in \mathbb{R}^p : \langle A_j, y\rangle = a_j\}$, $j = \overline{1,l}$ к многограннику D (см. (6)) входят в набор $\{\pi_j : j = \overline{1,k}\}$. А тогда из (9) и (24) следует

$$\rho_\Omega(x) = \min_{j=\overline{1,k}}\{c_j - \langle C_j, x\rangle\}, \qquad \forall\ x \in D. \tag{25}$$

Теперь из (12) и (25) для функции $P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x)$ получаем формулу (23). Теорема доказана.

4. Рассмотрим вопрос практического отыскания набора нормалей $\{C_j : j = \overline{1,k}\}$ через заданные наборы нормалей $\{A_j : j = \overline{1,l}\}$ в (6) и $\{B_j : j = \overline{1,m}\}$ в (4).

Известна [7] формула субдифференциала функции $\rho_D(x)$ для точки $x \notin D$:

$$\partial\rho_D(x) = \partial n(x - z)\bigcap -K^+(z, D), \tag{26}$$

где z — любая точка из $Q^\rho(x, D) = \{y \in D : n(x - y) = \rho_D(x)\}$. Исходя из задания тела D в виде (6), нетрудно получить формулу [6, гл. 2, § 6]

$$-K^+(z, D) = K(\mathrm{co}\{A_j : j \in I(z)\}). \tag{27}$$

Здесь $I(z) = \{j \in [1:l] : \langle A_j, z\rangle = a_j\}$. Известна также формула субдифференциала нормы [5]:

$$\partial n(x) = \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^p : n^*(v) \leqslant 1\}, & \text{если } x = 0_p, \\ \{v \in \mathbb{R}^p : n^*(v) = 1,\ \langle v, x\rangle = n(x)\}, & \text{если } x \neq 0_p. \end{cases} \tag{28}$$

Из формы (4) представления нормы $n(\cdot)$ вытекает, что многогранник $M = \mathrm{co}\,\{\pm B_i : i = \overline{1,m}\}$ является единичным шаром полярной нормы, т. е. $M = \{v \in \mathbb{R}^p : n^*(v) \leqslant 1\}$. Поэтому в силу (28) возможными значениями для $\partial n(x)$ при $x \neq 0_p$ являются вершины и грани многогранника M размерности от 1 до p. Таким образом, пересечение многогранника $\partial n(x-z)$ с многогранным конусом (27) также является многогранником.

С другой стороны, с соответствии с субдифференциальным исчислением (см. например, [6, гл. 1, § 5]) из (12) следует

$$\partial \rho_D(x) = \mathrm{co}\,\{C_j : j \in J^\rho(x)\}, \qquad x \notin D, \tag{29}$$

где $J^\rho(x) = \{j \in [1:k] : \rho_D(x) = \langle C_j, x\rangle - c_j\}$. Это означает, что вектора $\{C_j : j = \overline{1,k}\}$ является вершинами для многогранников $\partial\rho_D(x)$ в различных точках $x \notin D$. Таким образом, сравнение (26) и (29) говорит о том, что для отыскания набора нормалей $\{C_j : j = \overline{1,k}\}$ достаточно найти вершины многогранников вида $\partial n(x-z) \bigcap K(\mathrm{co}\,\{A_j : j \in I(z)\})$, которых в силу конечности наборов $\{A_j : j = \overline{1,l}\}$ и $\{B_j : j = \overline{1,m}\}$ также конечное число.

5. Формулы (3), (5) и (23) позволяют записать задачу (1) в виде

$$\phi(x, r) = \max_{\substack{j=\overline{1,k} \\ i=\overline{1,m}}} \{\langle B_i, x\rangle - b_{i_1} - r,\ b_{i_2} - \langle B_i, x\rangle - r,\ \langle C_j, x\rangle - c_j + r\} \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \tag{30}$$

где $b_{i_1} = \min\limits_{y\in D}\langle B_i, y\rangle$, $b_{i_2} = \max\limits_{y\in D}\langle B_i, y\rangle$, $c_j = \max\limits_{y\in D}\langle C_j, y\rangle$.

Известным приёмом (см., например, [11]) это задача сводится к задаче линейного программирования.

Теорема 2. *Задача* (30) *эквивалентна задаче*

$$\begin{cases} z \to \min \\ \langle B_i, x\rangle - b_{i_1} - r \leqslant z, & i = \overline{1,m}, \\ b_{i_2} - \langle B_i, x\rangle - r \leqslant z, & i = \overline{1,m}, \\ \langle C_j, x\rangle - c_j + r \leqslant z, & j = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{31}$$

При этом, если x^* — одно из решений задачи (30)*, то $\widehat{x^*} = (x^*, z^*) \in \mathbb{R}^{p+1}$, где $z^* = \phi(x^*, r)$, одно из решений* (31)*. И наоборот, если $\widehat{x^*} = (x^*, z^*)$ — одно из решений задачи* (31)*, то x^* — одно из решений задачи* (30)*, а $z^* = \phi(x^*, r)$ — оптимальное значение целевой функции $\phi(x, r)$.*

В итоге мы можем предложить следующий подход к получению приближённого решения задачи (1). Следует аппроксимировать выпуклое тело многогранником, представив его в виде (6), а также аппроксимировать единичный шар нормы $n(\cdot)$, представив его в виде $Bn(0_p, 1) = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle \pm B_i, x\rangle \leqslant 1, i = \overline{1,m}\}$.

Отметим, наличие широкого спектра методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел (см. например, обзор [12]). После этого остаётся решить задачу линейного программирования вида (31). Конечно, при этом возникает вопрос об устойчивости решения задачи (1) и его чувствительности к погрешности приближения тела D и единичного шара нормы многогранниками.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* № 13-01-00238, 13-01-00175).

Библиографический список

1. *Никольский М. С., Силин Д. Б.* О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 338–354.

2. *Дудов С. И., Златорунская И. В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38. DOI: 10.4213/sm513.

3. *Дудов С. И.* Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 1. С. 43–58. DOI: 10.4213/sm1479.

4. *Дудов С. И., Мещерякова Е. А.* О методе приближённого решения задачи об асферичности выпуклого тела // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 2013. Т. 53, № 10. С. 1668–1678. DOI: 10.7868/S0044466913100050.

5. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980.

6. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981.

7. *Дудов С. И.* Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Мат. заметки. 1997. Т. 64, № 4. С. 530–542. DOI: 10.4213/mzm1532.

8. *Hiriart-Urruty J. B.* Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces // Math. Oper. Research. 1979. Vol. 4, № 1. P. 79–97.

9. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М. : МЦНМО, 2011.

10. *Dudov S. I., Zlatorunskaya I. V.* Best approximation of compact set by a ball in an arbitrary norm // Adv. Math. Res. 2003. Vol. 2. P. 81–114.

11. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1964.

12. *Bronstein E. M.* Approximation of convex sets by polytopes // J. of Math. Sciences. 2008. Vol. 153, № 6. P. 727–762. DOI: 10.1007/s10958-008-9144-x.

On an Approach to Approximate Solving of the Problem for the Best Approximation for Compact Body by a Ball of Fixed Radius

S. I. Dudov, M. A. Osipcev

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, Dudov@info.sgu.ru, Osipcevm@gmail.com

In this paper, we consider the problem of the best approximation of a compact body by a fixed radius ball with respect to an arbitrary norm in the Hausdorff metric. This problem is reduced to a linear programming problem in the case, when compact body and ball of the norm are polytops.

Key words: convex compact body, Hausdorff metric, function of distance, approximation, subdifferential.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*projects no.* 13-01-00238, 13-01-00175).

References

1. Nilol'skii M. S., Silin D. B. On the best approximation of a convex compact set by elements of addial. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 211, pp. 306–321.

2. Dudov S. I., Zlatorunskaya I. V. Best approximation of compact set by a ball in an arbitrary norm. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1433–1458. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM2000v191n10ABEH000513.

3. Dudov S. I. Relations between several problems of estimating convex compacta by balls. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 1, pp. 43–58. DOI: http://dx.doi.org/10.1070/SM2007v198n01ABEH003828.

4. Dudov S. I., Meshcheryakova E. A. Method for finding an approximate solution of the asphericity problem for a convex body. *Comp. Math. and Math. Physics*, 2013, vol. 53, no. 10, pp. 1483–1493. DOI: 10.1134/S0965542513100059.

5. Pschemichnyi B. N. *Vypuklyj analiz i jekstremal'nye zadachi* [Convex Analysis and Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).

6. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. *Nondifferetiable optimization*. New York, Optimization software, Inc., Publications Division, 1985.

7. Dudov S. I. Subdifferentiability and superdifferentiability of distance functions. *Math. Notes*, 1997, vol. 61, no. 4, pp. 440–450. DOI: 10.1007/BF02354988.

8. Hiriart-Urruty J. B. Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces. *Math. Oper. Research*, 1979, vol. 4, no. 1, pp. 79–97.

9. Vasil'ev F. P. *Metody optimizacii* [Methods of Optimization]. Moscow, MCSMO, 2011 (in Russian).

10. Dudov S. I., Zlatorunskaya I. V. Best approximation of compact set by a ball in an arbitrary norm. *Adv. Math. Res.*, 2003, vol. 2, pp. 81–114.

11. Zuhovickij S. I., Avdeeva L. I. *Linejnoe i vypukloe programmirovanie* [Linear and convex programming]. Moscow, Nauka, 1964 (in Russian).

12. Bronstein E. M. Approximation of convex sets by polytopes. *J. of Math. Sciences*, 2008, vol. 153, no. 6, pp. 727–762. DOI: 10.1007/s10958-008-9144-x.