УДК 519.853

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ФУНКЦИОНАЛУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

С. И. Дудов[1], М. А. Осипцев[2]

[1] Дудов Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, DudovSI@info.sgu.ru

[2] Осипцев Михаил Анатольевич, старший преподаватель кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Osipcevm@gmail.com

Рассматривается конечномерная задача о равномерной оценке (наилучшем приближении) в метрике Хаусдорфа выпуклого тела шаром произвольной нормы с фиксированным радиусом. Известно, что в случае, когда оцениваемое тело и шар используемой нормы являются многогранниками, данная задача может быть сведена к задаче линейного программирования. Это позволяет предложить метод получения приближенного решения задачи на основе предварительной аппроксимации тела и единичного шара нормы многогранниками. В связи с этим в статье получена оценка устойчивости (чувствительности) оптимального значения целевой функции задачи к погрешности аппроксимации оцениваемого выпуклого тела и единичного шара используемой нормы.

Ключевые слова: выпуклое тело, метрика Хаусдорфа, устойчивость, функция расстояния.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-273-279

1. Рассматривается задача

$$\phi(x,r) \equiv h(D,\, Bn(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \tag{1}$$

где D — оцениваемое (приближаемое) выпуклое тело из конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$, $Bn(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x-y) \leqslant r\}$ — шар нормы $n(\cdot)$ фиксированного радиуса r с центром в точке x,

$$h(A,B) = \max\left\{ \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} n(a-b),\ \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} n(a-b) \right\} \tag{2}$$

— расстояние Хаусдорфа между множествами A и B, индуцированное нормой $n(\cdot)$.

Таким образом, (1) — задача о равномерной оценке (наилучшем приближении) в метрике Хаусдорфа заданного выпуклого тела шаром фиксированного радиуса.

Отметим, что впервые задача о наилучшем приближении выпуклого компакта шаром в метрике Хаусдорфа, т. е. когда требуется минимизировать функцию $\phi(x,r)$ не только по x, но и по $r \geqslant 0$, рассматривалась в [1] для случая евклидовой нормы. Для случая произвольной нормы она исследовалась в [2, 3]. Как показано в [3], задача (1) своими решениями для значений r из определённых диапазонов выражает решения ряда известных задач по шаровым оценкам выпуклых тел.

В работе [4] предложен подход к приближенному решению задачи (1) через предварительную аппроксимацию выпуклого тела D и единичного шара используемой нормы $n(\cdot)$ многогранниками. Это позволило редуцировать «приближенную» задачу к задаче линейного программирования. При этом естественно возникает вопрос об устойчивости решения задачи относительно погрешности аппроксимации указанных объектов многогранниками.

Заметим, при дальнейшем изложении будет установлено, что функция $\phi(x,r)$ является выпуклой по x на $\mathbb{R}^p$ и задача (1), таким образом, является задачей выпуклого программирования. Известно, что исследование устойчивости таких задач может опираться на сильную выпуклость целевой функции [5, 6]. Однако можно показать, что функция $\phi(x,r)$ не является сильно выпуклой для любого выпуклого тела D.

Пусть далее D_ε — некоторое выпуклое тело, а Bn^δ — симметричное относительно 0_p выпуклое тело такие, что

$$h(D,\, D_\varepsilon) \leqslant \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{1+\delta}Bn(0_p,1) \subset Bn^\delta \subset \frac{1}{1-\delta}Bn(0_p,1), \qquad \delta \in (0,1). \tag{4}$$

То есть D_ε и Bn^δ — некоторые аппроксимации тела D и единичного шара используемой нормы. Обозначим через

$$n_\delta(x) = \inf\left\{\alpha : \frac{x}{\alpha} \in Bn^\delta\right\} \tag{5}$$

функцию Минковского множества Bn^δ, а

$$Bn^\delta(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n_\delta(x-y) \leqslant r\}.$$

Наряду с «точной» задачей (1) далее рассматриваем и «приближенную» задачу:

$$\phi_{\varepsilon,\delta}(x,r) \equiv h_\delta(D_\varepsilon,\, Bn^\delta(x,r)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}, \tag{6}$$

где $h_\delta(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа, индуцированная нормой $n_\delta(\cdot)$. Обозначим через

$$f(r) = \min_{x\in\mathbb{R}^p} \phi(x,r), \qquad f_{\varepsilon,\delta}(r) = \min_{x\in\mathbb{R}^p} \phi_{\varepsilon,\delta}(x,r),$$
$$C(r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \phi(x,r) = f(r)\}, \qquad C_{\varepsilon,\delta}(r) = \{y \in \mathbb{R}^p : \phi_{\varepsilon,\delta}(x,r) = f_{\varepsilon,\delta}(r)\}$$

оптимальные значения целевых функций и множества решений в «точной» (1) и «приближенной» задаче (6). Цель работы — доказать, что $f_{\varepsilon,\delta}(r) \to f(r)$ при $\varepsilon \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$ и, кроме того, получить оценку $|f_{\varepsilon,\delta}(r) - f(r)|$ через ε и δ, т. е. устойчивости (чувствительности [7]) по функционалу задачи (1) к погрешности задания D и $Bn(0_p,1)$.

2. Важное значение для нас будет иметь полученная в [3] формула, выражающая расстояние Хаусдорфа (2) между выпуклым телом D и шаром $Bn(x,r)$.

$$\phi(x,r) = h(D,\, Bn(x,r)) = \max\{R(x,D) - r, P(x,D) + r\}. \tag{7}$$

Здесь $R(x,D)$ выражает расстояние в норме $n(\cdot)$ от точки x до самой удаленной точки множества D

$$R(x,D) = \max_{y\in D} n(x-y),$$

а функция $P(x,D)$ определена формулой

$$P(x,D) = \rho(x,D) - \rho(x,\Omega),$$

где $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$ и

$$\rho(x,A) = \inf_{y\in A} n(x-y)$$

— расстояние от точки x до множества A в норме $n(\cdot)$.

Далее будем полагать, что нам известны решения задачи о внешней оценке тела D шаром нормы $n(\cdot)$

$$R(x,D) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p} \tag{8}$$

и задачи о внутренней оценке

$$\rho(x,D) \to \max_{x\in D}. \tag{9}$$

Отметим, что задача (8) эквивалентна задаче

$$P(x,D) \to \min_{x\in\mathbb{R}^p}.$$

Введем для решений этих задач обозначения

$$R^* = \min_{x\in\mathbb{R}^p} R(x,D), \qquad C_R = \{y \in \mathbb{R}^p :\ R(y,D) = R^*\},$$
$$\rho^* = \max_{x\in D} \rho(x,\Omega), \qquad C_\rho = \{y \in D :\ \rho(y,\Omega) = \rho^*\}.$$

Используя эти данные, можно считать также известными величины

$$R^{\pm} = \max_{x \in C_\rho}(\min) R(x, D), \qquad P^{\pm} = \max_{x \in C_R}(\min) P(x, D), \tag{10}$$

$$r_R^{\pm} = (R^* - P^{\mp})/2, \qquad r_P^{\pm} = (R^{\pm} + \rho^*)/2. \tag{11}$$

Поскольку $R(x, D) \geqslant P(x, D)$ при любом $x \in \mathbb{R}^p$, то из (10), (11) следует

$$0 \leqslant r_R^- \leqslant r_R^+ \leqslant r_P^- \leqslant r_P^+ < \infty. \tag{12}$$

В работе [3] доказаны следующие факты

Теорема 1. 1. *Имеет место формула*

$$C(r) = \begin{cases} C_R, & \text{если } r \in [0,\, r_R^-], \\ C_R \bigcap \{x \in \mathbb{R}^p :\ R^* - 2r \geqslant P(x, D)\}, & \text{если } r \in [r_R^-,\, r_R^+], \\ C_\rho \bigcap \{x \in \mathbb{R}^p :\ R(x, D) \leqslant 2r - \rho^*\}, & \text{если } r \in [r_P^-,\, r_P^+], \\ C_\rho, & \text{если } r \geqslant r_P^+. \end{cases}$$

2. *Если* $C_R \bigcap C_\rho \neq \varnothing$, *то* $r_R^+ = r_P^- = (R^* + \rho^*)/2$ *и* $C((R^* + \rho^*)/2) = C_R \bigcap C_\rho$.
3. *Если* $C_R \bigcap C_\rho = \varnothing$, *то* $C(r) \bigcap \{C_R \bigcup C_\rho\} = \varnothing$, $\forall\, r \in (r_R^+, r_P^-)$.

Теорема 2. *Функция* $f(r)$ *является конечной и выпуклой на* $\mathbb{R}_+$, *причем*

$$f(r) = \begin{cases} R^* - r, & \text{если } r \in [0, r_R^+], \\ r - \rho^*, & \text{если } r \geqslant r_P^-. \end{cases} \tag{13}$$

Следствие 1. *Для любого* $y \in C(r)$ *при* $r \in (r_R^+, r_P^-)$ *имеет место равенство*

$$R(y, D) - r = P(y, D) + r. \tag{14}$$

Доказательство. Известно [3, 8], что функции $R(x, D)$ и $P(x, D)$ являются выпуклыми на $\mathbb{R}^p$. Поэтому функция $\phi(x, r)$ в силу (7) также является выпуклой по x всюду на $\mathbb{R}^p$. Следовательно, в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа:

$$y \in C(r) \Leftrightarrow 0_p \in \partial_x \phi(y, r), \tag{15}$$

где $\partial_x \phi(y, r)$ — субдифференциал функции $\phi(x, r)$ по x в точке y. Из формулы (7), следуя субдифференциальному исчислению [8, 9], вытекает

$$\partial_x \phi(x, r) = \begin{cases} \partial R(x, D), & \text{если } R(x, D) - r > P(x, D) + r, \\ \partial P(x, D), & \text{если } R(x, D) - r < P(x, D) + r, \\ co\{\partial R(x, D),\, \partial P(x, D)\}, & \text{если } R(x, D) - r = P(x, D) + r. \end{cases} \tag{16}$$

где $\partial R(x, D)$ и $\partial P(x, D)$ — субдифференциалы выпуклых функций $R(x, D)$ и $P(x, D)$.

Теперь поскольку

$$y \in C_R \Leftrightarrow 0_p \in \partial R(x, D), \qquad y \in C_\rho \Leftrightarrow 0_p \in \partial P(x, D),$$

то, используя теорему 1 (п. 1 и 3), соотношения (15)–(16) для $y \in C(r)$ при $r \in (r_R^+, r_P^-)$, получаем (14). Следствие доказано.

3. Непосредственно из (4), (5) вытекает

$$|n(x) - n_\delta(x)| \leqslant \delta n(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^p. \tag{17}$$

Получим соответствующие сравнительные оценки для функций

$$R_\delta(x, D_\varepsilon) = \max_{y \in D_\varepsilon} n_\delta(x - y), \qquad \rho_\delta(x, D_\varepsilon) = \min_{y \in D_\varepsilon} n_\delta(x - y),$$

$$\rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon) = \min_{y \in \Omega_\varepsilon} n_\delta(x - y), \qquad P_\delta(x, D_\varepsilon) = \rho_\delta(x, D_\varepsilon) - \rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon),$$

где $\Omega_\varepsilon = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D_\varepsilon}$.

Лемма 1. *Для любых* $x \in \mathbb{R}^p$, $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta \in [0, 1)$, *справедливы неравенства*

$$|R_\delta(x, D_\varepsilon) - R(x, D)| \leqslant (1 + \delta)\varepsilon + \delta R(x, D), \tag{18}$$

$$|\rho_\delta(x, D_\varepsilon) - \rho(x, D)| \leqslant (1 + \delta)\varepsilon + \delta \rho(x, D), \tag{19}$$

$$|\rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon) - \rho(x, \Omega)| \leqslant (1 + \delta)\varepsilon + \delta \rho(x, \Omega), \tag{20}$$

$$|P_\delta(x, D_\varepsilon) - P(x, D)| \leqslant (1 + \delta)\varepsilon + \delta |P(x, D)|. \tag{21}$$

Доказательство. Ограничимся доказательствами неравенств (18) и (21). Доказательства для (19) и (20) аналогичны доказательству для (18).

1. Обозначим через

$$Q^R(x, D) = \{z \in D : n(x - z) = R(x, D)\}.$$

Из (3) следует, что для $z \in Q^R(x, D)$ найдётся точка $z_\varepsilon \in D_\varepsilon$ такая, что

$$n(z - z_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{22}$$

Используя (17), (22) и неравенство треугольника, получаем:

$$\begin{gathered} R_\delta(x, D_\varepsilon) \geqslant (1 - \delta) \max_{y \in D_\varepsilon} n(x - y) \geqslant (1 - \delta) n(x - z_\varepsilon) \geqslant \\ \geqslant (1 - \delta)(n(x - z) - n(z - z_\varepsilon)) \geqslant (1 - \delta)(R(x, D) - \varepsilon). \end{gathered} \tag{23}$$

С другой стороны, ввиду (3) выполняется

$$D_\varepsilon \subset D + Bn(0_p, \varepsilon) \tag{24}$$

и тогда, используя (17), имеем:

$$\begin{gathered} R_\delta(x, D_\varepsilon) \leqslant (1 + \delta) \max_{y \in D + Bn(0_p, \varepsilon)} n(x - y) \leqslant \\ \leqslant (1 + \delta) \max_{\substack{y \in D \\ z \in Bn(0_p, \varepsilon)}} (n(x - y) + n(z)) \leqslant (1 + \delta)(R(x, D) + \varepsilon). \end{gathered} \tag{25}$$

Из (23) и (25) следует (18).

2. Теперь получим неравенство (21). Возможны следующие варианты:

$$P_\delta(x, D_\varepsilon) - P(x, D) = \begin{cases} \rho_\delta(x, D_\varepsilon) - \rho(x, D), & \text{если } x \notin D_\varepsilon \bigcup D, \\ \rho(x, \Omega) - \rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon), & \text{если } x \in D_\varepsilon \bigcap D, \\ \rho_\delta(x, D_\varepsilon) + \rho(x, \Omega), & \text{если } x \notin D_\varepsilon,\ x \in D, \\ -\rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon) - \rho(x, D), & \text{если } x \in D_\varepsilon,\ x \notin D. \end{cases} \tag{26}$$

В первых двух случаях неравенство (21) следует из (19) и (20) соответственно. Из оставшихся вариантов рассмотрим последний. Нетрудно видеть, учитывая $x \in D_\varepsilon$ и $x \notin D$, что максимальное по модулю значение правая часть достигает при $D_\varepsilon = D + Bn(0_p, \varepsilon)$. Тогда легко видеть, $\rho_\delta(x, \Omega_\varepsilon) + \rho(x, D) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, в любом случае неравенство (21) справедливо. Лемма доказана.

Докажем ещё два вспомогательных факта.

Лемма 2. *Пусть* $x(r) \in C(r)$, $x_{\varepsilon,\delta}(r) \in C_{\varepsilon,\delta}(r)$. *Для любых* $r \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta \in [0, 1)$, *справедливы оценки*

$$R(x(r), D) \leqslant d, \qquad R(x_{\varepsilon,\delta}, D) \leqslant \frac{1 + \delta}{1 - \delta}(d + 2\varepsilon) + \varepsilon, \tag{27}$$

где $d = \max\limits_{x,y \in D} n(x - y)$ *— диаметр множества* D *в норме* $n(\cdot)$.

Доказательство. Функция $f(r) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \phi(x,r)$ является по теореме 2 выпуклой конечной функцией. Поэтому (см. [9, гл.1]) существует

$$f'_+(r) = \lim_{\Delta r\downarrow 0} \frac{f(r+\Delta r) - f(r)}{\Delta r}$$

и при этом, учитывая (13),

$$|f'_+(r)| \leqslant 1, \qquad \forall\ r \geqslant 0. \tag{28}$$

В силу следствия 1 из (7) для любого $x(r) \in C(r)$ получаем:

$$R(x(r), D) = f(r) + r, \quad r \in (r_R^+,\, r_P^-). \tag{29}$$

По теореме 1 имеем: $R(x(r), D) \equiv R^*$ для $r \in [0, r_R^+]$. Далее, на отрезке $[r_R^+,\, r_P^-]$, как следует из (28), (29), значение $R(x(r), D)$ не возрастает. Таким образом,

$$\sup_{r\geqslant 0} R(x(r), D) = \sup_{r\geqslant r_P^-} R(x(r), D). \tag{30}$$

Из теоремы 1 также следует

$$x(r) \in C_\rho, \quad \forall\ r \geqslant r_P^-. \tag{31}$$

А поскольку $C_\rho \in int\, D$, из (30), (31) вытекает

$$\sup_{r\geqslant 0} R(x(r), D) \leqslant \max_{x\in D} R(x, D) = \max_{x,y\in D} n(x-y) = d,$$

т. е. первая оценка в (27) получена.

Аналогичные рассуждения для «приближенной» задачи (6) с использованием (17) и включения $D_\varepsilon \subset D + Bn(0_p, \varepsilon)$ дают

$$\sup_{r\geqslant 0} R_\delta(x_{\varepsilon,\delta}(r), D_\varepsilon) \leqslant \max_{x\in D_\varepsilon} R_\delta(x, D_\varepsilon) \leqslant (1+\delta) \max_{x,y\in D+Bn(0_p,\varepsilon)} n(x-y) = (1+\delta)(d+2\varepsilon). \tag{32}$$

Теперь, используя включение $D \subset D_\varepsilon + Bn(0_p, \varepsilon)$, (17) и (32), получаем:

$$R(x_{\varepsilon,\delta}(r), D) \leqslant R(x_{\varepsilon,\delta}(r), D_\varepsilon + Bn(0_p,\varepsilon)) = R(x_{\varepsilon,\delta}(r), D_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1-\delta} \max_{y\in D_\varepsilon} n_\delta(x_{\varepsilon,\delta}(r) - y) + \varepsilon = \frac{1}{1-\delta} R_\delta(x_{\varepsilon,\delta}(r), D_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant \frac{1+\delta}{1-\delta}(d+2\varepsilon) + \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых $x \in \mathbb{R}^p$, $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta \in [0,\, 1)$, справедливо неравенство*

$$|\phi_{\varepsilon,\delta}(x,r) - \phi(x,r)| \leqslant (1+\delta)\varepsilon + \delta R(x, D). \tag{33}$$

Доказательство. Используя формулу (7), ее соответствующий аналог для случая нормы $n_\delta(\cdot)$ и выпуклого тела D_ε:

$$\phi_{\varepsilon,\delta}(x,r) = \max\{R_\delta(x, D_\varepsilon) - r, P_\delta(x, D_\varepsilon) + r\},$$

а также лемму 1 и, учитывая, что $R(x, D) \geqslant P(x, D)$, получаем:

$$|\phi_{\varepsilon,\delta}(x,r) - \phi(x,r)| \leqslant \max\{|R_\delta(x, D_\varepsilon) - R(x, D)|, |P_\delta(x, D_\varepsilon) - P(x, D)|\} \leqslant (1+\delta)\varepsilon + \delta R(x, D).$$

Лемма доказана.

Теперь докажем основную теорему об оценке устойчивости оптимального значения целевой функции задачи (1) к погрешности ε и δ.

Теорема 3. *Для любого $r \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$, $\delta \in [0,\, 1)$, справедливо неравенство*

$$|f_{\varepsilon,\delta}(r) - f(r)| \leqslant (1+2\delta)\varepsilon + \frac{\delta(1+\delta)}{1-\delta}(d+2\varepsilon), \tag{34}$$

где d — диаметр тела D в норме $n(\cdot)$.

Доказательство. Пусть $x(r) \in C(r)$, $x_{\varepsilon,\delta}(r) \in C_{\varepsilon,\delta}(r)$. Используя лемму 3, получаем неравенства

$$f_{\varepsilon,\delta}(r) - f(r) = f_{\varepsilon,\delta}(r) - \phi_{\varepsilon,\delta}(x(r), r) + \phi_{\varepsilon,\delta}(x(r), r) - \phi(x(r), r) \leqslant$$
$$\leqslant \phi_{\varepsilon,\delta}(x(r), r) - \phi(x(r), r) \leqslant (1+\delta)\varepsilon + \delta R(x(r), D),$$
$$f(r) - f_{\varepsilon,\delta}(r) = f(r) - \phi(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) + \phi(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) - \phi_{\varepsilon,\delta}(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) \leqslant$$
$$\leqslant \phi(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) - \phi_{\varepsilon,\delta}(x_{\varepsilon,\delta}(r), r) \leqslant (1+\delta)\varepsilon + \delta R(x_{\varepsilon,\delta}(r), D),$$

из которых вытекает

$$|f_{\varepsilon,\delta}(r) - f(r)| \leqslant (1+\delta)\varepsilon + \delta \max\{R(x(r), D), R(x_{\varepsilon,\delta}(r), D)\}.$$

Остается применить лемму 2. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238, № 13-01-00175).

Библиографический список

1. *Никольский М. С., Силин Д. Б.* О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 338–354.
2. *Дудов С. И., Златорунская И. В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 13–38. DOI: 10.4213/sm513.
3. *Дудов С. И.* Взаимосвязь некоторых задач по оценке выпуклого компакта шаром // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 1. С. 43–58. DOI: 10.4213/sm1479.
4. *Дудов С. И., Осипцев М. А.* О подходе к приближенному решению задачи наилучшего приближения выпуклого тела шаром фиксированного радиуса // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 267–272.
5. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М. : Наука, 2000.
6. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М. : МЦНМО, 2011.
7. *Измайлов А. Ф.* Чувствительность в оптимизации. М. : Физматлит, 2006.
8. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980.
9. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981.

On Functional Stability of the Solution for the Problem of Convex Body Best Approximating by a Ball with Fixed Radius

S. I. Dudov[1], M. A. Osiptsev[2]

[1]Dudov Sergey Ivanovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, Dudov@info.sgu.ru
[2]Osipcev Mikhail Anatolievich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, Osipcevm@gmail.com

A finite-dimensional problem of finding a uniform estimate (approximation in the Hausdorff metric) of a convex body by a fixed-radius ball in an arbitrary norm is considered. It is known that this problem can be reduced to a linear programming problem in the case, when the convex body and the norm ball are polytops. Therefore, we prove the functional stability of the optimal value of the objective function with respect to accuracy of the given convex body and accuracy of the unit ball for the norm used. The stability rating is derived.

Key words: convex body, Hausdorff metric, stability, distance function.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-00238, no. 13-01-00175).

References

1. Nikol'skii M. S., Silin D. B. On the best approximation of a convex compact set by elements of addial. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 211, pp. 306–321.
2. Dudov S. I., Zlatorunskaya I. V. Uniform estimate of a compact convex set by a ball in an arbitrary norm. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1433–1458. DOI: 10.1070/sm2000v191n10ABEH000513.
3. Dudov S. I. Relations between several problems of estimating convex compacta by balls. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 1, pp. 39–53. DOI: 10.1070/SM2007v198n01ABEH003828.

4. Dudov S. I., Osipcev M. A. On an Approach to Approximate Solving of the Problem for the Best Approximation for Compact Body by a Ball of Fixed Radius. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 267–272.
5. Karmanov V. G. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical programming]. Moscow, Nauka, 2000 (in Russian).
6. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Methods of Optimization]. Moscow, MCSMO, 2011 (in Russian).
7. Izmailov A. F. *Chuvstvitel'nost' v optimizatsii* [Sensitivity optimization]. Moscow, Fizmatlit, 2006 (in Russian).
8. Pschenichnyi B. N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex Analysis and Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980 (in Russian)
9. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. *Nondifferetiable optimization*, Optimization software, Inc., Publications Division, New York, 1985.

УДК 517.5

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ШАГОВ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

Ю. С. Крусс

Крусс Юлия Сергеевна, аспирант кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KrussUS@gmail.com

В данной работе исследуется вопрос точности оценки числа шагов алгоритма построения ортогональной масштабирующей функции, порождающей кратномасштабный анализ на локальных полях положительной характеристики. Полученная в результате такого построения масштабирующая функция является ступенчатой и имеет ограниченный носитель. Число шагов в алгоритме связано непосредственно с носителем преобразования Фурье масштабирующей функции и поэтому представляет собой не только вычислительный интерес. Для числа шагов алгоритма известна верхняя оценка. В настоящей работе установлено точное число шагов алгоритма, которое оказалось равным верхней оценке.

Ключевые слова: локальные поля положительной характеристики, масштабирующая функция, кратномасштабный анализ.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-279-287

ВВЕДЕНИЕ

Понятие кратномасштабного анализа (КМА) на локальных полях было введено китайскими математиками H. Jiang, D. Li и N. Jin в работе [1]. Для локальных полей $F^{(s)}$ положительной характеристики p они доказали некоторые свойства и получили алгоритм построения вейвлетов по заданной масштабирующей функции. Используя полученные результаты, они построили КМА хааровского типа и соответствующие хааровские вейвлеты.

Вопросы построения ортогонального КМА на поле $F^{(1)}$ подробно изучены в работах [2–7]. В работе [8] даны необходимое и достаточные условия для вейвлет-фреймов на локальных полях. B. Behera и Q. Jahan [9] построили вейвлет-пакеты на локальных полях положительной характеристики. В работе [10] получены необходимые и достаточные условия того, чтобы функция $\varphi \in L^2(F^{(s)})$ порождала КМА. Эти условия имеют вид

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} |\hat{\varphi}(\xi + u(k))|^2 = 1 \tag{1}$$

для п.в. ξ в единичном шаре $\mathscr{D}$,

$$\lim_{j\to\infty} |\hat{\varphi}(\mathfrak{p}^j\xi)| = 1 \text{ для п.в. } \xi \in F^{(s)}, \tag{2}$$

и существует интегрально-периодическая функция $m_0 \in L^2(\mathscr{D})$ такая, что

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\mathfrak{p}\xi)\hat{\varphi}(\mathfrak{p}\xi) \quad \text{для} \quad \text{п.в.} \quad \xi \in F^{(s)}, \tag{3}$$

где $\{u(k)\}$ — множество сдвигов, $\mathfrak{p}$ — prime element.