



УДК 517.984

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Л. С. Ефремова

Студентка магистратуры кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, liubov.efremova@gmail.com

В статье рассматривается дифференциальный оператор Штурма – Лиувилля с потенциалом, имеющим конечное число точек разрыва первого рода. Конечной целью является численное восстановление потенциала такого вида. Основным результатом представленной статьи — доказанная теорема и процедура, указывающие способ получения характеристик разрыва из начальных данных. Далее, используя полученные сведения о разрывах в ранее известных алгоритмах численного решения данной обратной задачи, например, в обобщенной итерационной схеме Ранделла – Сакса, приходим к улучшению точности восстановления потенциала на всем отрезке.

*Ключевые слова:* оператор Штурма – Лиувилля, обратная задача, разрывный потенциал, численное решение.

### ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена численному решению обратной задачи для оператора Штурма – Лиувилля с разрывным потенциалом.

Решение обратной задачи заключается в восстановлении потенциала по некоторым спектральным характеристикам. Данные задачи играют фундаментальную роль в различных разделах математики, имеют множество приложений в физике и в других областях естественных наук. Наиболее полные результаты в спектральной теории дифференциальных операторов получены для оператора Штурма – Лиувилля.

Теоретическая сторона вопроса решения обратной задачи для данного оператора достаточно хорошо изучена [1, 2]. Получены теоремы единственности восстановления дифференциального уравнения по спектральным данным, известны различные методы восстановления потенциала: метод Гельфанда – Левитана, метод спектральных отображений, метод эталонных моделей, метод Борга.

Однако с точки зрения численной реализации приведенные выше методы решения обратных задач не являются эффективными. Как следствие, стали появляться работы, посвященные численным аспектам решения обратных задач для оператора Штурма – Лиувилля [3–5].

Численные методы восстановления потенциала в случае его непрерывности показывают хорошие результаты. В противном случае их использование приводит к ухудшению точности на всем отрезке. Рафлер (M. Rafter) и Бёкманн (C. Böckmann) в своей работе [4] предложили использовать обобщенную схему Ранделла – Сакса [5], которая в случае наличия информации о характеристиках разрыва использует адаптированный под эти данные модельный потенциал, что приводит к улучшению точности восстановления потенциала. Однако возникает вопрос о том, где взять необходимую априорную информацию о разрывах. Основной целью настоящей работы как раз и является описание процедуры, позволяющей найти характеристики разрывов.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ НАХОЖДЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗРЫВА

Рассмотрим на отрезке  $[0, \pi]$  дифференциальное уравнение Штурма – Лиувилля:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y. \quad (1)$$

Пусть  $(\mu_n)_{n \geq 1}$ ,  $(\nu_n)_{n \geq 0}$  — спектры краевых задач для уравнения Штурма – Лиувилля с граничными условиями  $y(0) = y(\pi) = 0$  и  $y(0) = y'(\pi) = 0$  соответственно. По теореме Борга [6] задание двух этих множеств определяет  $q(x)$  единственным образом.

Предположим, потенциал  $q(x)$  представим в виде

$$q(x) = q_1(x) + \sum_{a_j < x} h_j, \quad (2)$$

где  $q_1(x) \in AC[0, \pi]$ .



Определим вспомогательное множество собственных значений  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{2n+1} &= \nu_n, & n &\geq 0, \\ \lambda_{2n} &= \mu_n, & n &\geq 1. \end{aligned}$$

Если продолжить потенциал  $q(x)$  с  $[0, \pi]$  на  $[0, 2\pi]$  следующим образом

$$q(2\pi - x) = q(x), \quad x \in [0, \pi],$$

то ясно, что  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  является спектром задачи Дирихле уравнения (1) на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Как известно, асимптотические формулы для  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  имеют следующий вид [6]:

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + A + c_n,$$

где  $A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x) dx$ ,  $c_n = o(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Так как нам даны  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ , значение  $A$  может быть получено по формуле

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{2N} \frac{b_n}{N+1},$$

где  $b_n = \lambda_n - (n/2)^2$  известны для любого  $n$ .

Определим следующую функцию:

$$p_N(x) := -\frac{2\pi i}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} c_n n e^{inx},$$

где  $c_n = \lambda_n - (n/2)^2 - A$  — данные, полученные из собственных значений.

Далее будет доказано, что при стремлении числа собственных значений к бесконечности значение функции  $|p_N(x)|$  во всех точках, не совпадающих с точками разрыва, стремится к нулю. Однако на практике мы можем использовать лишь конечное число точек спектра, в силу чего у функции  $|p_N(x)|$  при любом конечном  $N$  имеются дополнительные локальные максимумы, возникает так называемый эффект боковых лепестков. Очевидно, это приводит к затруднениям в обнаружении разрывов в случае, когда их несколько. Для устранения данной проблемы необходимо подавить боковые лепестки.

Запишем функцию  $p_N(x)$  в виде

$$p_N(x) = -\frac{2\pi i}{N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{n,N} c_n n e^{inx},$$

где  $w_{n,N}$  — «оконная функция» [7], в нашем случае — прямоугольная, т. е.  $w_{n,N} = 1$  при  $N \leq n \leq 2N$  и  $w_{n,N} = 0$  в противном случае. Проводя аналогию с наблюдением за спектром ограниченного во времени сигнала [7], делаем следующий вывод: чтобы подавить боковые лепестки, нужно изменить «оконную функцию»  $w_{n,N}$ , а именно сделать ее более гладкой.

Окончательно получаем следующую конструкцию:

$$p_N(x) = -\frac{2\pi i}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} \frac{w_{n,N} c_n n e^{inx}}{\beta_N}, \quad (3)$$

где  $\beta_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N}$  — коэффициент ослабления [7].

**Теорема 1.** Пусть  $p_N(x)$  — функция, определенная в (3), где последовательность  $w_{n,N}$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\frac{1}{N} \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{inx} \rightarrow 0$  равномерно на  $[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$  для любого  $\delta > 0$ ;
- 2)  $C_1 < |\beta_N| < C_2$ , где  $C_1, C_2$  — некоторые положительные константы.



Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N(a_j) = h_j, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} p_N(x) = 0, \quad x \neq a_j,$$

где сходимость является равномерной на любом множестве вида  $[0, \pi] \setminus \bigcup_{j=1}^m (a_j - \delta, a_j + \delta)$ ,  $\delta > 0$ .

**Доказательство.** Известно [8], что

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(x)[1 - \cos(nx)] dx + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Используя представление (2) для потенциала, получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} h_1[1 - \cos(nx)] dx + \dots + \frac{1}{\pi} \int_{a_{m-1}}^{a_m} [h_1 + \dots + h_{m-1}][1 - \cos(nx)] dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{a_m}^{\pi} [h_1 + \dots + h_m][1 - \cos(nx)] dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_1(x)[1 - \cos(nx)] dx + o\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \frac{h_1(a_2 - a_1)}{\pi} + \dots + \frac{(h_1 + \dots + h_{m-1})(a_m - a_{m-1})}{\pi} + \\ &+ \frac{(h_1 + \dots + h_m)(\pi - a_m)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_1(x) dx - \\ &- \frac{h_1 \cdot [\sin(na_2) - \sin(na_1)]}{\pi n} - \dots - \frac{(h_1 + \dots + h_{m-1}) \cdot [\sin(na_m) - \sin(na_{m-1})]}{\pi n} + \\ &+ \frac{(h_1 + \dots + h_m) \cdot \sin(na_m)}{\pi n} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_1(x) \cos(nx) dx + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{h_1 \cdot [\sin(na_2) - \sin(na_1)]}{\pi n} - \dots - \frac{(h_1 + \dots + h_{m-1}) \cdot [\sin(na_m) - \sin(na_{m-1})]}{\pi n} + \\ &+ \frac{(h_1 + \dots + h_m) \cdot \sin(na_m)}{\pi n} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q_1(x) \cos(nx) dx + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} &-\frac{2\pi i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} \left[ -\frac{h_1 \cdot [\sin(na_2) - \sin(na_1)]}{\pi n} - \dots - \right. \\ &\left. - \frac{(h_1 + \dots + h_{m-1}) \cdot [\sin(na_m) - \sin(na_{m-1})]}{\pi n} + \frac{(h_1 + \dots + h_m) \cdot \sin(na_m)}{\pi n} \right] w_{n,N} n e^{inx} = \\ &= \frac{h_1}{\beta_N \cdot (N+1)} \left[ \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x-a_1)} - \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x+a_1)} \right] + \dots + \\ &+ \frac{h_m}{\beta_N \cdot (N+1)} \left[ \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x-a_m)} - \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x+a_m)} \right]. \end{aligned}$$

Тогда функция  $p_N(x)$  имеет вид:

$$p_N(x) = p_N^*(x) + h_{1N}(x) + h_{2N}(x),$$

где

$$p_N^*(x) = \sum_{j=1}^m \frac{h_j}{\beta_N \cdot (N+1)} \left[ \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x-a_j)} - \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot e^{in(x+a_j)} \right],$$

$$h_{1N}(x) = \frac{2i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} \int_0^\pi q_1(y) \cos(ny) dy \cdot w_{n,N} \cdot n \cdot e^{inx},$$

$$h_{2N}(x) = \frac{2\pi i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} \varepsilon_n \cdot w_{n,N} \cdot n \cdot e^{inx},$$

$\varepsilon_n$  удовлетворяют условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \varepsilon_n = 0$ .

Рассмотрим каждое из трех получившихся слагаемых.

1. В силу условий 1) и 2) для последовательности  $w_{n,N}$ : при  $N \rightarrow \infty$  функция  $p_N^*(x)$  имеет ненулевые слагаемые только в точках  $x = a_j$ :

$$p_N^*(a_j) = \frac{h_j}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} \frac{w_{n,N}}{\beta_N}, \quad \text{где} \quad \beta_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N}.$$

Получаем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N^*(a_j) = h_j,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_N^*(x) = 0, \quad x \neq a_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

2. Учитывая, что  $q_1(x) \in AC[0, \pi]$ , и используя теорему Римана – Лебега, получаем

$$|h_{1N}(x)| = \left| \frac{2i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} w_{n,N} \cdot n \cdot \int_0^\pi q_1(y) \cos(ny) dy \cdot e^{inx} \right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{N} \cdot \sum_{n=N}^{2N} \left| n \cdot \frac{\sin ny}{n} q_1(y) \Big|_0^\pi - n \cdot \frac{1}{n} \cdot \int_0^\pi \sin ny \cdot q_1'(y) dy \right| =$$

$$= \frac{C}{N} \cdot \sum_{n=N}^{2N} \left| \int_0^\pi \sin ny \cdot q_1'(y) dy \right| = o(1), \quad N \rightarrow \infty,$$

где  $C = 2C_2/C_1$ .

Следовательно,  $h_{1N}(x) = o(1)$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

3. Далее,

$$|h_{2N}(x)| = \left| \frac{2\pi i}{\beta_N \cdot (N+1)} \sum_{n=N}^{2N} \varepsilon_n \cdot w_{n,N} \cdot n \cdot e^{inx} \right| \leq \frac{C}{N} \cdot \sum_{n=N}^{2N} |n \cdot \varepsilon_n| \leq C \cdot \frac{2N-N}{N} \cdot N \cdot \max_{N \leq n \leq 2N} |\varepsilon_n|,$$

где  $C = 2\pi C_2/C_1$ .

Тогда  $\lim_{N \rightarrow \infty} C \cdot N \cdot \max_{N \leq n \leq 2N} |\varepsilon_n| = 0$ . Получаем, что  $h_{2N}(x) = o(1)$ ,  $N \rightarrow \infty$ .

Из пп. 1–3 заключаем, что теорема 1 доказана. □

**Следствие 1.** Пусть известно, что  $a_1 \in [A_1, B_1], \dots, a_m \in [A_m, B_m]$ , где  $A_k, B_k$  – некоторые числа, удовлетворяющие неравенствам  $0 < A_1 < B_1 < A_2 < B_2 < \dots < A_m < B_m < \pi$ . Для всех  $\delta > 0$  существует  $N(\delta) = N_\delta$  такое, что: если  $N > N_\delta$  и  $x^*$  является точкой глобального максимума функции  $|p_N(x)|$  на  $[A_j, B_j]$ , то  $x^* \in (a_j - \delta, a_j + \delta)$ .

## 2. ПРОЦЕДУРА НАХОЖДЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗРЫВОВ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА

Пусть даны  $(\mu_n)_{n \geq 1}, (\nu_n)_{n \geq 0}, [A_1, B_1], \dots, [A_m, B_m]$ . Известно, что потенциал  $q(x)$  имеет вид (2). Требуется восстановить потенциал  $q(x)$ .

### Алгоритм 1.

1. Определяем  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  следующим образом:

$$\lambda_{2n+1} = \nu_n, \quad n \geq 0,$$

$$\lambda_{2n} = \mu_n, \quad n \geq 1.$$



2. Вычисляем  $A$ , используя формулу  $A = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{2N} b_n / (N + 1)$ , где  $b_n = \lambda_n - (n/2)^2$ .
3. Находим  $c_n = \lambda_n - (n/2)^2 - A$ .
4. Конструируем функцию  $p_N(x)$  по формуле (3).
5. На каждом отрезке  $[A_j, B_j]$  приближенно находим точку разрыва  $a_j, j = 1, \dots, m$  как глобальный максимум функции  $|p_N(x)|$  на этом интервале.
6. Для каждого скачка приближенно находим его высоту  $h_j, j = 1, \dots, m$ , как  $h_j = p_N(a_j)$ .
7. Применяем обобщенный итерационный алгоритм Ранделла – Сакса, где в качестве модельного потенциала берется  $\tilde{q} = \sum_{a_j < x} h_j + C$ ,  $C$  выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^\pi \tilde{q}(x) dx = \int_0^\pi q(x) dx.$$

### 3. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Рассмотрим потенциал следующего вида:

$$q(x) = \begin{cases} x(\pi - x) + 3, & 0 \leq x \leq 1, \\ x(\pi - x), & 1 < x \leq \pi. \end{cases} \quad (4)$$

На рис. 1 представлена функция  $|p_N(x)|$  при  $N = 22$ . Здесь и далее в данном параграфе в качестве  $w_{n,N}$  была взята последовательность вида  $w_{n,N} = 0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi(n - 1.5N)}{N + 1}\right)$ . Легко проверить, что она удовлетворяет условиям, указанным в теореме 1.

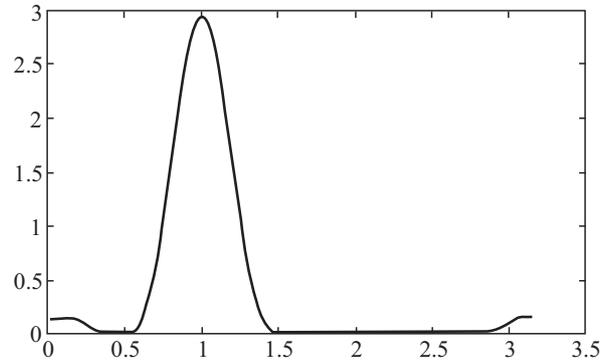


Рис. 1. График функции  $|p_N(x)|$  при  $N = 22$  в случае потенциала (4)

Видно, что глобальный максимум  $|p_N(x)|$  характеризует разрыв потенциала (4). Отсюда приближенно находим точку разрыва  $a_1 = 2.007$  и высоту скачка  $h_1 = 2.989$ .

Рис. 2 демонстрирует восстановленный потенциал (4). Для восстановления используется обобщенная итерационная схема Ранделла – Сакса:  $a$  – с модельным потенциалом, не учитывающим знания о параметрах разрыва;  $b$  – с модельным потенциалом, адаптированным под найденные свойства.

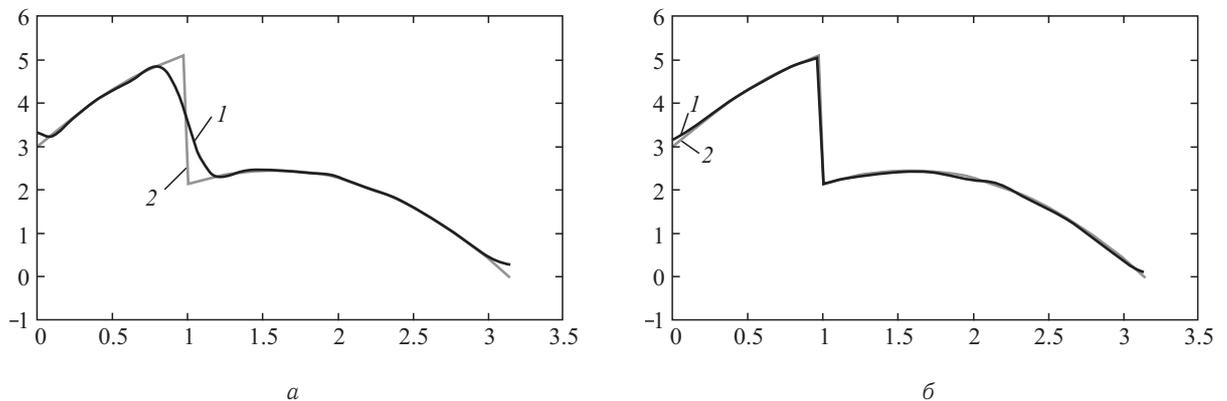


Рис. 2. Восстановленный потенциал (4) с помощью алгоритма Ранделла – Сакса (1 – восстановленный потенциал; 2 – точная функция):  $a$  – с модельным потенциалом  $\tilde{q} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx$ ,  $b$  – с модельным потенциалом, адаптированным под найденные характеристики разрыва:  $a_1 = 2.007, h_1 = 2.989$



Сведения об абсолютных и относительных погрешностях приведены в следующей таблице.

Абсолютные и относительные погрешности

График	$L_2$		$L_\infty$	
	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
Рис. 2, а	0.45866	0.08927	1.37606	0.26923
Рис. 2, б	0.05212	0.01014	0.16371	0.03203

Теперь обратимся к случаю, когда потенциал  $q(x)$  имеет несколько точек разрыва первого рода. Рассмотрим

$$q(x) = \begin{cases} x(\pi - x) + 2, & 0 \leq x \leq 0.7, \\ x(\pi - x), & 0.7 < x \leq 1.5, \\ x(\pi - x) + 0.5, & 1.5 < x \leq \pi. \end{cases} \quad (5)$$

Для потенциала (5) функция  $|p_N(x)|$  имеет вид, указанный на рис. 3.

А для потенциала

$$q(x) = \begin{cases} x(\pi - x) + 1, & 0 \leq x \leq 0.65, \\ x(\pi - x), & 0.65 < x \leq 1.5, \\ x(\pi - x) + 2, & 1.5 < x \leq 2.3, \\ x(\pi - x) + 3, & 2.3 < x \leq \pi. \end{cases} \quad (6)$$

функция  $|p_N(x)|$  представлена на рис. 4.

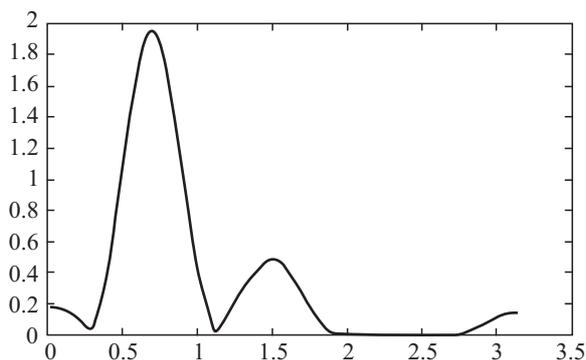


Рис. 3. График функции  $|p_N(x)|$  при  $N = 26$  в случае потенциала (5)

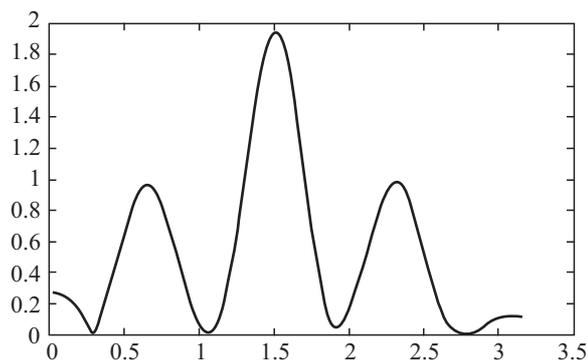


Рис. 4. График функции  $|p_N(x)|$  при  $N = 27$  в случае потенциала (6)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе впервые был представлен теоретически обоснованный метод отыскания параметров разрыва искомого потенциала по спектральным характеристикам, а также приведен численный алгоритм отыскания этих параметров. Полученные сведения дают возможность применения обобщенной итерационной схемы Ранделла – Сакса и других алгоритмов для получения более точного численного решения обратной спектральной задачи на отрезке в случае оператора Штурма – Лиувилля с потенциалом, имеющим конечное число точек разрыва первого рода.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-31042).*

## Библиографический список

1. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984. 240 с.
2. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 331 с.
3. Ignatiev M. Yu., Yurko V. A. Numerical methods for solving inverse Sturm – Liouville problems // Results in Math. 2008. Vol. 52. P. 63–74. DOI: 10.1007/s00025-007-0276-y.
4. Rafler M., Böckmann C. Reconstruction method for inverse Sturm – Liouville problems with discontinuous potentials // Inverse Problems. 2007. Vol. 23, № 3. P. 933–946. DOI: 10.1088/0266-5611/23/3/006.



5. Rundell W., Sacks P. E. Reconstruction techniques for classical inverse Sturm – Liouville problems // *Mathematics of Computation*. 1992. Vol. 58, № 197. P. 161–183. DOI: 10.1090/S0025-5718-1992-1106979-0.
6. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm – Liouville Problems and Their Applications*. Huntington ; N.Y. : NOVA Science Publ., 2001. 305 p.
7. Oppenheimer A. B., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. М. : Связь, 1979. 416 с.
8. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // *Изв. РАН. Сер. математическая*. 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108. DOI: 10.4213/im295

## Numerical Solution of Inverse Spectral Problems for Sturm – Liouville Operators with Discontinuous Potentials

L. S. Efremova

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, liubov.efremova@gmail.com

We consider Sturm – Liouville differential operator with potential having a finite number of simple discontinuities. This paper is devoted to the numerical solution of such inverse spectral problems. The main result of this work is a procedure that is able to recover both the points of discontinuities as well as the heights of the jumps. Following, using these results, we may apply a suitable numerical method (for example, the generalized Rundell – Sacks algorithm with a special form of the reference potential) to reconstruct the potential more precisely.

*Key words:* Sturm – Liouville differential operator, inverse spectral problem, discontinuous potential, numerical solution.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-01-31042).*

### References

1. Levitan B. M. *Inverse Sturm – Liouville Problems*. Utrecht, VNU Sci. Press, 1987, 240 p.
2. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville operators and applications*. Basel, Birkhäuser, 1986. 367 p.
3. Ignatiev M. Yu., Yurko V. A. Numerical methods for solving inverse Sturm – Liouville problems. *Results in Math.*, 2008, vol. 52, pp. 63–74. DOI: 10.1007/s00025-007-0276-y.
4. Rafter M., Böckmann C. Reconstruction method for inverse Sturm – Liouville problems with discontinuous potentials. *Inverse Problems*, 2007, vol. 23, no. 3, pp. 933–946. DOI: 10.1088/0266-5611/23/3/006.
5. Rundell W., Sacks P. E. Reconstruction techniques for classical inverse Sturm – Liouville problems. *Mathematics of Computation*, 1992, vol. 58, no. 197, pp. 161–183. DOI: 10.1090/S0025-5718-1992-1106979-0.
6. Freiling G., Yurko V. A. *Inverse Sturm – Liouville Problems and Their Applications*. Huntington, New York, NOVA Science Publ., 2001, 305 p.
7. Oppenheim A. V., Schafer R. W. *Discrete-time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1975, 585 p.
8. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Asymptotics of any order for the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville boundary-value problem on a segment with a summable potential. *Izvestiya : Mathematics*, 2000, vol. 64, iss. 4, pp. 695–754. DOI: <http://dx.doi.org/10.4213/im295>.

УДК 517.51

## ОБ ОПЕРАТОРЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА КОМПАКТНЫХ НУЛЬ-МЕРНЫХ ГРУППАХ

Ю. С. Крусс

Аспирант кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KrussUS@gmail.com

Для одномерного случая указаны условия, при которых оператор дифференцирования не зависит от ортонормированной системы, с помощью которой определен. Для многомерного случая указаны условия, при которых оператор дифференцирования не зависит от способа преобразования многомерной компактной нуль-мерной группы в одномерную. Получен явный вид аннуляторов в многомерной компактной нуль-мерной группе.

*Ключевые слова:* нуль-мерные группы, псевдодифференциальный оператор, сильная  $\mathbf{P}$ -ичная производная, сильный  $\mathbf{P}$ -ичный интеграл.