4. Dudov S. I., Osipcev M. A. On an Approach to Approximate Solving of the Problem for the Best Approximation for Compact Body by a Ball of Fixed Radius. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 267–272.
5. Karmanov V. G. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical programming]. Moscow, Nauka, 2000 (in Russian).
6. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Methods of Optimization]. Moscow, MCSMO, 2011 (in Russian).
7. Izmailov A. F. *Chuvstvitel'nost' v optimizatsii* [Sensitivity optimization]. Moscow, Fizmatlit, 2006 (in Russian).
8. Pschenichnyi B. N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex Analysis and Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980 (in Russian)
9. Dem'yanov V. F., Vasil'ev L. V. *Nondifferetiable optimization*, Optimization software, Inc., Publications Division, New York, 1985.

УДК 517.5

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ШАГОВ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

Ю. С. Крусс

Крусс Юлия Сергеевна, аспирант кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KrussUS@gmail.com

В данной работе исследуется вопрос точности оценки числа шагов алгоритма построения ортогональной масштабирующей функции, порождающей кратномасштабный анализ на локальных полях положительной характеристики. Полученная в результате такого построения масштабирующая функция является ступенчатой и имеет ограниченный носитель. Число шагов в алгоритме связано непосредственно с носителем преобразования Фурье масштабирующей функции и поэтому представляет собой не только вычислительный интерес. Для числа шагов алгоритма известна верхняя оценка. В настоящей работе установлено точное число шагов алгоритма, которое оказалось равным верхней оценке.

Ключевые слова: локальные поля положительной характеристики, масштабирующая функция, кратномасштабный анализ.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-279-287

ВВЕДЕНИЕ

Понятие кратномасштабного анализа (КМА) на локальных полях было введено китайскими математиками H. Jiang, D. Li и N. Jin в работе [1]. Для локальных полей $F^{(s)}$ положительной характеристики p они доказали некоторые свойства и получили алгоритм построения вейвлетов по заданной масштабирующей функции. Используя полученные результаты, они построили КМА хааровского типа и соответствующие хааровские вейвлеты.

Вопросы построения ортогонального КМА на поле $F^{(1)}$ подробно изучены в работах [2–7]. В работе [8] даны необходимое и достаточные условия для вейвлет-фреймов на локальных полях. B. Behera и Q. Jahan [9] построили вейвлет-пакеты на локальных полях положительной характеристики. В работе [10] получены необходимые и достаточные условия того, чтобы функция $\varphi \in L^2(F^{(s)})$ порождала КМА. Эти условия имеют вид

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} |\hat{\varphi}(\xi + u(k))|^2 = 1 \tag{1}$$

для п.в. ξ в единичном шаре $\mathscr{D}$,

$$\lim_{j\to\infty} |\hat{\varphi}(\mathfrak{p}^j\xi)| = 1 \text{ для п.в. } \xi \in F^{(s)}, \tag{2}$$

и существует интегрально-периодическая функция $m_0 \in L^2(\mathscr{D})$ такая, что

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\mathfrak{p}\xi)\hat{\varphi}(\mathfrak{p}\xi) \quad \text{для} \quad \text{п.в.} \quad \xi \in F^{(s)}, \tag{3}$$

где $\{u(k)\}$ — множество сдвигов, $\mathfrak{p}$ — prime element.

В работе [11] B. Behera и Q. Jahan доказали, что если сдвиги масштабирующих функций двух КМА биортогональны, то соответствующие семейства вейвлетов также будут биортогональными. Таким образом, для построения КМА на локальном поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p нам необходимо построить интегрально-периодическую маску m_0, удовлетворяющую условиям (1)–(3). Для решения этой задачи в работах [1, 8–11] был использован метод, разработанный в [12] и включающий в себя понятие «prime element». Следует отметить, что в этих работах были получены только хааровские вейвлеты.

В работе [13] разработан другой метод построения интегрально-периодической маски и соответствующей масштабирующей функции, порождающей нехааровский ортогональный КМА. Однако в [13] рассмотрен простейший случай, когда маска m_0 является элементарной, т. е. она постоянна на смежных классах по подгруппе $(F_{-1}^{(s)+})^{\perp}$ и $|m_0(\xi)|$ принимает только два значения 0 и 1.

Избавиться от указанных ограничений на значения маски удалось в работе [14], где изложен алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции φ, порождающей кратномасштабный анализ на локальных полях $F^{(s)}$ положительной характеристики p, с единственным условием φ — ступенчатая функция с ограниченным носителем. Данный алгоритм использует методы теории графов и сводится к построению последовательности N-мерных массивов $A^{(n)}$. При этом условие ортогональности функции φ сводится к условию $A^{(M)} = J$, где J — N-мерный массив единиц, а M — некоторое натуральное число (номер массива), для которого получена верхняя оценка. Иначе говоря, в работе [14] получена верхняя оценка для числа шагов алгоритма, т. е. установлено, что при определенном значении M массив $A^{(M)}$ обязательно будет равняться J. Однако остался открытым вопрос: может ли массив единиц получиться на более раннем шаге? В данной работе устанавливается точное значение M. Следует отметить, что M отвечает не только за число шагов в алгоритме, но и непосредственно связано с носителем преобразования Фурье масштабирующей функции, а именно $\mathrm{supp}(\hat{\varphi}) \subset F_M^{(s)\perp}$.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Поле представляет собой алгебраическую структуру, для элементов которой определены операции сложения и умножения, удовлетворяющие аксиомам поля. Поле K называется конечным, если состоит из конечного числа элементов. Известно [15], что число элементов в конечном поле K равно p^s, при некотором простом p и $s \in \mathbb{N}$. В случае $s = 1$ конечное поле представляет собой поле классов вычетов по модулю p: $GF(p) = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Операция сложения в $GF(p)$ определяется равенством $a \dot{+} b = (a+b)\ mod\ p$, т. е. остаток от деления $a+b$ на p, операция умножения – равенством $ab = \underbrace{a \dot{+} a \dot{+} \dots \dot{+} a}_{b \text{ раз}}$.

При $s > 1$ существует неприводимый над полем $GF(p)$ многочлен $p_s(x)$ степени s. Конечное поле $GF(p^s)$ состоит из векторов длины s: $\{\mathbf{a} = (a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(s-1)}),\ a^{(j)} \in GF(p)\}$. Операция сложения в поле $GF(p^s)$ определяется как покоординатное сложение по модулю p, т. е. $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} = (a^{(j)} \dot{+} b^{(j)})_{j=0}^{s-1} = \big((a^{(j)} + b^{(j)}) \bmod p\big)_{j=0}^{s-1}$. Для определения операции умножения представим элементы поля $GF(p^s)$ в виде формальных многочленов, т. е. $\mathbf{a} = a^{(0)} + a^{(1)}x + a^{(2)}x^2 + \dots + a^{(s-1)}x^{s-1}$ и $\mathbf{b} = b^{(0)} + b^{(1)}x + b^{(2)}x^2 + \dots + b^{(s-1)}x^{s-1}$. Чтобы получить $\mathbf{ab}$ необходимо умножить элементы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ как многочлены над полем $GF(p)$. В результате получится многочлен

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{s-1} a_j b_k x^{j+k} = \sum_{l=0}^{2s-2} x^l \sum_{k,j:\ k+j=l} a_j b_k,$$

в котором коэффициенты $c_l = \sum\limits_{k,j:\ k+j=l} a_j b_k$ вычисляются по операциям в поле $GF(p)$. После этого многочлен $Q(x)$ делим с остатком на неприводимый многочлен $p_s(x)$. Коэффициенты полученного остатка $H(x)$ и есть результат произведения $\mathbf{ab}$.

Локальным полем K называется локально компактное, вполне несвязное, недискретное, полное топологическое пространство, в котором определены непрерывные операции «$\dot{+}$», «$\cdot$» — сложения и умножения и при этом выполнены аксиомы поля. Известно, что локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно множеству формальных степенных рядов [16, гл. 2, §1; 17]:

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{a}_i t^i, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbf{a}_i \in GF(p^s).$$

Операции сложения и умножения определяются как сумма и произведение таких рядов, т. е. если

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{a}_i t^i, \qquad b = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{b}_i t^i,$$

то

$$a \dot{+} b = \sum_{i=k}^{\infty} (\mathbf{a}_i \dot{+} \mathbf{b}_i) t^i,$$
$$ab = \sum_{l=2k}^{\infty} t^l \sum_{i,j:i+j=l} (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j), \tag{4}$$

где $\mathbf{a}_i \dot{+} \mathbf{b}_i$ и $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j$ вычисляются по операциям в поле $GF(p^s)$.

Также мы можем рассматривать элементы локального поля $F^{(s)}$ положительной характеристики p как бесконечные в обе стороны последовательности, где лишь конечное число членов с отрицательными номерами имеет ненулевое значение: $a = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots)$, $\mathbf{a}_i \in GF(p^s)$. Топология в $F^{(s)}$ задается базой окрестностей нуля:

$$F_n^{(s)} = \{a = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots) : \mathbf{a}_j \in GF(p^s)\}.$$

Определим норму равенством:

$$\|a\| = \|(\dots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots)\| = \left(\frac{1}{p^s}\right)^n, \quad \text{если} \quad \mathbf{a}_n \neq \mathbf{0},$$

тогда

$$F_n^{(s)} = \left\{a \in F^{(s)} : \|a\| \leqslant \left(\frac{1}{p^s}\right)^n\right\}.$$

Рассмотрим аддитивную группу $F^{(s)+}$ поля $F^{(s)}$. Окрестности $F_n^{(s)}$ являются компактными подгруппами группы $F^{(s)+}$, обозначим их через $F_n^{(s)+}$. Они обладают следующими свойствами:

1) $\dots \subset F_1^{(s)+} \subset F_0^{(s)+} \subset F_{-1}^{(s)+} \dots$

2) $F_n^{(s)+}/F_{n+1}^{(s)+} \cong GF(p^s)^+$ и $\sharp(F_n^{(s)+}/F_{n+1}^{(s)+}) = p^s$.

Отсюда сразу следует, что при $s = 1$ $F^{(1)+}$ есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. Верно и обратное: во всякой группе Виленкина $(\mathfrak{G}, \dot{+})$ с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$ можно ввести операцию умножения равенством (4). С такой операцией умножения $(\mathfrak{G}, \dot{+}, \cdot)$ становится полем, изоморфным $F^{(1)}$, единичный элемент имеет вид $e = (\dots, 0, 0_{-1}, 1_0, 0_1, \dots)$.

В [17] отмечено, что поле $F^{(s)}$ можно рассматривать как линейное пространство над конечным полем $GF(p^s)$. При этом произведение элемента $a \in F^{(s)}$ на элемент $\overline{\lambda} \in GF(p^s)$ определяется покоординатно, т. е. $\overline{\lambda} a = (\dots \mathbf{0}_{n-1}, \overline{\lambda}\mathbf{a}_n, \overline{\lambda}\mathbf{a}_{n+1}, \dots)$, а модуль элемента $\overline{\lambda} \in GF(p^s)$ — равенством:

$$|\overline{\lambda}| = \begin{cases} 1, & \overline{\lambda} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \overline{\lambda} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Там же доказано, что система элементов $g_k \in F_k^{(s)} \setminus F_{k+1}^{(s)}$ есть базис в $F^{(s)}$, т. е. любой элемент $a \in F^{(s)}$ можно представить в виде

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\lambda}_k g_k, \overline{\lambda}_k \in GF(p^s).$$

В дальнейшем будем считать, что $g_k = (\ldots, \mathbf{0}_{k-1}, (1^{(0)}, 0^{(1)}, \ldots, 0^{(s-1)})_k, \mathbf{0}_{k+1}, \ldots)$. В этом случае $\overline{\lambda}_k = \mathbf{a}_k$.

Определим множества

$$H_0^{(s)} = \{h \in F^{(s)} : h = \mathbf{a}_{-1}g_{-1}\dot{+}\mathbf{a}_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}\mathbf{a}_{-s}g_{-s}\}, \qquad s \in \mathbb{N},$$
$$H_0 = \{h \in F^{(s)} :\ h = \mathbf{a}_{-1}g_{-1}\dot{+}\mathbf{a}_{-2}g_{-2}\dot{+}\ldots\dot{+}\mathbf{a}_{-s}g_{-s},\ s \in \mathbb{N}\}.$$

Множество H_0 есть множество сдвигов в $F^{(s)}$, H_0 — аналог множества целых неотрицательных чисел.

Обозначим через X совокупность всех характеров $F^{(s)+}$. Множество X образует коммутативную группу с операцией произведения характеров: $(\chi*\phi)(a) = \chi(a)\cdot\phi(a)$. Обратный элемент определяется как $\chi^{-1}(a) = \overline{\chi(a)}$, а единичным элементом является характер $e(a) \equiv 1$.

Следуя [17], определим характеры r_n группы $F^{(s)+}$ следующим образом. Пусть $x = (\ldots, \mathbf{0}_{k-1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots)$, $\mathbf{x}_j = (x_j^{(0)}, x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(s-1)}) \in GF(p^s)$. Элемент $\mathbf{x}_j$ можно записать в виде $\mathbf{x}_j = (x_{js+0}, x_{js+1}, \ldots, x_{js+(s-1)})$. В этом случае

$$x = (\ldots, 0, \ldots, 0, x_{ks+0}, x_{ks+1}, \ldots, x_{ks+s-1}, x_{(k+1)s+0}, x_{(k+1)s+1}, \ldots, x_{(k+1)s+s-1}, \ldots),$$

и совокупность всех таких последовательностей x есть группа Виленкина. Поэтому равенство $r_n(x) = r_{ks+l}(x) = e^{\frac{2\pi i}{p}(x_{ks+l})}$ определяет функции Радемахера в $F^{(s)+}$ и каждый характер $\chi \in X$ представим в виде

$$\chi = \prod_{n\in\mathbb{Z}} r_n^{a_n}, \qquad a_n = \overline{0, p-1}. \tag{5}$$

Равенство (5) перепишем в виде

$$\chi = \prod_{k\in\mathbb{Z}} r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \ldots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}} \tag{6}$$

и обозначим

$$r_{ks+0}^{a_k^{(0)}} r_{ks+1}^{a_k^{(1)}} \ldots r_{ks+s-1}^{a_k^{(s-1)}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k},$$

где $\mathbf{a}_k = (a_k^{(0)}, a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(s-1)}) \in GF(p^s)$. Тогда (6) примет вид

$$\chi = \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k}.$$

Функции $\mathbf{r}_k^{(1,0,\ldots,0)} = \mathbf{r}_k$ будем называть функциями Радемахера. По определению положим

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k})^{\mathbf{b}_k} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k\mathbf{b}_k}, \qquad \chi^{\mathbf{b}} = (\prod \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k})^{\mathbf{b}} = \prod \mathbf{r}_k^{\mathbf{a}_k\mathbf{b}}, \qquad \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k, \mathbf{b} \in GF(p^s).$$

Из определения функций Радемахера следует, что при $\mathbf{x} = ((x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \ldots x_k^{(s-1)}))_{k\in\mathbb{Z}}$ и $\mathbf{u} = (u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(s-1)}) \in GF(p^s)$

$$(\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}}, \mathbf{x}) = \prod_{l=0}^{s-1} e^{\frac{2\pi i}{p}u^{(l)}x_k^{(l)}}.$$

В [17] установлены следующие свойства характеров:

1) $\mathbf{r}_k^{\mathbf{u}\dot{+}\mathbf{v}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{u}}\mathbf{r}_k^{\mathbf{v}}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in GF(p^s)$;

2) $(\mathbf{r}_k^{\mathbf{v}}, \mathbf{u}g_j) = 1$, $\forall\ k \neq j$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in GF(p^s)$;

3) множество характеров поля $F^{(s)}$ есть линейное пространство $(X,\ *,\ \cdot^{GF(p^s)})$ над конечным полем $GF(p^s)$ с произведением в качестве внутренней операции и возведением в степень $\mathbf{u} \in GF(p^s)$ в качестве внешней операции;

4) последовательность функций Радемахера $(\mathbf{r}_k)$ образует базис пространства $(X,\ *,\ \cdot^{GF(p^s)})$.

Оператор растяжения $\mathscr{A}$ в локальном поле $F^{(s)}$ определяется равенством $\mathscr{A}x := \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n g_{n-1}$, где $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{a}_n g_n \in F^{(s)}$, в группе характеров — равенством $(\chi\mathscr{A}, x) = (\chi, \mathscr{A}x)$.

2. МАСШТАБИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ И КМА

Если функция φ порождает КМА на локальном поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p, то она является решением масштабирующего уравнения [1, 9, 10]:

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0} \beta_h \varphi(\mathscr{A} x \dot{-} h), \qquad \sum_{h \in H_0} |\beta_h|^2 < \infty. \tag{7}$$

Обозначим через $\mathfrak{D}_M(F^{(s)}_{-N})$ $(M, N \in \mathbb{N})$ множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F^{(s)}_M$, с носителем $\operatorname{supp}(\varphi) \subset F^{(s)}_{-N}$. Аналогично, $\mathfrak{D}_{-N}(F^{(s)\perp}_M)$ есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F^{(s)\perp}_{-N}$ с носителем $\operatorname{supp}(\varphi) \subset F^{(s)\perp}_M$, где $F^{(s)\perp}_{-N}$, $F^{(s)\perp}_M$ – аннуляторы подгрупп $F^{(s)+}_{-N}$, $F^{(s)+}_M$ соответственно. В [13] установлено, что если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_M(F^{(s)}_{-N})$ порождает ортогональный КМА, то в уравнении (7) содержится лишь конечное число слагаемых, т. е. φ является решением уравнения

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \varphi(\mathscr{A} x \dot{-} h),$$

которое можно записать в частотном виде:

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi) \hat{\varphi}(\chi \mathscr{A}^{-1}), \tag{8}$$

где

$$m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi \mathscr{A}^{-1}, h)}$$

маска уравнения (8).

Также в [13] $\forall$ $N, M \in \mathbb{N}$ установлено, что $\varphi \in \mathfrak{D}_M(F^{(s)}_{-N})$ тогда и только тогда, когда $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(F^{(s)\perp}_M)$. Для функций $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(F^{(s)\perp}_M)$ условие (3) и критерий ортогональности (1) записаны в терминах функций Радемахера и имеют следующей вид [17]:

1) если $\hat{\varphi}(\chi)$ есть решение масштабирующего уравнения (8) и система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ есть ортонормированная система, то φ порождает ортогональный КМА;

2) система сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ будет ортонормированной системой тогда и только тогда, когда для любых $\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \ldots, \mathbf{a}_{-1} \in GF(p^s)$

$$\sum_{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{M-1} \in GF(p^s)} |\hat{\varphi}(F^{(s)\perp}_{-N} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \ldots \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0} \ldots \mathbf{r}_{M-1}^{\mathbf{a}_{M-1}})|^2 = 1. \tag{9}$$

Таким образом, для построения ортогонального КМА нужно построить функцию $\hat{\varphi}(\chi) \in$ $\in \mathfrak{D}_{-N}(F^{(s)\perp}_M)$, которая является решением масштабирующего уравнения (8) и для которой выполнены условия (9).

3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Определение (см. [14]). Пусть $F^{(s)}$ — локальное поле положительной характеристики p, N — натуральное число. Под *N-валидным деревом* мы будем понимать дерево, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:

1) каждая вершина представляет собой элемент конечного поля $GF(p^s)$, т. е. имеет вид: $\mathbf{a}_i = (a_i^{(0)}, a_i^{(1)}, \ldots, a_i^{(s-1)})$, $a_i^{(j)} = \overline{0, p-1}$;

2) корень и все вершины вплоть до $(N-1)$-го уровня имеют значение, равное нулевому элементу поля $GF(p^s)$: $\mathbf{0} = (0^{(0)}, 0^{(1)}, \ldots, 0^{(s-1)})$;

3) любой путь $(\mathbf{a}_k \to \mathbf{a}_{k+1} \to \cdots \to \mathbf{a}_{k+N-1})$ длины $N-1$ присутствует в дереве ровно один раз.

В [14] изложен алгоритм построения ортогональной масштабирующей функции по N-валидному дереву T и включает в себя следующие шаги.

1. Строим N-валидное дерево T. По дереву T строим новое дерево $\tilde{T}$ следующим образом: если в дереве T с вершины $\mathbf{a}_N$ начинался путь из N элементов в направлении к корню $\mathbf{a}_N \to \mathbf{a}_{N-1} \to \dots \to \mathbf{a}_1$, то в новом дереве $\tilde{T}$ образуем вершину, которая имеет значение, равное N-мерному вектору $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Таким образом, получим дерево $\tilde{T}$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) каждая вершина представляет собой N-мерный вектор элементов поля $GF(p^s)$: $\mathbf{A}_N = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ и встречается в дереве только один раз (следует из третьего свойства N-валидного дерева);

б) корнем дерева является вектор $\mathbf{O} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$;

в) смежные друг с другом вершины имеют вид: $(\mathbf{a}_{i_N}, \mathbf{a}_{i_{N-1}}, \dots, \mathbf{a}_{i_1}) \to (\mathbf{a}_{i_{N-1}}, \dots, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_0})$. Следует отметить, что не любые вершины, имеющие такой вид, будут смежными. Наличие или отсутствие дуги между такими вершинами определяется по первоначальному дереву T.

2. Теперь преобразуем дерево $\tilde{T}$ в граф Γ, добавив некоторое количество дуг между вершинами по следующему правилу: каждую вершину $\mathbf{A}_N = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ соединим с некоторыми вершинами более низкого уровня, имеющими вид $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$, т. е. с теми вершинами, первые $(N-1)$ координат которых совпадают с последними $(N-1)$ координатами вершины $\mathbf{A}_N$. Обозначим через $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$ множество вершин, смежных с вершиной $\mathbf{A}_N$. Таким образом, $\mathbf{a}_0 \in \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}$ тогда и только тогда, когда вершина $\mathbf{A}_N$ соединена дугой с вершиной $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$ в графе Γ.

3. Обозначим

$$\lambda_{\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0} = |m_0(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})|^2.$$

Значения маски определим таким образом, чтобы

$$\sum_{\tilde{\mathbf{a}}_0} \lambda_{\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{-1}, \tilde{\mathbf{a}}_0} = 1 \tag{10}$$

в тех случаях, когда вершина $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ в графе Γ соединена дугами с вершинами $(\mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_{N-2} \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$. И

$$\lambda_{\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{-1}, \mathbf{a}_0} = 0 \tag{11}$$

для всех $\mathbf{a}_0 \notin \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}$.

Определим $m_0(F_{-N}^{(s)\perp}) = 1$, тогда в силу наших обозначений $\lambda_{\mathbf{0},\mathbf{0},\dots,\mathbf{0}} = 1$.

Используя введенные обозначения, запишем условие (9) ортонормированности системы сдвигов $(\varphi(x \dot{-} h))_{h \in H_0}$ функции $\varphi(x)$ в виде: для любых $\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{-1} \in GF(p^s)$

$$\begin{gathered}1 = \sum_{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{M-1} \in GF(p^s)} |\hat{\varphi}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0} \dots \mathbf{r}_{M-1}^{\mathbf{a}_{M-1}})|^2 = \\ = \sum_{\mathbf{a}_0 \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{a}_{-N}, \mathbf{a}_{-N+1}, \dots, \mathbf{a}_0} \sum_{\mathbf{a}_1 \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{a}_{-N+1}, \mathbf{a}_{-N+2}, \dots, \mathbf{a}_1} \dots \\ \dots \sum_{\mathbf{a}_{M-2} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{a}_{M-N-2}, \mathbf{a}_{M-N-1}, \dots, \mathbf{a}_{M-2}} \sum_{\mathbf{a}_{M-1} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{a}_{M-N-1}, \mathbf{a}_{M-N}, \dots, \mathbf{a}_{M-1}} \times \\ \times \lambda_{\mathbf{a}_{M-N}, \mathbf{a}_{M-N+1}, \dots, \mathbf{a}_{M-1}, \mathbf{0}} \dots \lambda_{\mathbf{a}_{M-1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}.\end{gathered} \tag{12}$$

4. Построим последовательность N-мерных массивов $A^{(n)} = (a^{(n)}_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N})_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N \in GF(p^s)}$. Элементы $A^{(n)}$ задаются следующими рекурсивными соотношениями:

$$a^{(0)}_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N} = \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}} \lambda_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \mathbf{0}} \dots \lambda_{\mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}}, \tag{13}$$

$$a^{(n)}_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N} = \sum_{\mathbf{j} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}} a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_N, \mathbf{j}}. \tag{14}$$

Будем говорить, что элемент массива $a^{(j)}_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N}$ соответствует вершине $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N)$.

Благодаря введенным N-мерным массивам мы можем переформулировать условие ортонормированности (12) в следующем виде: система сдвигов функции $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ будет ортонормированной тогда и только тогда, когда для любых $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N$: $a^{(M)}_{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \dots, \mathbf{i}_N} = 1$, иными словами, когда массив $A^{(M)}$ состоит только из единиц.

Лемма 1 (см. [14]). *В массиве $A^{(0)}$ на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leqslant N$ в дереве $\tilde{T}$, стоят единицы.*

Лемма 2 (см. [14]). *Пусть по N-валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах* (10), (11). *Пусть $(A^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ — последовательность массивов, определяемая равенствами* (13) *и* (14). *Тогда в массиве $A^{(n)}$ элементы, соответствующие вершинам уровня $l \leqslant N+n$ в дереве $\tilde{T}$, равны единице.*

Теорема 1 (см. [14]). *Пусть по N-валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах* (10), (11). *Пусть $\tilde{H} = height(\tilde{T})$. Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathscr{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, причем M не превышает $\tilde{H} - N$.

4. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ШАГОВ АЛГОРИТМА

Теорема 2. *В теореме 1 $M = \tilde{H} - N$.*

Доказательство. В теореме 1 установлено, что M не превышает $\tilde{H} - N$. Покажем, что случай $M < \tilde{H} - N$ невозможен. Иными словами, требуется доказать, что в массивах $A^{(n)}$ единицы стоят только на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leqslant N+n$ в дереве $\tilde{T}$, и нигде больше.

Докажем по индукции.

1. *База индукции*. Рассмотрим массив $A^{(0)}$. В лемме 1 доказано, что в данном массиве на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leqslant N$ в дереве $\tilde{T}$, стоят единицы. Докажем, что других единиц в $A^{(0)}$ нет. Для этого рассмотрим элемент массива $A^{(0)}$, соответствующий вершине $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_N)$, уровня $l > N$. Согласно (13) такой элемент имеет вид: $a^{(0)}_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N} = \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{0}} \lambda_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{0},\mathbf{0}} \cdots \ \lambda_{\mathbf{i}_N,\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}}$. Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что $a^{(0)}_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N} = 1$, следовательно, так как все $\lambda_{\mathbf{j}_1,\mathbf{j}_2,\ldots,\mathbf{j}_N,\mathbf{j}_{N+1}} \in [0,1]$, единице равняется каждый из сомножителей. Так как $\lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{0}} = 1$, это означает, что наша вершина соединена дугой с вершиной $(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \ldots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0})$. Так как $\lambda_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{0},\mathbf{0}} = 1$, следовательно, вершина $(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \ldots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0})$ соединена дугой с вершиной $(\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \ldots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Продолжая наши рассуждения, получим путь $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_N) \to (\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \ldots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}) \to (\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \ldots, \mathbf{i}_N, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \to \cdots \to (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$, где $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$ — корень дерева, а количество вершин в пути не более чем $N+1$. Таким образом, вершина $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_N)$ является вершиной уровня $l \leqslant N$, что противоречит условию $l > N$.

2. *Предположение индукции*. Предположим, что в массиве $A^{(n-1)}$ единицы стоят только на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leqslant N+n-1$, и нигде больше.

3. *Шаг индукции*. Докажем, что в массиве $A^{(n)}$ единицы стоят только на местах, соответствующих вершинам уровня $l \leqslant N+n$, и нигде больше. Согласно (14) элементы $A^{(n)}$ имеют вид

$$a^{(n)}_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N} = \sum_{\mathbf{j} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}.$$

Рассмотрим элемент $A^{(n)}$, соответствующий вершине $\mathbf{A} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_N)$ уровня $l > N+n$. Предположим, что он равняется единице, т. е. $\sum\limits_{\mathbf{j} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} = 1$. Среди $a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}$ могут быть единицы, а могут быть числа из $[0,1)$. Разобьем сумму на две части:

$$\sum_{\mathbf{j} \in GF(p^s)} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{j}:\ a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}=1} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} + \\ + \sum_{\mathbf{j}:\ a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} \neq 1} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} = 1, \quad (15)$$

где $\lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}$, ($\mathbf{j}:\ a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} = 1$) — это связи вершины $\mathbf{A}$ с вершинами уровня $l \leqslant N+n-1$. Следует отметить, что изначально вершина $\mathbf{A}$ не была связана с вершинами этих уровней. Дополнительная связь могла появиться только при построении графа Г. Поэтому возможно, что все такие $\lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} = 0$. Значения $\lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}$ ($\mathbf{j}:\ a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} \neq 1$) — это связи вершины $\mathbf{A}$ с вершинами более низкого уровня, кроме уже рассмотренных вершин уровня $l \leqslant N+n-1$. Следует отметить, что хотя бы одно из $\lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}$ отлично от нуля, так как иначе окажется, что $\mathbf{A}$ — изолированная вершина.

В силу условий (10), (11) справедливо равенство

$$\sum_{\mathbf{j}:a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}=1} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} = 1 - \sum_{\mathbf{j}:a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}\neq 1} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}.$$

Поэтому равенство (15) можно преобразовать к следующему виду:

$$1 - \sum_{\mathbf{j}:a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}\neq 1} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} + \sum_{\mathbf{j}:a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}\neq 1} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} a^{(-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} = 1,$$

$$\sum_{\mathbf{j}:a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}\neq 1} \lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} (1 - a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}}) = 0.$$

Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, когда каждое из слагаемых равно нулю. Поскольку $a^{(n-1)}_{\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} \neq 1$, следовательно, $\lambda_{\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_N,\mathbf{j}} = 0$, что невозможно, так как хотя бы одно из них должно быть отлично от нуля. Получили противоречие. □

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К).

Библиографический список

1. *Jiang H., Li D., Jin N.* Multiresolution analysis on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 294. P. 523–532.
2. *Протасов В. Ю., Фарков Ю. А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. 2006. Т. 197, вып. 10. С. 129—160. DOI: 10.4213/sm1126.
3. *Протасов В. Ю.* Аппроксимация диадическими всплесками // Матем. сб. 2007. Т. 198, вып. 11. С. 135–152. DOI: 10.4213/sm1981.
4. *Farkov Yu. A.* Multiresolution Analysis and Wavelets on Vilenkin Groups // Facta universitatis, Ser. Elec. Energ. 2008. Vol. 21, № 3. P. 309–325.
5. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 193–220. DOI: 10.4213/im644.
6. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. 2007. Т. 82, вып. 6. С. 934–952. DOI: 10.4213/mzm4181.
7. *Lukomskii S. F.* Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, № 1. P. 42–65.
8. *Li D., Jiang H.* The necessary condition and sufficient conditions for wavelet frame on local fields // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 345. P. 500–510.
9. *Behera B., Jahan Q.* Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2012. Vol. 395. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.02.066.
10. *Behera B., Jahan Q.* Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions // Adv. Pure. Appl. Math. 2012. Vol. 3. P. 181–202. DOI: 10.1515/apam-2011-0016.
11. *Behera B., Jahan Q.* Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic // Comm. in Math. Anal. 2013. Vol. 15, № 2. P. 52–75.
12. *Taibleson M. H.* Fourier Analysis on Local Fields. Princeton : Princeton Univ. Press, 1975.
13. *Lukomskii S. F., Vodolazov A. M.* Non-Haar MRA on local Fields of positive characteristic. Preprint. 2014. URL: http://arxiv.org/abs/1407.4069 (Accessed 15.07.2014).
14. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. Preprint. 2015. URL: http://arxiv.org/abs/1503.08600 (Accessed 30.03.2015).
15. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля : в 2 т. М. : Мир, 1988.
16. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.* Теория представлений и автоморфные функции. М. : Наука, 1966. 512 с.
17. *Водолазов А. М., Лукомский С. Ф.* КМА на локальных полях положительной характеристики // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 511–518.

On Accuracy of Estimation of the Number of Steps for the Algorithm for Construction of Scaling Function on Local Fields

Iu. S. Kruss

Kruss Iuliia Sergeevna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KrussUS@gmail.com

In this paper we discuss a problem of accuracy of estimation of the number of steps for the algorithm for construction of orthogonal scaling function which generates multiresolution analisys on local fields of positive characteristic. The resulting function is a step function with a compact support. The number of steps in the algorithm is closely related to the support of the Fourier transformation of the scaling function. Thus the estimate for number of steps is not only of computational interest. The upper estimate for this number was already known. In this work the accurate number of steps is found. It appeares to be equal to the previously known upper estimate.

Key words: local fields of positive characteristic, scaling function, multiresolution analysis.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (projects no. 1.1520.2014/K).

References

1. Jiang H., Li D., Jin N. Multiresolution analysis on local fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, vol. 294, pp. 523–532.
2. Protasov V. Yu., Farkov Y. A. Dyadic wavelets and refinable functions on a halfline. *Mat. Sb.*, 2006, vol. 197, iss. 10, pp. 1529–1558. DOI: 10.4213/sm1126.
3. Protasov V. Yu. Approximation by dyadic wavelets. *Mat. Sb.*, 2007, vol. 198, iss. 11, pp. 1665–1681. DOI: 10.4213/sm1981.
4. Farkov Yu. A. Multiresolution Analysis and Wavelets on Vilenkin Groups. *Facta universitatis, Ser. Elec. Energ.*, 2008, vol. 21, no. 3, pp. 309–325.
5. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets with compact support on locally compact abelian groups. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 2005, vol. 69, iss. 3, pp. 623–650. DOI: 10.4213/im644.
6. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Mat. Zametki.*, 2007, vol. 82, iss. 6, pp. 843–859. DOI: 10.4213/mzm4181.
7. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 42–65.
8. Li D., Jiang H. The necessary condition and sufficient conditions for wavelet frame on local fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 345, pp. 500–510.
9. Behera B., Jahan Q. Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 395, pp. 1–14. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.02.066.
10. Behera B., Jahan Q. Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions. *Adv. Pure. Appl. Math.*, 2012, vol. 3, pp. 181–202. DOI: 10.1515/apam-2011-0016.
11. Behera B., Jahan Q. Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic. *Comm. in Math. Anal.*, 2013, vol. 15, no. 2, pp. 52–75.
12. Taibleson M. H. *Fourier Analysis on Local Fields.* Princeton, Princeton Univ. Press, 1975.
13. Lukomskii S. F., Vodolazov A. M. *Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic*. Preprint. 2014. Available at: http://arxiv.org/abs/1407.4069. (Accessed 15, July, 2014).
14. Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S. *On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic*. Preprint. 2015. Available at: http://arxiv.org/abs/1503.08600. (Accessed 30, March, 2015).
15. Lidl R., Niederreiter H. *Finite Fields.* Encyclopedia Math. Appl., vol. 20, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1983, 755 p.
16. Gelfand I. M., Graev M. I., Piatetski-Shapiro I. I. *Theory of authomorphic functions*. W.B.Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1969, 426 p. (Rus. ed. : Gelfand I. M., Graev M. I., Piatetski-Shapiro I. I. Teorija predstavlenij i avtomorfnye funkcii. Moscow, Nauka, 1966, 512 p.)
17. Vodolasov A. M., Lukomskii S. F. MRA on Local Fields of Positive Characteristic. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 2, pp. 511–518 (in Russian).