try and Physics, 2010, vol. 60, pp. 1958–1967.
16. Schouten J., van Kampen E. Zur Einbettungs-und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. *Math. Ann.*, 1930, vol. 103, pp. 752–783.
17. Bukusheva A. V. The geometry of the contact metric spaces φ-connection. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2015, no 17 (214), iss. 40, pp. 20–24 (in Russian).

Please cite this article in press as:
Galaev S. V. Admissible Hypercomplex Structures on Distributions of Sasakian Manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 263–272 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272.

УДК 517.977

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И. В. Гребенникова[1], А. Г. Кремлёв[2]

[1]Гребенникова Ирина Владимировна, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, giv001@mail.ru
[2]Кремлёв Александр Гурьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры мультимедиа технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, kremlev001@mail.ru

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на ресурсы управления. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, фундаментальная матрица.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы с постоянным запаздыванием по фазовым переменным. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [1, 2] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на управляющие воздействия. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А. Г. Кремлёвым в работе [3], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных пременных, в виде равномерно сходящейся последовательности. При реализации метода используются результаты исследований [1–5] также аппарат выпуклого анализа [6]. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_{11}(t)x(t-h) + \mu G_{12}(t)y(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_{21}(t)x(t-h) + \mu G_{22}(t)y(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, A_{ij}, B_i, G_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi_x(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t) = \psi_y(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi_x(t) \in \Psi_x(t)$, $\psi_y(t) \in \Psi_y(t)$, $t_0 - h \leqslant t < t_0$, $\Psi_x(t)$, $\Psi_y(t)$ — заданные многозначные отображения со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n, R^m), непрерывные по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае $P = \{u(\cdot) |\ u(t) \in P(t),\ t \in T\}$, где $P(t)$ — заданное непрерывное, ограниченное, выпуклое многозначное отображение.

Будем предполагать выполненным следующее предположение.

Предположение 1. *Корни $\lambda_s(t)$ характеристического уравнения*

$$\left| A_{22}(t) - \mu\lambda E_m + \mu G_{22}(t) e^{-\lambda h} \right| = 0,$$

где E_m — единичная $m \times m$ матрица, удовлетворяют неравенству: $\operatorname{Re}\lambda_s(t) < -2c < 0$ *при* $t \in T$, $c = \mathrm{const} > 0$.

Тогда по критерию асимптотической устойчивости для линейных систем с запаздыванием [7, с. 162] при достаточно малых μ $(0 < \mu \leqslant \mu_0)$ фундаментальная матрица решений $Y[t, \tau]$ системы $\mu dy/dt = A_{22}(t)y(t) + \mu G_{22}(t)y(t-h)$, $Y[t, \tau] = 0$, при $\tau > t$, $Y[\tau, \tau] = E_m$, при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$ имеет оценку

$$\|Y[t, \tau]\| \leqslant c_0 \exp\{-c(t - \tau)/\mu\}, \tag{2}$$

$c_0 > 0$ — некоторая постоянная, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Введем следующие обозначения: $z' = (x', y')$, штрих — знак транспонирования; $Z_0 = X_0 \times Y_0$, $\psi' = (\psi'_x, \psi'_y)$, $\Psi = \Psi_x \times \Psi_y$, $Z(t, u(\cdot), Z_0, \psi(\cdot))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ — множество (ансамбль) траекторий $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ системы (1), исходящих из Z_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Определим функционал $J(\cdot)$:

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$: $R^{n+m} \to R$ — заданная выпуклая функция (с конечными значениями).

Постановка задачи. *Среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее минимум функционалу $J(u(\cdot))$ на множестве P:*

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)). \tag{3}$$

Пусть $Z[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений системы (1) (при $u \equiv 0$), причем $Z[\tau, \tau] = E_{n+m}$, $Z[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$. Матрицу $Z[t, \tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t, \tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t, \tau] & Z_{12}[t, \tau] \\ Z_{21}[t, \tau] & Z_{22}[t, \tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t, \tau]$, $Z_{12}[t, \tau]$, $Z_{21}[t, \tau]$, $Z_{22}[t, \tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

Решение задачи (3) при каждом фиксированном значении параметра $\mu > 0$ описывается следующими соотношениями (используя [2, с. 73] и [3, с. 62], но для системы с запаздыванием):

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot) \in P} \max_{l \in R^{n+m}} \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \{l' z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot)) - \varphi^*(l)\} \max\{\chi^0(l, \mu) |\ l \in R^{n+m}\} = \chi^0(l^0, \mu), \tag{4}$$

$$\chi^0(l, \mu) = -h^{**}(l) - \rho(-r(\cdot; t_1, l, \mu) |\ P),$$

$$h(l) = \varphi^*(l) - \rho(l' Z[t_1, t_0] |\ Z_0) - \int_{t_0}^{t_0 + h} \rho(l' Z[t, \tau] G(\tau) \mid \Psi(\tau - h)) d\tau,$$

$$r(\tau;t,l,\mu)=(p'Z_{11}[t,\tau]+q'Z_{21}[t,\tau])B_1(\tau)+(1/\mu)(p'Z_{12}[t,\tau]+q'Z_{22}[t,\tau])B_2(\tau),$$

где $l'=(p',q')$, $p\in R^n$, $q\in R^m$, $\varphi^*(l)$ — функция, сопряженная [6, с. 120] к $\varphi(z)$, $h^{**}(l)=\overline{(\mathrm{co}\, h)}(l)$ — замыкание выпуклой оболочки [6, с. 120] функции $h(l)$, $\rho(s|X)$ — опорная функция множества X на элементе s, $G(t)=\begin{pmatrix} G_{11}(t) & \mu G_{12}(t)\\ G_{21}(t)/\mu & G_{22}(t)\end{pmatrix}$. Оптимальное управление $u^0(\cdot,\mu)$ удовлетворяет условию минимума: для почти всех $\tau\in T$

$$\min_{u(\tau)\in P(\tau)} r(\tau;t_1,l^0,\mu)u(\tau)=r(\tau;t_1,l^0,\mu)u^0(\tau,\mu). \tag{5}$$

Полученные $u^0(\cdot,\mu)$, l^0, $\varepsilon^0(t_1)$ зависят от параметра μ. Однако эти величины при $\mu\to+0$ могут не сходиться [4, с. 38] к соответствующим решениям задачи (3) для вырожденной системы (полученной из исходной при $\mu=0$). Поэтому важным представляется построение аппроксимации оптимального управления $u^0(\cdot,\mu)$, доставляющей оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)=J(u^0(\cdot,\mu))$ с заданной точностью (относительно параметра μ). В данной работе в основе предложенного способа определения требуемого приближения лежит возможность представления блоков $Z_{ij}[t,\tau;\mu]$ $(i,j=1,2)$ в виде пределов равномерно сходящихся на $[t_0,t_1]$ последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau;\mu]$, $k=0,1,2,...$, при $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 достаточно мало.

2. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (3)

Теорема 1 (см. [5]). *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0>0$ и постоянная $N>0$, что в области μ $(0<\mu\leqslant\mu_0)$, $t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1$ выполняются оценки:*

$$\|Z_{11}[t,\tau]\|\leqslant N/(1-\mu N),\qquad \|Z_{12}[t,\tau]\|\leqslant \mu N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N),$$
$$\|Z_{21}[t,\tau]\|\leqslant N(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N),\quad \|Z_{22}[t,\tau]\|\leqslant \mathrm{c}_0e^{-c(t-\tau)/\mu}+\mu N^2(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})/(1-\mu N).$$

В [5, с. 146] приведены оценки для блоков $Z_{ij}[t,\tau]$ $(i,j=1,2)$, причем последние могут быть представлены в виде пределов равномерно сходящихся на T последовательностей $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau;\mu]$, $k=0,1,2,...$, при $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 достаточно мало:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau]=X[t,\tau]-\int\limits_\tau^t (dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau]+G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])\,ds,$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau]=Y[t,\tau]+\int\limits_\tau^t Z_{21}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau]+\mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])\,ds,$$

$$Z_{12}^{(k)}[t,\tau]=\int\limits_\tau^t Z_{11}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau]+\mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])\,ds,$$

$$Z_{21}^{(k)}[t,\tau]=(1/\mu)\int\limits_\tau^t Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau]+G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])\,ds,$$

предполагается существование $A_{22}^{-1}(t)$;

$$\begin{gathered}\left\|Z_{12}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{12}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leqslant\mu^{k+2}N_0N_1^{k+1}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),\\ \left\|Z_{21}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{21}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leqslant\mu^{k+1}N_0N_1^{k+1}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),\\ \left\|Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau]-Z_{22}^{(k)}[t,\tau]\right\|\leqslant\mu^{k}N_0N_1^{k}(c_0/c)^2(\mu(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})-c(t-\tau)e^{-c(t-\tau)/\mu}),\end{gathered}\tag{6}$$

причем $Z_{11}^{(0)}[t,\tau]=X[t,\tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t,\tau]=Y[t,\tau]$, где N_0, N_1 — некоторые положительные постоянные, $X[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений вырожденной системы, полученной из (1) при $\mu=0$:

$$dx(t)/dt=A_0(t)x(t)+G_0(t)x(t-h)+B_0(t)u(t), \tag{7}$$

$$y(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)x(t) - A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t)x(t-h) - A_{22}^{-1}(t)B_2(t)u(t),$$
$$A_0(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t), \qquad G_0(t) = G_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)G_{21}(t),$$
$$B_0(t) = B_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)B_2(t),$$

причем $X[\tau,\tau] = E_n$, $X[t,\tau] = 0$ при $\tau > t$.

Для задачи (3) соотношение (4) можно представить, используя [5, с. 147], в следующем виде:

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{-\varphi^*(p,q) + \rho(p'Z_{11}[t_1,t_0] + q'Z_{21}[t_1,t_0]|X_0)+$$
$$+\rho(p'Z_{12}[t_1,t_0] + q'Z_{22}[t_1,t_0]|Y_0) + \int\limits_{t_0}^{t_1}[(p'Z_{11}[t_1,\tau] + q'Z_{21}[t_1,\tau])B_0(\tau)+$$
$$+(1/\mu)q'Y[t_1,\tau]B_2(\tau) - \xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho((p'Z_{11}[t_1,\tau] + q'Z_{21}[t_1,\tau])G_0(\tau) - \tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho((p'Z_{11}[t_1,\tau] + q'Z_{21}[t_1,\tau])\mu G_{12}(\tau) + (p'Z_{12}[t_1,\tau] + q'Z_{22}[t_1,\tau])G_{22}(\tau)|\Psi_y(\tau-h))d\tau\}, \quad (8)$$

где

$$\xi(\tau,t_1,p,q) = \frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_1}q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]ds],$$
$$\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q) = \frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}[t_1,\tau] + (1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h}q'Y[t_1,s]A_{21}(s)Z_{12}[s,\tau]ds].$$

Поскольку для любых $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$, μ_0 достаточно мало, имеет место

$$\frac{dZ_{12}[t,\tau]}{d\tau}A_{22}^{-1}(\tau) = -A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)Y[t,\tau] - G_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)Y[t-h,\tau]+$$
$$+\int\limits_{\tau}^{t}\{d(Z_{11}[t,s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s))Y[s,\tau]\} + \int\limits_{\tau}^{t}\{d(Z_{11}[t,s]G_{12}(s)A_{22}^{-1}(s))Y[s-h,\tau]\}, \quad (9)$$

причем для последних двух слагаемых на основании теоремы А. Лебега [8, с. 259] справедливы оценки в области $0 < \mu \leqslant \mu_0$

$$\left\|\int\limits_{\tau}^{t}\{d[Z_{11}[t,s]A_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)]Y[s,\tau]\}\right\| = o(1),$$
$$\left\|\int\limits_{\tau}^{t}\{d[Z_{11}[t,s]G_{12}(s)A_{22}^{-1}(s)]Y[s-h,\tau]\}\right\| = o(1),$$

то из соотношения (9) с учетом оценки (2) следует утверждение.

Лемма 1. *При $0 < \mu \leqslant \mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $u(\cdot) \in P(\cdot)$, $p \in R^n$, $q \in R^m$ справедливы оценки*

$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t_1}\xi(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)u(\tau)d\tau\right\| \leqslant \omega(\mu)[\|p\| + N_1\|q\|],$$
$$\left\|\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(\tilde{\xi}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau\right\| \leqslant \omega(\mu)[\|p\| + N_2\|q\|], \quad (10)$$

где $\omega(\mu) = o(1)$, N_1, $N_2 > 0$ — некоторые постоянные.

Используя последовательности $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau,\mu]$, $i,j=1,2$, $k=0,1,2,...$, можно аппроксимировать решение задачи (3) с любой заданной точностью (относительно μ, $0<\mu\leqslant\mu_0$). Будем предполагать, что элементы матриц $A_{12}(\tau)$, $A_{22}^{-1}(\tau)$ имеют на T ограниченные производные. Построим управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$, доставляющее оптимальное значение $\varepsilon^0(t_1)$ с точностью $o(\mu^k)$.

Выполняя преобразования соотношения (8), аналогичные [9, с. 19], имеем:

$$\varepsilon^0(t_1)=\min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{\rho[p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0]+q'Z_{21}^{(k)}[t_1,t_0]+\xi_1^{(k)}(t_0,t_1,p,q)|X_0]+$$

$$+\rho[p'Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0]+q'Z_{22}^{(k)}[t_1,t_0]+\xi_2^{(k)}(t_0,t_1,p,q)|Y_0]+\int\limits_{t_0}^{t_1}r^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_{h_x}^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi_x(\tau-h))d\tau+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_{h_y}^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi_y(\tau-h))d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}[\xi_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)B_0(\tau)+\xi^{(k)}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(\xi_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)G_0(\tau)+\tilde{\xi}^{(k)}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau)|\Psi_x(\tau-h))d\tau-\varphi^*(p,q)\}, \qquad (11)$$

$$p\in R^n,\qquad q\in R^m,$$

где обозначены

$$\xi_i^{(k)}(\tau,t,p,q)=p'(Z_{1i}[t,\tau]-Z_{1i}^{(k)}[t,\tau])+q'(Z_{2i}[t,\tau]-Z_{2i}^{(k)}[t,\tau]),\qquad i=1,2,$$

$$\xi^{(k)}(\tau,t,p,q)=-p'\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau])-(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t}q'Y[t,s]A_{21}(s)\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau])\,ds,$$

$$\tilde{\xi}^{(k)}(\tau,t,p,q)=-p'\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau])-(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h}q'Y[t,s]A_{21}(s)\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[s,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau])\,ds,$$

$$r^{(k)}(\tau,t,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])B_0(\tau)+(1/\mu)q'Y[t,\tau]B_2(\tau)-$$

$$-\frac{d}{d\tau}[p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t}q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]ds]A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),$$

$$r_{h_x}^{(k)}(\tau,t,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])G_0(\tau)-$$

$$-\frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h}q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau),$$

$$r_{h_y}^{(k)}(\tau,t,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau]+\xi_1^{(k)}(\tau,t,p,q))\mu G_{12}(\tau)+$$

$$+(p'Z_{12}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{22}^{(k)}[t,\tau]+\xi_2^{(k)}(\tau,t,p,q))G_{22}(\tau).$$

Используя оценки (6), (10), получим следующий результат.

Лемма 2. *Существуют такие достаточно малое число $\mu_0>0$ и постоянная $N>0$, что для любых $t_0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant t_1$, $p\in R^n$, $q\in R^m$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ справедливы неравенства:*

$$\left\|\frac{d}{d\tau}(Z_{12}[t,\tau]-Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau])\right\|\leqslant\mu^{k+1}N^{k+2}(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu}),$$

$$\left\|\xi_i^{(k)}(\tau,t,p,q)\right\|\leqslant\mu^{k+1}N^{k+2}(\|p\|+\|q\|\,(c_0/c)(1-e^{-c(t-\tau)/\mu})),\qquad i=1,2.$$

Пусть $\alpha_k(\mu) > 0$: $\alpha_k(\mu) = o(1)$, $\alpha_k(\mu)/\mu \to +\infty$ при $\mu \to +0$, причем для $\tau \in [t_0, t_1 - \alpha_k(\mu)]$ выполняется

$$\|Y[t_1, \tau]\| \leqslant c_0 \exp\{-c(t_1 - \tau)/\mu\} < c_0 \mu^{k+2} N_1, \tag{12}$$

где $N_1 > 0$ — некоторая постоянная.

Теорема 2. *При $0 < \mu \leqslant \mu_0$, μ_0 достаточно мало, для любых $p \in R^n$, $q \in R^m$ выполняются соотношения:*

$$\chi^0(p,q) = \chi^{(k)}(p,q) + \widehat{\xi}_k(p,q),$$
$$\varepsilon^0(t_1) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1}), \tag{13}$$

где

$$\left|\widehat{\xi}_k(p,q)\right| \leqslant \|l\|\,\widehat{\omega}_k(\mu), \qquad \widehat{\omega}_k(\mu) = O(\mu^{k+1}),$$

$$\chi^{(k)}(p,q) = -h^{**}_{(k)}(p,q) - \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)} \rho(-r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q)|\ P(\tau))d\tau - \int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} \rho(-r_2^{(k)}(s, t_1, p, q)|\ V(s))ds,$$

$$V(s) = P(t_1 - \mu s),$$

$$h_{(k)}(p,q) = \varphi^*(p,q) - \rho(p' Z_{11}^{(k)}[t_1, t_0] + \int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1, s](A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s, t_0] +$$
$$+ G_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, t_0])ds|\ X_0) - \rho(p' Z_{12}^{(k)}[t_1, t_0] +$$
$$+ \int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1, s](A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{12}^{(k)}[t_1 - \mu s, t_0] + G_{21}(t_1 - \mu s) Z_{12}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, t_0])ds|\ Y_0) -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_x}^{(k)}(\tau, t_1, p, q)|\Psi_x(\tau - h))d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_y}^{(k)}(\tau, t_1, p, q)|\Psi_y(\tau - h))d\tau,$$

функции $r_i^{(k)}(\tau, t_1, p, q)$, $i = 1, 2$ определяются следующим образом:

при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant t_1 - \alpha_k(\mu)$

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) = (p' Z_{11}^{(k)}[t_1, \tau] + \int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1, s](A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s, \tau] +$$
$$+ G_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, \tau])ds) B_0(\tau) - \frac{d}{d\tau}(p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1, \tau] +$$
$$+ \int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1, s] A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{12}^{(k-1)}[t_1 - \mu s, \tau] ds) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau), \tag{14}$$

при $0 \leqslant s < \alpha_k(\mu)/\mu$

$$r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) = [q'\Phi[t_1, s] + \frac{d}{ds}(p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1, t_1 - \mu s] +$$
$$+ \int\limits_0^s q'\Phi[t_1, \sigma] A_{21}(t_1 - \mu\sigma) Z_{12}^{(k-1)}[t_1 - \mu\sigma, t_1 - \mu s] d\sigma) A_{22}^{-1}(t_1 - \mu s)] B_2(t_1 - \mu s) +$$
$$+ \mu[p' Z_{11}^{(k)}[t_1, t_1 - \mu s] + \int\limits_0^s q'\Phi[t_1, \sigma](A_{21}(t_1 - \mu\sigma) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu\sigma, t_1 - \mu s] +$$
$$+ G_{21}(t_1 - \mu\sigma) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu\sigma - h, t_1 - \mu s])d\sigma] B_0(t_1 - \mu s), \qquad \Phi[t_1, s] = Y[t_1, t_1 - \mu s], \tag{15}$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \max\{\chi^{(k)}(p,q)|\ p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}). \tag{16}$$

Доказательство. Из (11) следует

$$\varepsilon^0(t_1) = \min_{u(\cdot)\in P}\max_{p,q}\{-h^{**}(p,q) - \int\limits_{t_0}^{t_1} r^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}[\xi_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)B_0(\tau) + \xi^{(k)}(\tau,t_1,p,q)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau)]u(\tau)d\tau\} = \max_{p,q}\{\chi^0(p,q)\}, \qquad (17)$$

где функция $h(l)\equiv h(p,q)$ из (4), учитывая оценки (6), (10) и лемму 2, представима в виде

$$h(p,q) = h_{(k)}(p,q) + \hat{\xi}_1(l,\mu),$$

причем $\hat{\xi}_1(l,\mu)$ имеет по μ порядок малости $O(\mu^{k+1})$ при $0<\mu\leqslant\mu_0$,

$$h_{(k)}(p,q) = \varphi^*(p,q) - \rho[p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0] + q'Z_{21}^{(k)}[t_1,t_0]|\ X_0] - \rho[p'Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0] + q'Z_{22}^{(k)}[t_1,t_0]|\ Y_0] -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_{h_x}^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi_x(\tau-h))d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_{h_y}^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi_y(\tau-h))d\tau.$$

Далее, в силу оценок (6), (10), леммы 2, с учетом оценки (12) справедливо следующее представление:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} r^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)} r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)u(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_{0}^{\alpha_k(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)u(t_1-\mu s)ds + \hat{\xi}_k(l,\mu), \qquad (18)$$

где $\left|\hat{\xi}_k(l,\mu)\right| \leqslant \|l\|\,\hat{\omega}_k(\mu)$, $\hat{\omega}_k(\mu) = o(\mu^k)$ при $0<\mu\leqslant\mu_0$.

Таким образом, из представлений (17), (18) получаем следующий результат:

$$\varepsilon^0(t_1) = \max_{p,q}\{\chi^0(p,q)\} = \max_{p,q}\{\chi^{(k)}(p,q)\} + \hat{\xi}_k(l,\mu),$$

где

$$\chi^{(k)}(p,q) = -h_{(k)}^{**}(p,q) - \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)}\rho(-r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\ P(\tau))d\tau - \int\limits_{0}^{\alpha_k(\mu)/\mu}\rho(-r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)|\ V(s))ds,$$

$$V(s) = P(t_1-\mu s),$$

$\hat{\xi}_k(l,\mu)$ имеет по μ порядок малости $O(\mu^{k+1})$ при $0<\mu\leqslant\mu_0$, функции $r_i^{(k)}(\tau,t_1,p,q)$, $i=1,2$ определяются соотношениями (14), (15) соответственно. □

Предположение 2. *1. Система* (7) *относительно управляема [10] на* T.

2. Для любого $t\in T$ $\operatorname{rank}\{B_2(t_1),\ A_{22}(t_1)B_2(t_1), ...,\ A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1)\} = m$.

3. Максимум в (16) *достигается на векторе* $(l^{(k)})' = (p^{(k)'}, q^{(k)'})$ *таком, что* $r_1^{(k)}(\tau,t_1,p^{(k)},q^{(k)}) \neq 0$, $q^{(k)}\neq 0$.

Следует заметить, что в условиях предположения 2 задача (3) разрешима [1, с. 110], [2, с. 76], т. е. существует управление $u^0(\cdot)\in P(\cdot)$, удовлетворяющее (5) при $0<\mu\leqslant\mu_0$, причем вектор $(l^0)' = (p^{0'}, q^{0'})$, максимизирующий (4), отличен от нулевого.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предположения 2. Тогда при* $0<\mu\leqslant\mu_0$, μ_0 *достаточно мало, управляющее воздействие*

$$u_\mu^{(k)}(\tau) = \begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0\leqslant\tau\leqslant t_1-\alpha_k(\mu),\\ v^{(k)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1-\alpha_k(\mu)<\tau\leqslant t_1,\end{cases}$$

доставляет оценку $\varepsilon^0(t_1)$ с точностью $O(\mu^{k+1})$:

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) + O(\mu^{k+1}), \tag{19}$$

причем $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяются условиями:

для почти всех $\tau \in [t_0, t_1 - \alpha_k(\mu)]$

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u^{(k)}(\tau) = \min_{u(\tau)\in P(\tau)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u(\tau);$$

для почти всех $s \in [0, \alpha_k(\mu)/\mu)$

$$r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v^{(k)}(s) = \min_{v(s)\in V(s)} r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v(s).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из свойств функции

$$L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = -h_{(k)}^{**}(p, q) + \int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q; \mu)u(\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{\alpha_k(\mu)/\mu} r_2^{(k)}(s, t_1, p, q; \mu)v(s)ds,$$

а именно элементы $p^{(k)}$, $q^{(k)}$, $u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяют седловую точку $L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot))$, т. е. для $p \in R^n$, $q \in R^m$, $u \in P(\cdot)$, $v \in V(\cdot)$

$$L_{(k)}(p, q; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) \leqslant L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) \leqslant L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u(\cdot), v(\cdot)),$$

причем (пользуясь (16))

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \min_{u(\cdot),v(\cdot)} \max_{p,q} L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) = \max_{p,q} \min_{u(\cdot),v(\cdot)} L_{(k)}(p, q; u(\cdot), v(\cdot)) =$$
$$= L_{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)),$$
$$p \in R^n, \qquad q \in R^m, \qquad u \in P(\cdot), \qquad v \in V(\cdot).$$

Тогда получим:

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \max_{p\in R^n, q\in R^m} \{L_{(k)}(p, q; u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)) + \hat{\xi}_k(p, q; \mu)\}, \tag{20}$$

где $\hat{\xi}_k(p, q; \mu)$ имеет такой же порядок малости по μ ($0 < \mu \leqslant \mu_0$), как в (13), и максимум в (20) достигается на некотором векторе $\hat{l} \in co\, M^{(k)}$, здесь $M^{(k)} = \{l \in R^{n+m} |\ l \in \partial\varphi(z),\ z \in Z(t_1; u_\mu^{(k)}(\cdot), Z_0),\ \varphi(z) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot))\}$, $\partial\varphi(z)$ — субдифференциал функции φ в точке z [6], $\mathrm{co}\, M^{(k)}$ — выпуклая оболочка $M^{(k)}$ (в данном случае $M^{(k)}$ компакт в R^{n+m}). Таким образом, имеем:

$$J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1}),$$

при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ и, следовательно, справедливо равенство (19). □

Библиографический список

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М. : Наука, 1968. 475 с.
2. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
3. *Кремлёв А. Г.* Асимптотические свойства ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы в задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61–78.
4. *Гребенникова И. В.* Аппроксимация решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 2011. №. 10. С. 28–39. DOI: 10.3103/S1066369X11100045.
5. *Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г.* Аппроксимация управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 142–151. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-142-151.

6. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 492 с.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Физматгиз, 1959. 468 с.
8. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 468 с.
9. *Гребенникова И. В.* Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 14–22.
10. *Кириллова Ф. М.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.

Образец для цитирования:

Гребенникова И. В., Кремлёв А. Г. Итерационная процедура построения оптимального решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 272–280. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280.

Iterative Procedure of Constructing Optimal Solving in the Minimax Problem of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Geometric Constraints

I. V. Grebennikova[1], A. G. Kremlev[2]

[1]Irina V. Grebennikova, Ural Federal University, 19, Mira st., 620002, Ekaterinburg, Russia, giv001@mail.ru

[2]Alexandr G. Kremlev, Ural Federal University, 19, Mira st., 620002, Ekaterinburg, Russia, kremlev001@mail.ru

The control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and geometric constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. Iterative procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Key words: singularly perturbed system with delay, optimal control, fundamental matrix.

References

1. Krasovskii N. N. *Teorija upravlenija dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka, 1968, 475 p. (in Russian).
2. Kurzhanskij A. B. *Upravlenie i nabljudenie v uslovijah neopredelennosti* [Control and Observation under the Uncertainty Conditions]. Moscow, Nauka, 1977, 392 p. (in Russian).
3. Kremlev A. G. Asymptotic properties of a set of trajectories of a singularly perturbed system in the optimal control problem. *Autom. Remote Control*, 1993, vol. 54, no. 9, pp. 1353–1367.
4. Grebennikova I. V. Solution approximation in a minimax control problem for a singularly perturbed system with delay. *Russian Math.*, 2011, vol. 55, no. 10, pp. 23–33. DOI: 10.3103/S1066369X11100045.
5. Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Approximation of control for singularly perturbed system with delay with geometric constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 142–151 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-142-151.
6. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz* [Convex Analysis]. Moscow, Mir, 1973, 492 p. (in Russian).
7. Krasovskii N. N. *Nekotorye zadachi teorii ustojchivosti dvizhenija* [Some Problems in the Theory of Stability of Motion]. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 468 p. (in Russian).
8. Natanson I. P. *Teorija funkcij veshhestvennoj peremennoj* [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Nauka, 1974, 468 p. (in Russian).
9. Grebennikova I. V. On iterative method of constructing optimal control for singularly perturbed systems with delay. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 3, pp. 14–22 (in Russian).
10. Kirillova F. M. Relative controllability of linear dynamic systems with delay. *Doklady AN SSSR*, 1967, vol. 174, no. 6, pp. 1260–1263 (in Russian).

Please cite this article in press as:

Grebennikova I. V., Kremlev A. G. Iterative Procedure of Constructing Optimal Solving in the Minimax Problem of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Geometric Constraints. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 272–280 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-272-280.