УДК 514.17

# О РАЗРЕШИМОСТИ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МИНКОВСКОГО – АЛЕКСАНДРОВА

**В. А. Клячин**

Клячин Владимир Александрович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики, Волгоградский государственный университет, klchnv@mail.ru

В статье рассматривается многомерный дискретный аналог задачи Минковского в постановке А. Д. Александрова о существовании выпуклого многогранника с заданными кривизнами в его вершинах. Найдены условия разрешимости этой задачи в общей постановке, когда в вершинах многогранника задается значение меры кривизны, определяемой произвольной непрерывной функцией, заданной на сфере $F : \mathbb{S}^{n-1} \to (0, +\infty)$. В основе решения задачи лежит разрешимость вопроса о том, можно ли каждой триангуляции конечного множества точек $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ единичной сферы сопоставить выпуклый многогранник, у которого нормали к граням принадлежат множеству $P$.

*Ключевые слова:* выпуклый многогранник, триангуляция, сферический симплекс.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-281-288

## ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача Минковского ставится как задача о существовании выпуклой замкнутой поверхности с заданной гауссовой кривизной, являющейся функцией нормали к поверхности. Иными словами, пусть $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ — положительная функция на единичной сфере $\mathbb{S}^2$. Необходимо определить, существует ли замкнутая гладкая выпуклая поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$, гауссова кривизна $K$ которой в точке $x \in M$ удовлетворяет соотношению

$$K(x) = F(\xi(x)),$$

где $\xi(x)$ — вектор внешней нормали поверхности $M$ в соответствующей точке.

Условие разрешимости данной задачи в случае аналитической функции $F$ найдено Г. Минковским и имеет вид

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2} \frac{\xi}{F(\xi)} = 0.$$

Вопросы разрешимости аналогичных задач в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, а также с более слабыми условиями регулярности на функцию $F$ рассматривались в работах А. В. Погорелова [1], К. Йоргенса (Iörgens) [2], Е. Калаби (Calabi) [3], А. Д. Александрова [4], А. И. Бодренко [5].

В работе [6] А. Д. Александровым была поставлена задача о существовании выпуклого многогранника с заданными значениями $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$ кривизн всех его вершин. При этом было отмечено, что необходимыми условиями разрешимости задачи являются соотношения

$$0 < \omega_i < 2\pi, \qquad i = 1, ..., N, \qquad \sum_{i=1}^{N} \omega_i = 4\pi.$$

Достаточность этих условий для случая пространства $\mathbb{R}^3$ была доказана А. А. Зильбербергом (Zil'berberg) в [7]. Заметим, что поставленную задачу А. Д. Александровым можно считать дискретным аналогом проблемы Минковского.

В настоящей статье мы рассматриваем решение подобной задачи в $\mathbb{R}^n$, предлагая, в частности, несколько иной подход, нежели используемый в [7]. Для формулировки постановки задачи и результатов нам понадобится ввести некоторые понятия.

Пусть $\Delta \subset \mathbb{S}^{n-1}$ — некоторое замкнутое подмножество единичной сферы, лежащее в некоторой открытой полусфере. Множество $\Delta$ назовем сферически выпуклым, если оно вместе с любой парой своих точек содержит и кратчайшую дугу, соединяющую эти точки. Выпуклой оболочкой $\mathrm{conv}\,(A)$ множества $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$, лежащего в некоторой открытой полусфере, мы назовем наименьшее сферически выпуклое множество, содержащее $A$.

Пусть, как и ранее, $F : \mathbb{S}^{n-1} \to (0, +\infty)$ — положительная, непрерывная функция, заданная на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, и такая, что

$$F(-\xi) = F(\xi) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Для измеримого множества $\Delta \subset \mathbb{S}^{n-1}$ введем обозначение

$$\mu_F(\Delta) = \int\limits_{\Delta} F(\xi) d\xi.$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ некоторую выпуклую замкнутую многогранную поверхность $M$ и пусть $V = V(M)$ — совокупность ее вершин. Обозначим через $\xi_1, ..., \xi_m$ векторы внешних нормалей к граням этой поверхности, инцидентных с вершиной $v \in V$. Пусть

$$\Sigma(v) = \mathrm{conv}\left(\{\xi_1, ...\xi_m\}\right)$$

обозначает выпуклую оболочку множества концов этих нормалей в сферической геометрии. Учитывая выпуклость $M$, можно сделать вывод, что множество $\Sigma(v) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ лежит в некоторой открытой полусфере для всякой вершины $v$. Очевидно, что

$$\mathbb{S}^{n-1} = \cup_v \Sigma(v),$$

где объединение выполнено по всем вершинам многогранника $M$. Каждой вершине $v \in V(M)$ теперь можно сопоставить число

$$\sigma(v) = \mu_F(\Sigma(v)).$$

Заметим, что в силу четности функции $F(\xi)$ величина

$$\sigma_F = 2\mu_F(HS),$$

где $HS$ — полусфера сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, не зависит от выбора полусферы $HS$, и из выпуклости многогранника $M$ будем иметь

$$\sigma(v) \leqslant \sigma_F.$$

Пусть задан набор положительных чисел

$$\sigma_F/2 > \sigma_1, \quad ..., \quad \sigma_N > 0,$$

таких, что

$$\sigma_F \equiv \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i.$$

Требуется определить условия существования выпуклого многогранника, имеющего $N$ вершин $v_1, ..., v_N$, пронумерованных так, что

$$\sigma(v_i) = \sigma_i \quad \forall\ i = 1, ..., N.$$

## 1. ТРИАНГУЛЯЦИЯ СФЕРЫ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В дальнейшем нам понадобится определение понятия триангуляции Делоне конечного множества на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Сферическим $k$-мерным симплексом $S = S(\xi_0, ..., \xi_k)$ назовем выпуклую оболочку точек сферы $\xi_0, ..., \xi_k$, $0 \leqslant k < n$, лежащих в некоторой открытой полусфере. Рассмотрим некоторое конечное множество $P$ точек на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Триангуляцией $P$ назовем совокупность невырожденных симплексов $\{S_i\}$ такую, что

1) любые два симплекса не пересекаются по внутренним точкам;

2) объединение вершин всех симплексов совпадает с $P$.

Рассмотрим некоторый невырожденный $(n-1)$-мерный симплекс $S \subset \mathbb{S}^{n-1}$. Описанной сферой симплекса $S$ назовем $(n-2)$-мерную сферу, полученную пересечением сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ с гиперплоскостью, проходящей через вершины $S$. Через $B(S)$ обозначим тот сферический $(n-1)$-мерный шар в $\mathbb{S}^{n-1}$, который содержит $S$, а его граница является описанной сферой симплекса $S$. Триангуляцию $T$

конечного множества $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ назовем *триангуляцией Делоне*, если для любого ее симплекса $S \in T$ внутренность множества $B(S)$ не содержит точек из $P$.

Пусть $M$ — выпуклый замкнутый многогранник в $\mathbb{R}^n$, причем число граней инцидентных с каждой его вершиной равно $n$. В таком случае для каждой вершины $v \in V(M)$ множество $\Sigma(v)$ представляет собой симплекс. Рассмотрим множество $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ нормалей к граням $M$ и построим триангуляцию $P$ следующим образом:

$$T = \{\Sigma(v) : v \in V(M)\}.$$

Таким образом, каждому многограннику $M$ с $n$-гранными вершинами можно сопоставить триангуляцию $T = T(M)$, причем

$$\mathbb{S}^{n-1} = \cup_{S \in T} S. \tag{1}$$

**Теорема 1.** *Если в многогранник $M$ можно вписать сферу, то $T(M)$ — триангуляция Делоне.*

**Доказательство.** Не ограничивая общности, будем считать, что в $M$ вписана единичная сфера.

Проверим выполнение условия триангуляции Делоне. Выберем $S \in T(M)$ и предположим, что пересечение внутренности $B(S)$ с $P$ не пусто. Пусть $q \in P$ — внутренняя точка $B(S)$. Симплекс $S$ определяется некоторой вершиной $v \in V(M)$ многогранника $M$. Эта вершина есть точка пересечения гиперплоскостей, касательных к сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ в вершинах симплекса $S$, которые лежат на границе $B(S)$. Поэтому $v$ представляет собой вершину конуса построенного как огибающая семейства всех гиперплоскостей касательных к $\mathbb{S}^{n-1}$ в точках границы $\partial B(S)$. Но тогда гиперплоскость, касательная к сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ в точке $q$, отделяет $v$ от сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. В частности, такая гиперплоскость является гиперплоскостью некоторой грани $M$, разделяющей вершины на два подмножества. Это противоречит выпуклости многогранника. Теорема доказана. □

Зададимся вопросом: для каких триангуляций конечного множества точек $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$, обладающих свойством (1), найдется выпуклый многогранник $M$, для которого $T = T(M)$? В работе мы опишем два класса таких триангуляций.

Рассмотрим в пространстве некоторую $C^1$-гладкую замкнутую строго выпуклую поверхность $\Phi \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\eta : \mathbb{S}^{n-1} \to \Phi$ отображение, обратное к гауссовому (сферическому) отображению поверхности $\Phi$. Пусть $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ — конечное множество точек на сфере. Триангуляцию $T$ этого множества точек со свойством (1) мы будем называть $\Phi$-триангуляцией, если ее симплексы обладают следующим свойством. Рассмотрим симплекс $S \in T$ с вершинами $\xi_1, ..., \xi_n$ и точку $v$ пересечения гиперплоскостей, касательных к $\Phi$ в точках $\eta(\xi_1), ..., \eta(\xi_n)$. Через $\Phi(S)$ обозначим ту часть $\Phi$, в точках $x$ которой выполнено неравенство $\langle v - x, \xi \rangle \geqslant 0$, где $\xi$ — внешняя нормаль к поверхности $\Phi$. Другими словами, $B(S)$ — видимая из точки $v$ часть поверхности $\Phi$. Для $\Phi$ триангуляции мы требуем, чтобы внутренность $\Phi(S)$ не содержала бы точек $\eta(P)$. Это условие является специальным аналогом условия пустой сферы в классическом случае триангуляции Делоне.

**Теорема 2.** *Пусть $T$ — некоторая $\Phi$-триангуляция конечного множества точек $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$, для которой выполнено* (1). *Тогда в $\mathbb{R}^n$ найдется выпуклый многогранник $M$, для которого $T = T(M)$.*

**Доказательство.** Введем следующее обозначение:

$$H_0(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x - p, p \rangle \leqslant 0\}, \qquad p \neq 0.$$

Заметим, что $H_0(p)$ представляет собой полупространство, содержащее начало координат и определяемое плоскостью, проходящей через точку $p$ и ортогональной радиус-вектору этой точки. Построим многогранную область

$$\Omega_0 = \cap_{p \in P} H_0(p).$$

Ясно, что $\Omega_0$ — выпуклая область и ее граница представляет собой выпуклый многогранник $M_0$. Далее каждую гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x-p, p \rangle = 0\}$ перенесем параллельно самой себе, так, чтобы она стала касательной к поверхности $\Phi$ в точке $\eta(p)$. В результате мы получим новые полупространства $H(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x - \eta(p), \eta(p) \rangle \leqslant 0\}$.

Покажем, что граница $M$ пересечения $\Omega = \cap_{p \in P} H(p)$ будет искомым многогранником.

Пусть $S \in T$ — симплекс с вершинами $\xi_1, ..., \xi_n$. Необходимо показать, что точка $q$ пересечения гиперплоскостей, касательных к поверхности $\Phi$ в точках $\eta(\xi_1), ..., \eta(\xi_n)$, определяет вершину многогранника $M$. Если это не так, то должна найтись точка $p \in P$, для которой $q \notin H(p)$. При этом в силу условия Φ-триангуляции точка $p$ лежит вне множества $\Phi(S)$. В силу выпуклости поверхности Φ и определения множества $\Phi(S)$ гиперплоскость, касательная к Φ в точке $p$, не может отделять точку $q$ от поверхности Φ. Это значит, что $q \in H(p)$. Тем самым теорема доказана. □

Из доказанной теоремы непосредственно получаем

**Следствие 1.** *Если для заданных чисел $\sigma_F/2 > \sigma_i > 0$, $i = 1, ..., N$, таких, что*

$$\sigma_F = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i,$$

*найдется Φ триангуляция $T = \{S_i,\ i = 1, ..., N\}$, для которой*

$$\mu_F(S_i) = \sigma_i,$$

*то найдется выпуклый многогранник $M$ с вершинами $v_1, ..., v_N$ такой, что*

$$\sigma(v_i) = \sigma_i, \qquad i = 1, ..., N.$$

**Следствие 2.** *Если в условиях теоремы заданная триангуляция $T$ является триангуляцией Делоне, то искомый многогранник можно найти такой, что в него можно вписать единичную сферу.*

**Доказательство.** Достаточно показать, что найденный при доказательстве теоремы 2 многогранник $M_0$ — требуемый. Это будет следовать из того факта, что точка $v$ пересечения $n$ касательных к $\mathbb{S}^{n-1}$ гиперплоскостей, построенных в вершинах сферического симплекса $S \in T$ заданной триангуляции, определяет вершину многогранника $M_0$. Если это не так, то найдется вершина триангуляции $w$ такая, что касательная гиперплоскость к $\mathbb{S}^{n-1}$, построенная в этой вершине, отделяет точку $v$ и начало координат. Но тогда точка $w$ должна принадлежать внутренности $B(S)$. Это устанавливается рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 1. Таким образом, мы придем к нарушению условия Делоне. Полученное противоречие доказывает утверждение следствия. □

Опишем второй класс триангуляций. Для этого рассмотрим некоторый выпуклый многогранник $M_0$ и построим по нему триангуляцию $T_0 = T(M_0)$. К этой триангуляции будем применять такую операцию. Выбираем некоторую внутреннюю точку $p$ некоторого симплекса $S \in T_0$ с вершинами $\xi_1, ...\xi_n$ и разбиваем этот симплекс на $n$ симплексов $S_i = S(\xi_1, ..., \xi_{i-1}, p, \xi_{i+1}, ...\xi_n), i = 1, ..., n$. При этом соответствующий многогранник строится отсечением подходящей гиперплоскостью, ортогональной радиус-вектору точки $p$ части исходного многогранника у его вершины, определяемой симплексом $S$. Причем эта гиперплоскость должна пройти так, чтобы отделить эту вершину от остальных вершин исходного многогранника.

## 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЗАДАННОГО РАЗБИЕНИЯ СФЕРЫ

Таким образом, из вышесказанного следует, что разрешимость поставленной задачи следует из возможности построения триангуляции первого или второго класса конечного множества точек сферы с заданными значениями мер $\mu_F$ симплексов. В этом параграфе статьи мы покажем построение требуемой триангуляции для второго класса. Ограничимся рассмотрением случая $n = 3$. Из формулы Эйлера вытекает четность количества треугольников триангуляции конечного набора точек сферы, обладающей свойством (1).

**Теорема 3.** *Пусть $n = 3$ и заданы числа $\sigma_F/2 > \sigma_i > 0, i = 1, ..., N = 2k \geqslant 4$, такие, что*

$$\sigma_F = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i.$$

*Тогда найдется триангуляция второго класса $T = \{S_i, i = 1, ..., N\}$, для которой*

$$\mu_F(S_i) = \sigma_i.$$

Разобьем доказательство теоремы на несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $S_0 = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant 1\}$ — единичный симплекс в $\mathbb{R}^n$.

**Лемма 1.** *Пусть $f : S_0 \to S_0$ — непрерывное отображение такое, что $f(\partial S_0) = \partial S_0$. Тогда $f(S_0) = S_0$.*

**Доказательство.** Пусть это не так. Тогда найдется точка $y \in S_0 \setminus f(S_0)$. Заметим, что в силу условия леммы $y$ — внутренняя точка симплекса. Пусть $x_0$ — некоторая внутренняя точка $S_0$. Рассмотрим семейство симплексов $S(t) = S(A_0(t), ..., A_n(t)), 0 \leqslant t \leqslant 1$, где $A_i(t) = A_i(1-t) + x_0 t$, $A_i = (0, ..., 1, 0, ..., 0)$ (1 стоит на $i$-м месте).

Заметим, что $S(0) = S_0$, $S(1) = x_0$. В силу непрерывности отображения $f$ при всех $t$, достаточно близких к 1, множество $f(S(t))$ содержится в некоторой окрестности точки $f(x_0)$. В силу того что $f(x_0) \neq y$, можно выбрать эту окрестность так, чтобы точка $y$ в нее не попадала. Из соображений непрерывности по параметру $t$ найдется такое $t_0 \in (0,1)$, что $y \in f(S(t_0))$. Это противоречит предположению о том, что $y \in S_0 \setminus f(S_0)$. Тем самым лемма 1 доказана. □

Пусть $S \subset \mathbb{S}^{n-1}$ — некоторый симплекс с вершинами $\xi_1, ..., \xi_n$ и $q \in S$ — произвольная его точка. Построим симплексы $S_1(q), ..., S_n(q)$:

$$S_i(q) = S(\xi_1, ...\xi_{i-1}, q, \xi_{i+1}, ..., \xi_n), \qquad i = 1, ..., n.$$

**Лемма 2.** *Для любого набора чисел*

$$0 \leqslant \sigma_1, ..., \sigma_n \leqslant \mu_F(S), \qquad \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \mu_F(S),$$

*найдется точка $q \in S$ такая, что*

$$\sigma_i = \mu_F(S_i(q)),\ i = 1, ..., n.$$

**Доказательство.** Воспользуемся индукцией по размерности пространства. При $n = 1$ утверждение следует из теоремы о промежуточном значении непрерывной функции. Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех размерностей, меньших $n-1$. Пусть, как и выше, $S_0$ — единичный симплекс в $\mathbb{R}^{n-1}$ и $g : S_0 \to S(\xi_1, ..., \xi_n)$ — некоторый гомеоморфизм, переводящий $k$-мерные грани симплекса $S_0$ в соответствующие $k$-мерные грани симплекса $S(\xi_1, ..., \xi_n)$. Построим непрерывное отображение $h : S \to S_0$ следующим образом. Для точки $q \in S$ положим

$$h(q) = \left( \frac{\mu_F(S_1(q))}{\mu_F(S)}, \frac{\mu_F(S_2(q))}{\mu_F(S)}, ..., \frac{\mu_F(S_{n-1}(q))}{\mu_F(S)} \right).$$

Ясно, что $h(q) \in S_0$. Несложно увидеть, что в силу предположения индукции отображение $f = h \circ g$ удовлетворяет условиям лемм 1. Поэтому для всякой точки $y \in S_0$ найдется такая точка $x_0 \in S_0$, что $f(x_0) = y$. В частности, для

$$y = \left( \frac{\sigma_1}{\mu_F(S)}, \frac{\sigma_2}{\mu_F(S)}, ..., \frac{\sigma_{n-1}}{\mu_F(S)} \right) \in S_0$$

найдется точка $x_0 \in S_0$ такая, что $f(x_0) = y$. Положим $q = g(x_0)$. Тогда по построению отображения $h$ получаем:

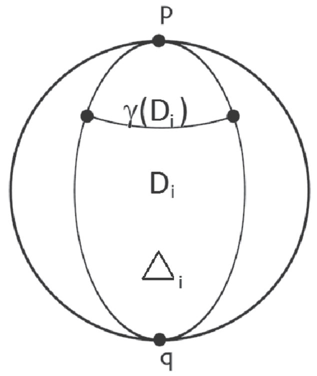
$$\left( \frac{\mu_F(S_1(q))}{\mu_F(S)}, ..., \frac{\mu_F(S_{n-1}(q))}{\mu_F(S)} \right) = f(x_0) = y = \left( \frac{\sigma_1}{\mu_F(S)}, ..., \frac{\sigma_{n-1}}{\mu_F(S)} \right),$$

что и приводит к требуемому. □

**Замечание.** При $n = 3$ справедливость доказанной леммы легко устанавливается и в случае, когда вместо симплекса $S \subset \mathbb{S}^2$ рассмотреть некоторую полусферу $HS \subset \mathbb{S}^2$ с выбранными на ее границе тремя точками, поскольку в этом случае необходимый при доказательстве гомеоморфизм $g : S_0 \to HS$, очевидно, также существует.

**Лемма 3.** *Теорема 3 верна для $k = 2$.*

**Доказательство.** Пусть $p = (0,0,1)$, $q = (0,0,-1)$ — две диаметрально противоположные точки сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Будем рассматривать тройки областей $D_1$, $D_2$, $D_3$, ограниченных дугами $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ окружностей большого радиуса, соединяющих точки $p$ и $q$ (рисунок).




Будем считать, что

$$\partial D_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \qquad \partial D_2 = \Sigma_2 \cup \Sigma_3, \qquad \partial D_3 = \Sigma_3 \cup \Sigma_1.$$

Более того, мы будем рассматривать только те допустимые положения дуг $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, для которых справедливы неравенства

$$\mu_F(D_i) > \sigma_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Ясно, что в силу неравенства $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_F - \sigma_4 < \sigma_F$ такое множество дуг непусто. В каждой области $D_i$ построим дугу $\gamma(D_i)$ окружности большого радиуса, соединяющую две точки на ее граничных дугах, лежащие на одной горизонтальной плоскости, и такую, что для нижнего сферического треугольника $\Delta_i$, ограниченного граничными дугами и дугой $\gamma(D_i)$ было выполнено равенство $\mu_F(\Delta_i) = \sigma_i$. В силу неравенств $\sigma_i < \sigma_F/2$ получающиеся таким образом сферические треугольники лежат в некоторой полусфере. Покажем, что найдется такое расположение дуг $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, что дуги $\gamma(D_i)$, $i = 1, 2, 3$ образуют сферический треугольник. С этой целью покажем сначала, что дугу $\Sigma_3$ можно выбрать так, чтобы дуги $\gamma(D_2)$, $\gamma(D_3)$ имели общую точку на $\Sigma_3$. Заметим, что если дугу $\Sigma_3$ перемещать в сторону дуги $\Sigma_1$, то дуга $\gamma(D_3)$ будет перемещать к точке $p$ и в положении, близком к крайнему допустимому (когда $\mu_F(D_3)$ близко к $\sigma_3$), эта дуга будет располагаться выше дуги $\gamma(D_2)$. А если дугу $\Sigma_3$ перемещать в обратном направлении, то выше оказывается дуга $\gamma(D_2)$. Из соображений непрерывности найдется такое положении дуги $\Sigma_3$, что дуги $\gamma(D_2)$ и $\gamma(D_3)$ пересекутся в некоторой точке на дуге $\Sigma_3$. Ясно, что имеется непрерывная зависимость такого положения $\Sigma_3$ от положения дуг $\Sigma_2$ и $\Sigma_1$. Рассмотрим допустимое положение дуг $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, близкое к крайнему положению, т. е. положению, при котором $\mu_F(D_1) = \sigma_1$. В этом случае дуга $\gamma(D_1)$ будет находиться вблизи точки $p$ и выше дуг $\gamma(D_2)$ и $\gamma(D_3)$. Если мы будем «раздвигать» дуги $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$, то дуга $\gamma(D_1)$ будет перемещаться вниз, а сцепленные в общей точке дуги $\gamma(D_2)$ и $\gamma_3$ будут перемещаться вверх. И когда дуги $\Sigma_2$, $\Sigma_1$ будут близки к другому крайнему положению, т. е. положению, когда $\mu_F(D_2) = \sigma_2$, $\mu_F(D_3) = \sigma_3$, дуги $\gamma(D_2)$ и $\gamma(D_3)$ окажутся близкими к точке $p$, т. е. выше дуги $\gamma(D_1)$. Следовательно, найдется положение дуг $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ такое, что все три дуги $\gamma(D_i)$, $i = 1, 2, 3$ образуют сферический треугольник $\Delta_4$, причем в силу аддитивности интеграла $\mu_F(\Delta_4) = \sigma_4$. Лемма доказана. □

**Доказательство теоремы 3**. Проведем доказательство по индукции. При $k = 2$ теорема справедлива в силу доказанной леммы. Предположим, что утверждение теоремы установлено для всех значений $k < l$. Докажем справедливость теоремы для случая $k = l$. Заметим тогда, что имеет место неравенство $N = 2k \geqslant 6$. Не ограничивая общности, будем считать, что заданный набор чисел упорядочен:

$$\sigma_1 \leqslant ... \leqslant \sigma_N.$$

Тогда $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \leqslant \sigma_F/2$. Если это не так, то тем более $\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 \geqslant \sigma_F/2$, а значит,

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i > \sigma_F,$$

что противоречит условию теоремы. Рассмотрим новый набор чисел

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,\ \sigma_4, ...,\ \sigma_N.$$

Предположим сначала, что $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < \sigma_F/2$. Используя предположение индукции, найдется триангуляция $T = \{S_i\},\ i = 1, ..., N-2$, для которой имеет место (1) и

$$\mu_F(S_1) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \qquad \mu_F(S_i) = \sigma_{i+2}, i = 2, ..., N-2.$$

Согласно лемме 2 симплекс $S_1$ можно разбить на три симплекса $S_1'$, $S_2'$, $S_3'$ так, чтобы

$$\mu_F(S_i') = \sigma_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Тогда триангуляция $T' = \{S_1', S_2', S_3', S_2, ..., S_{N-1}\}$ является искомой.

Пусть теперь $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_F/2$. В этом случае $N = 2k = 6$. Действительно, в силу упорядоченности заданного набора чисел получаем:

$$\sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 \geqslant \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_F/2,$$

и потому

$$\sum_{i=1}^{6} \sigma_i = \sigma_F, \qquad \sigma_i = 0 \quad \text{для} \quad i > 6.$$

Требуемую триангуляцию построим следующим образом. Выберем на одной из окружностей большого радиуса три точки, образующих в $\mathbb{R}^3$ равносторонний треугольник. Такая окружность разделит сферу на две полусферы $S_1, S_2$. Согласно замечанию к лемме 2 можно найти точку в одной полусфере и точку в другой полусфере так, чтобы образуемые сферические треугольники $S_1'$, $S_1''$, $S_1'''$, $S_2'$, $S_2''$, $S_2'''$ разбивали меру $\mu_F$ полусферы на требуемые части. Теорема доказана полностью. □

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02517).*

## Библиографический список

1. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. М. : Наука, 1971. 95 с.
2. *Iörgens K.* Über die Lösungen der Differentialgleichung $nt - s^2 = 1$ // Math. Ann. 1954. Vol. 127. P. 130–134.
3. *Calabi E.* Improper affine hypersheres of convex type and a generalizations of theorem by K. Iörgens // Michigan Math. J. 1958. Vol. 5, iss. 2. P. 105–126. DOI: 10.1307/mmj/1028998055.
4. *Александров А. Д.* Задача Дирихле для уравнения $Det||z_{ij}|| = \varphi(z_1, ..., z_n, z, x_1, ..., x_n)$. I // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика и астрономия. 1958. № 1, вып. 1. С. 5–24.
5. *Bodrenko A. I.* The solution of the Minkowski problem for open surfaces in Riemannian space. Arxiv.org. 2007. arXiv:0708.3929.
6. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. 429 с.
7. Зильберберг А. А. О существовании замкнутых выпуклых многогранников с произвольными заданными кривизнами вершин // УМН. 1962. Т. 17, вып. 4(106). С. 119–126.

**Образец для цитирования:**
*Клячин В. А.* О разрешимости дискретного аналога многомерной задачи Минковского – Александрова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 281–288. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-281-288.

# On the Solvability of the Discrete Analogue of the Minkowski – Alexandrov Problem

**V. A. Klyachin**

Vladimir A. Klyachin, Volgograd State University, 100, Universitetskii prospekt, 400062, Volgograd, Russia, klchnv@mail.ru

The article deals with the multidimensional discrete analogue of the Minkowski problem in the production of A. D. Aleksandrov on the existence of a convex polyhedron with given curvatures at the vertices. We find the conditions for the solvability of this problem in a general setting, when the curvature measure at the polyhedron vertices is defined by an arbitrary continuous function defined on a field $F : \mathbb{S}^{n-1} \to (0, +\infty)$. The basis for solving the problem is the solvability of the problem whether each triangulation of a finite set of points $P \subset \mathbb{S}^{n-1}$ of the unit sphere corresponds a convex polyhedron whose faces normal belong to the set $P$.

*Key words:* convex polyhedron, triangulation, spherical simplex.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-41-02517).*

## References

1. Pogorelov A. V. *Mnogomernaia problema Minkovskogo* [Multidimensional Minkowsky problem]. Moscow, Nauka, 1971, 95 p. (in Russian).
2. Iörgens K. Über die Lösungen der Differentialgleichung $nt - s^2 = 1$. *Math. Ann.*, 1954, vol. 127, pp. 130–134.
3. Calabi E. Improper affine hypersheres of convex type and a generalizations of theorem by K. Iörgens. *Michigan Math. J.*, 1958, vol. 5, iss. 2, pp. 105–126. DOI: 10.1307/mmj/1028998055.
4. Aleksandrov A. D. Dirichlet problem for equation $Det||z_{ij}|| = \varphi(z_1, ..., z_n, z, x_1, ..., x_n)$. I. *Vestnik*

*LGU, Ser. Mathematics, mechanics and astronomy*, 1958, no. 1, iss. 1, pp. 5–24 (in Russian).
5. Bodrenko A. I. The solution of the Minkowski problem for open surfaces in Riemannian space. *Arxiv.org*, 2007, arXiv:0708.3929.
6. Aleksandrov A. D. *Vypuklye mnogogranniki* [Convex polyhedra]. Moscow ; Leningrad, GITTL, 1950, 429 p. (in Russian).
7. Zil'berberg A. A. On existence of closed convex polyhedra with prescrobed curvature of vertexes. *Uspehi Mat. Nauk*, 1962, vol. 17, no. 4(106), pp. 119–126 (in Russian).

**Please cite this article in press as:**
Klyachin V. A. On the Solvability of the Discrete Analogue of the Minkowski – Alexandrov Problem. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 281–288 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-281-288.

УДК 517.518.85

# НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ НА ОТРЕЗКЕ СИНК-АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

**А. Ю. Трынин**

Трынин Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, tayu@rambler.ru

Получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости синк-приближений для функций ограниченной вариации. Отдельно рассматриваются условия равномерной сходимости внутри интервала $(0,\pi)$ и на отрезке $[0,\pi]$. Установлена невозможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции ограниченной вариации на отрезке $[0,\pi]$. Выделена главная часть погрешности синк-аппроксимации при приближении негладких функций из пространств непрерывных функций и непрерывных функций, исчезающих на концах отрезка $[0,\pi]$, снабженных чебышевской нормой.

*Ключевые слова:* равномерная сходимость, синк-приближения, ограниченная вариация, синк-аппроксимации.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298

## ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению аппроксимативных свойств синк-приближений, используемых в теореме отсчетов Уиттекера – Котельникова – Шеннона [1–4]. В связи с необходимостью развития теории кодирования сигналов Э. Борель и Е. Т. Уиттекер ввели понятие кардинальной функции, сужение с оси на отрезок $[0,\pi]$ которой выглядит так:

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right). \qquad (1)$$

К настоящему времени достаточно полно исследованы свойства синк-аппроксимаций аналитической на действительной оси функции, экспоненциально убывающей на бесконечности. Наиболее полный обзор результатов, полученных в этом направлении до 1993 года, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти в [3]. Интересный исторический обзор исследований в этой области содержится также в [5].

Синк-приближения нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной, так и нескольких переменных [6–8] в теории квадратурных формул [3] и теории вейвлет-преобразований или всплесков [1, 2, 4]. В [9, 10] изучаются модификации синк-приближений, с помощью которых можно приближать произвольные равномерно непрерывные функции, ограниченные на оси.

Результаты работ [11, 12] позволяют сделать заключение о том, что при использовании классических синк-аппроксимаций (1) вблизи концов отрезка $[0,\pi]$ возникает явление Гиббса (Уилбрейама – Гиббса).