LGU, Ser. Mathematics, mechanics and astronomy, 1958, no. 1, iss. 1, pp. 5–24 (in Russian).
5. Bodrenko A. I. The solution of the Minkowski problem for open surfaces in Riemannian space. *Arxiv.org*, 2007, arXiv:0708.3929.
6. Aleksandrov A. D. *Vypuklye mnogogranniki* [Convex polyhedra]. Moscow ; Leningrad, GITTL, 1950, 429 p. (in Russian).
7. Zil'berberg A. A. On existence of closed convex polyhedra with prescrobed curvature of vertexes. *Uspehi Mat. Nauk*, 1962, vol. 17, no. 4(106), pp. 119–126 (in Russian).

Please cite this article in press as:
Klyachin V. A. On the Solvability of the Discrete Analogue of the Minkowski – Alexandrov Problem. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 281–288 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-281-288.

УДК 517.518.85

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ НА ОТРЕЗКЕ СИНК-АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А. Ю. Трынин

Трынин Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, tayu@rambler.ru

Получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости синк-приближений для функций ограниченной вариации. Отдельно рассматриваются условия равномерной сходимости внутри интервала $(0, \pi)$ и на отрезке $[0, \pi]$. Установлена невозможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции ограниченной вариации на отрезке $[0, \pi]$. Выделена главная часть погрешности синк-аппроксимации при приближении негладких функций из пространств непрерывных функций и непрерывных функций, исчезающих на концах отрезка $[0, \pi]$, снабженных чебышевской нормой.

Ключевые слова: равномерная сходимость, синк-приближения, ограниченная вариация, синк-аппроксимации.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению аппроксимативных свойств синк-приближений, используемых в теореме отсчетов Уиттекера – Котельникова – Шеннона [1–4]. В связи с необходимостью развития теории кодирования сигналов Э. Борель и Е. Т. Уиттекер ввели понятие кардинальной функции, сужение с оси на отрезок $[0, \pi]$ которой выглядит так:

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right). \tag{1}$$

К настоящему времени достаточно полно исследованы свойства синк-аппроксимаций аналитической на действительной оси функции, экспоненциально убывающей на бесконечности. Наиболее полный обзор результатов, полученных в этом направлении до 1993 года, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти в [3]. Интересный исторический обзор исследований в этой области содержится также в [5].

Синк-приближения нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной, так и нескольких переменных [6–8] в теории квадратурных формул [3] и теории вейвлет-преобразований или всплесков [1, 2, 4]. В [9, 10] изучаются модификации синк-приближений, с помощью которых можно приближать произвольные равномерно непрерывные функции, ограниченные на оси.

Результаты работ [11, 12] позволяют сделать заключение о том, что при использовании классических синк-аппроксимаций (1) вблизи концов отрезка $[0, \pi]$ возникает явление Гиббса (Уилбрейама – Гиббса).

Авторы гл. 13 интересной книги [13], описывающей новые перспективные направления развития теории приближения функций с использованием интерполяционных данных, получают оценки функций и констант Лебега усеченных кардинальных функций Уиттекера, аналогичные установленным в [15].

До появления работ [12–18], насколько нам известно, приближение такими операторами на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций [3, 19] сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. В [18] получена оценка сверху наилучшего приближения непрерывных, исчезающих на концах отрезка $[0, \pi]$, функций линейными комбинациями синков.

Из результатов исследований в [20] видно, что при попытке приближения негладких непрерывных функций значениями операторов (1) возможно появление «резонанса», приводящего к неограниченному росту погрешности аппроксимации на всем интервале $(0, \pi)$. В этой же работе [20] установлено отсутствие равносходимости значений операторов (1) и рядов или интегралов Фурье на классе непрерывных функций.

В [21, 22] и [23] предложены различные модификации синк-приближений (1), позволяющие аппроксимировать произвольные непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$. Исследование полноты системы синков (1) в [22] в пространствах $C[0, \pi]$ и $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$, позволяет сделать вывод о тщетности попыток построить оператор в виде линейных комбинаций синков, допускающий возможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции на отрезке. В работах [22, 23], кроме того, установлены новые необходимые и достаточные условия равномерной сходимости синк-приближений (1) и некоторых их модификаций на всем отрезке $[0, \pi]$.

Работа [24] посвящена исследованию аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с дифференциальными выражениями второго порядка. Операторы, предложенные в [24], являются обобщением классических синк-приближений (1). В [25] приводится ряд приложений результатов работы [24] к исследованию аппроксимативных свойств классических алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа с матрицей узлов интерполирования, каждая строка которой состоит из нулей многочленов Якоби $P_n^{\alpha_n, \beta_n}$ с параметрами, зависящими от n.

Начиная с известной работы Крамера [26] изучаются также аналоги теорем отсчетов для операторов интерполяции Лагранжа по узлам из спектра задачи Штурма – Лиувилля, например, [27].

В тесной связи с синк-приближениями находятся интерполяционные процессы Лагранжа, построенные по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля. Г. И. Натансон в [28] получил признак Дини – Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0, \pi)$, т. е. равномерной на любом компакте, содержащемся в $(0, \pi)$, процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля.

Исследования, проведенные в [29–31], показывают, что при сколь угодно малом изменении параметров задачи Штурма – Лиувилля (потенциала q, или констант h, H) аппроксимативные свойства процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля могут сильно измениться. В работе [32] устанавливается существование непрерывной на $[0, \pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа- Штурма – Лиувилля которой неограниченно расходится почти всюду на $[0, \pi]$.

Конечно, в [16] и [24] в терминах необходимых и достаточных условий полностью описан класс непрерывных функций, допускающих равномерное на отрезке $[0, \pi]$ приближение с помощью операторов синк-аппроксимаций (1). Но исследование вложений популярных классических функциональных классов таких как множество непрерывных функций ограниченной вариации, осталось за рамками этих публикаций. Поэтому, на наш взгляд, представляет интерес получение достаточных условий сходимости значений операторов (1) для функций из популярных функциональных классов без предварительной проверки каких-либо условий.

В настоящей работе, используя результаты и приемы доказательств, разработанные в [33–41], установлены необходимые и достаточные условия равномерной синк-аппроксимации на отрезке функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций.

1. О ГЛАВНОЙ ЧАСТИ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ СИНК-ПРИБЛИЖЕНИЙ

Приведем ряд вспомогательных результатов, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Обозначим $x_{k,n} = k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 1. (см. [16, теорема 6]). *Если функция f непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, то для всех $x \in [0,\pi]$ имеет место следующее соотношение:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - L_n(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\right) l_{k,n}(x)\right) = 0, \tag{2}$$

где

$$l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi}.$$

Сходимость в (2) — поточечная на отрезке $[0,\pi]$ и равномерная внутри интервала $(0,\pi)$, т. е. равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале.

Доказательство этого утверждения следует также из [15, теорема 2] или [17, теорема 6].

Обозначим подпространство пространства непрерывных на $[0,\pi]$ функций, исчезающих на концах отрезка, через $C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$.

Для функций из пространства $C_0[0,\pi]$ результат предложения 1 может быть усилен.

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, то поточечно на отрезке $[0,\pi]$ и равномерно внутри интервала $(0,\pi)$, т. е. равномерно на каждом компакте, содержащемся в этом интервале, имеет место соотношение (2). Сходимость в (2) является равномерной на отрезке $[0,\pi]$ тогда и только тогда, когда $f \in C_0[0,\pi]$.*

Доказательство. Сделаем замену независимой переменной $t = (x+\pi)/2$, $x = 2t-\pi$, и рассмотрим новую функцию:

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(2t-\pi) & \text{при } t \in [\pi/2, \pi], \\ 0 & \text{при } t \in [0, \pi/2). \end{cases}$$

Из непрерывности функции f и того, что $f(0) = f(\pi) = 0$, следует принадлежность $\hat{f}$ пространству $C_0[0,\pi]$.

Заметив, что при $x \in [0,\pi]$ и $t \in [\pi/2,\pi]$

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{k,n}) \frac{(-1)^k \sin nx}{n(x - x_{k,n})} = \sum_{k=o}^{n} \hat{f}\left(\frac{x_{k,n}+\pi}{2}\right) \frac{(-1)^k \sin n(2t-\pi)}{n(2t - \pi - \frac{k\pi}{n})} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \hat{f}\left(\frac{(k+n)\pi}{2n}\right) \frac{(-1)^{k+n} \sin 2nt}{n(2t - \frac{(n+k)\pi}{n})} =$$

$$= \sum_{m=n}^{2n} \hat{f}\left(\frac{m\pi}{2n}\right) \frac{(-1)^m \sin 2nt}{2n(t - \frac{m\pi}{2n})} = \sum_{m=0}^{2n} \hat{f}(t_{m,2n}) \frac{(-1)^m \sin 2nt}{2n(t - t_{m,2n})} = L_{2n}(\hat{f}, t),$$

воспользуемся утверждением предложения 1:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left| f(x) - L_n(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\right) l_{k,n}(x)\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \max_{t\in[\pi/2,3\pi/4]} \left| \hat{f}(t) - L_{2n}(\hat{f},t) - \frac{1}{2}\sum_{m=n}^{2n-1}\left(\hat{f}(t_{m+1,2n}) - \hat{f}(t_{m,2n})\right) l_{m,2n}(t)\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \max_{t\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]} \left| \hat{f}(t) - L_{2n}(\hat{f},t) - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{2n-1}\left(\hat{f}(t_{m+1,2n}) - \hat{f}(t_{m,2n})\right) l_{m,2n}(t)\right| = 0.$$

Аналогично или с помощью замены $z = \pi - x$ устанавливается справедливость соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[\frac{\pi}{2},\pi]} \left| f(x) - L_n(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\right) l_{k,n}(x)\right| = 0.$$

Таким образом, равномерность сходимости по $x \in [0,\pi]$ для функций из пространства $C_0[0,\pi]$ в (2) установлена.

Пусть теперь функция $f \in C[0,\pi] \setminus C_0[0,\pi]$. Покажем, что в этом случае сходимость в (2) не является равномерной на $[0,\pi]$. Положим $\xi_n = \pi/(2n)$, тогда для любой $f \in C[0,\pi]$ установим справедливость соотношений

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(\xi_n) - L_n(f,\xi_n) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\right) l_{k,n}(\xi_n)\right\} = f(0)\left\{\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right\}, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f(\pi-\xi_n) - L_n(f,\pi-\xi_n) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\right) l_{k,n}(\pi-\xi_n)\right\} = f(\pi)\left\{\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right\}. \tag{4}$$

Если $f \in C[0,\pi] \setminus C_0[0,\pi]$, то выполнено хотя бы одно из условий $f(0) \neq 0$ или $f(\pi) \neq 0$. Для определенности будем считать, что $f(0) \neq 0$.

Обозначим $\alpha(x) = \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x + f(0)$. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\right) l_{k,n}(x) = \Bigg(f(x) - \alpha(x) - L_n(f-\alpha,x) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1,n}) - \alpha(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}) + \alpha(x_{k,n})\right) l_{k,n}(x)\Bigg) + \\ +\left(\alpha(x) - L_n(\alpha,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha(x_{k+1,n}) - \alpha(x_{k,n})\right) l_{k,n}(x)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Функция $f - \alpha \in C_0[0,\pi]$. Так как равномерность сходимости по $x \in [0,\pi]$ для функций из пространства $C_0[0,\pi]$ в (2) уже установлена, первое слагаемое в (5) равномерно сходится к нулю. Выберем последовательность $\xi_n = \pi/(2n)$. Второе слагаемое в (5) при $x = \xi_n$ в силу линейности оператора L_n, вычислим отдельно для функций $\hat\alpha(x) = \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x$ и $\tilde\alpha(x) \equiv f(0)$. В случае $\hat\alpha(\xi_n) = \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\xi_n$ имеем:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\xi_n - L_n\left(\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\cdot,\xi_n\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}(x_{k+1,n}-x_{k,n})\right)l_{k,n}(\xi_n)\right| = \\ &= \left|\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\xi_n - \frac{1}{2}\left(f(\pi)-f(0)\right) l_{n,n}(\xi_n) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(l_{k,n}(\xi_n) + l_{k-1,n}(\xi_n)\right)\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,n}\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\frac{f(\pi)-f(0)}{2n}\right| + \left|\frac{f(\pi)-f(0)}{(\pi-2n\pi)}\right| + \left|\frac{2\left(f(\pi)-f(0)\right)}{\pi n}\right|\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k}{(1-2k)(3-2k)}\right|. \end{aligned}$$

Последняя сумма является частичной суммой сходящегося ряда, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\xi_n - L_n\left(\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}\cdot,\xi_n\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}(x_{k+1,n}-x_{k,n})\right)l_{k,n}(\xi_n)\right| = 0. \tag{6}$$

Следовательно, осталось подсчитать второе слагаемое в (5) при $x = \xi_n$ для функции $\tilde\alpha \equiv f(0)$. Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Поэтому имеем равенство

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left\{\tilde\alpha(\xi_n) - L_n(\tilde\alpha,\xi_n) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\tilde\alpha(x_{k+1,n}) - \tilde\alpha(x_{k,n})\right) l_{k,n}(\xi_n)\right\} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left\{f(0) - f(0)\sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(\xi_n)\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{f(0)\left(1 - \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right\} = f(0)\left\{\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (5) и (6) следует (3). Равенство (4) устанавливается аналогично или с помощью замены $t = \pi - x$.

Невозможность равномерной сходимости в соотношении (2) для функций из множества $C[0,\pi] \setminus C_0[0,\pi]$ следует из предложения 1 и (3), (4). Теорема 1 доказана. $\square$

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ЗНАЧЕНИЯМИ ОПЕРАТОРОВ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ

Если не оговорено иное, считаем, что на протяжении этой работы $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$ и $0 < \varepsilon < (b-a)/2$. Индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определяются неравенствами

$$x_{p_1,n} \leqslant a + \varepsilon < x_{p_1+1,n}, \quad x_{p_2,n} \leqslant b - \varepsilon < x_{p_2+1,n},$$

$$x_{k_1-1,n} < a \leqslant x_{k_1,n}, \quad x_{k_2,n} \leqslant b < x_{k_2+1,n},$$

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, \quad m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right].$$

Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z.

Теорема 2. *Пусть $V_f[a,b]$— полная вариация непрерывной на $[a,b]$ функции f. Если $V_f[a,b] < \infty$, то имеет место равномерная сходимость*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} = 0. \tag{7}$$

Доказательство. После продолжения

$$f(x) = \begin{cases} f(a) \text{ при } x < a, \\ f(x) \text{ при } x \in [a,b], \\ f(b) \text{ при } x > b, \end{cases} \tag{8}$$

функция $f \in C[a,b]$ стала непрерывной на всем множестве действительных чисел с тем же модулем непрерывности. Обозначим

$$\psi_{k,n} = f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}) \quad k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Зафиксируем произвольное $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Выберем индекс $p = p(x,n)$ из соображений, что $x \in [x_{p,n}, x_{p+1,n})$. Тогда $x = x_{p,n} + \alpha(x_{p+1,n} - x_{p,n}) = x_{p,n} + \frac{\alpha\pi}{n}$, где $\alpha = \alpha(x,n) \in [0,1)$

$$x - x_{k,n} = \frac{p-k+\alpha}{n}\pi.$$

Пользуясь (9), оценим разность сразу для всех $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$

$$\left|\sum_{k:|p-k|\geqslant 3} \frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k+\alpha} - \sum_{k:|p-k|\geqslant 3} \frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant \omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k:|p-k|\geqslant 3} \frac{\alpha}{|p-k|(|p-k|-1)} \leqslant \omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right). \tag{10}$$

Учитывая (8) и (9), разобьем сумму в (2) следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2} \left(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\right) l_{k,n}(x) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|\geqslant 3;}} \psi_{k,n} l_{k,n}(x) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|<3}} \psi_{k,n} l_{k,n}(x).$$

Теперь с помощью неравенства треугольника из (9), (10) равномерно для всех $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ получаем оценку

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2} \left(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\right) l_{k,n}(x) - \frac{\sin nx}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k:|p-k|\geqslant 3}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k+\alpha}-\sum_{k:|p-k|\geqslant 3}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|<3}|\psi_{k,n}l_{k,n}(x)|+\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|<3}{}'\frac{|\psi_{k,n}|}{|p-k|}\leqslant\frac{5}{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right). \tag{11}$$

Штрих у суммы в этой работе означает отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

Отсюда и из (2) следует соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-L_n(f,x)-\frac{\sin nx}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right)=0. \tag{12}$$

Обратите внимание на то, что это соотношение выполняется равномерно на отрезке $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$. Равномерно на всем отрезке $[0,\pi]$ в силу теоремы 1 оно имеет место тогда и только тогда, когда $f\in C_0[0,\pi]$. Оценим последнее слагаемое в (12) с помощью соотношения

$$|\psi_{k,n}|=|f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})|\leqslant\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\qquad\text{для всех } k\in\mathbb{Z}; n\in\mathbb{N}, \tag{13}$$

и неравенства треугольника

$$\left|\frac{\sin nx}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right|\leqslant 2\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\frac{\psi_{2m,n}}{p-2m}\right|+\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right|+O\!\left(\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\right). \tag{14}$$

В силу непрерывности функции f существует последовательность натуральных чисел $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$l_n=o(n),\quad \lim_{n\to\infty}l_n=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k}=0. \tag{15}$$

Оценим вторую сумму в (14)

$$\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right|\leqslant\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leqslant l_n}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right|+\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|>l_n}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right|. \tag{16}$$

Тогда, учитывая неравенство (13), получим оценку

$$\left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leqslant l_n}{}'\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leqslant l_n}{}'\left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k}. \tag{17}$$

Для исследования суммы (16) в случае $k\in\mathbb{Z}:|p-k|>l_n$ применим преобразование Абеля. Теперь из (17) и (15) получаем равномерную на $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ оценку

$$\left|\frac{\sin nx}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k}+\frac{1}{\pi(l_n+1)}\sum_{k:|p-k|>l_n}|\psi_{k,n}|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k}+\frac{V_f[a,b]}{\pi(l_n+1)}=o(1). \tag{18}$$

Отсюда из (12) и неравенства треугольника получаем истинность утверждения (7). Теорема 2 доказана. □

Замечание 1. Из результатов исследований в [12] следует, существование константы c_1 и функции f ограниченной вариации на отрезке $[0,\pi]$ таких, что будут выполняться соотношения

$$|f(\epsilon_n)-L_n(f,\epsilon_n)|\geqslant c_1f(0),\qquad |f(\pi-\epsilon_n)-L_n(f,\pi-\epsilon_n)|\geqslant c_1f(\pi)$$

при $\epsilon_n=\pi/(2n)$.

Теорема 3. *Пусть* $V_f[0,\pi]$— *полная вариация непрерывной на* $[0,\pi]$ *функции* f. *Если* $V_f[0,\pi] < \infty$, *то имеет место равномерная сходимость на всем отрезке* $[0,\pi]$ ($a = 0, b = \pi$)

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n(f,\cdot)\|_{C[0,\pi]} = 0 \tag{19}$$

тогда и только тогда, когда $f \in C_0[0,\pi]$.

Доказательство. Равномерная аппроксимация (19) непрерывной функции ограниченной вариации, исчезающей на концах отрезка $[0,\pi]$ ($a = 0, b = \pi$), с помощью операторов (1), следует из теоремы 1 после соответствующего продолжения функции (8), так как в этом случае все оценки (9), (14), (16)–(18) будут равномерными на всем отрезке $[0,\pi]$. Отсюда же и из (3), (4) вытекает невозможность равномерного приближения функций ограниченной вариации из множества $f \in C[0,\pi] \setminus C_0[0,\pi]$.

Теорема 3 доказана. □

Следствие 1. *Из теоремы 2, в частности, следует равномерное внутри интервала* (a,b) *приближение значениями оператора синк-аппроксимаций* (7) *непрерывных на отрезке* $[0,\pi]$ *и абсолютно непрерывных на* $[a,b]$ *функций.*

Следствие 2. *Из теоремы 3 следует, что абсолютная непрерывность функции* f *на отрезке* $[0,\pi]$ *гарантирует равномерную сходимость* (19) *на всем отрезке* $[0,\pi]$ ($a = 0, b = \pi$) *тогда и только тогда, когда* $f \in C_0[0,\pi]$.

Библиографический список

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 550 с.
2. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков // УМН. 1998. Т. 53, вып. 6(324). С. 53–128. DOI: 10.4213/rm89.
3. *Stenger F.* Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions. Springer Series in Comput. Math. (Book 20). N. Y. : Springer-Verlag, 1993. 565 p.
4. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
5. *Butzer P. L.* A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields // J. Approx. Theory. 2009. Vol. 160, iss. 1–2. P. 3–18. DOI: 10.1016/j.jat.2009.05.004.
6. *Schmeisser G., Stenger F.* Sinc Approximation with a Gaussian Multiplier // Sampl. Theory Signal Image Process. 2007. Vol. 6, № 2. P. 199–221.
7. *Livne O. E., Brandt A. E.* MuST : The Multilevel Sinc Transform // SIAM J. Sci. Comput. 2011. Vol. 33, iss. 4. P. 1726–1738. DOI: 10.1137/100806904.
8. *Tharwat M. M.* Sinc approximation of eigenvalues of Sturm – Liouville problems with a Gaussian multiplier // Calcolo. 2014. Vol. 51, iss. 3. P. 465–484. DOI : 10.1007/s10092-013-0095-3.
9. *Kivinukk A., Tamberg G.* Interpolating generalized Shannon sampling operators, their norms and approximation theoremerties // Sampl. Theory Signal Image Process. 2009. Vol. 8, № 1. P. 77–95.
10. *Schmeisser G.* Interconnections Between Multiplier Methods and Window Methods in Generalized Sampling // Sampl. Theory Signal Image Process. 2010. Vol. 9, № 1–3. P. 1–24.
11. *Jerri A. J.* Lanczos-Like σ-Factors for Reducing the Gibbs Phenomenon in General Orthogonal Expansions and Other Representations // J. Comput. Anal. Appl. 2000. Vol. 2, iss. 2. P. 111–127. DOI: 10.1023/A:1010146500493.
12. *Trynin A. Yu., Sklyarov V. P.* Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampl. Theory Signal Image Process. 2008. Vol. 7, № 3. P. 263–270.
13. *Zayed A. I., Schmeisser G.* New Perspectives on Approximation and Sampling Theory. Ser. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Basel : Birkhäuser, 2014. 472 p. DOI: 10.1007/978-3-319-08801-3.
14. *Трынин А. Ю.* Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 124–127.
15. *Трынин А. Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1155–1166.
16. *Трынин А. Ю.* Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2007. Т. 198, № 10. С. 141–158. DOI: 10.4213/sm1533.
17. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Матем. 2008. № 6. С. 66–78.
18. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East J. Approx. 2008. Vol. 14, № 2. P. 183–192.

19. *Mohsen A., El-Gamel M.* A Sinc-Collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations // ZAMP. 2007. Vol. 58, iss. 3. P. 380–390. DOI 10.1007/s00033-006-5124-5.
20. *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0,\pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, вып. 4. С. 232–256.
21. *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7, № 4. С. 116–132.
22. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, вып. 5. С. 170–194
23. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. вузов. Матем. 2016. № 3. С. 72–81.
24. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера – Котельникова – Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 61–108. DOI: 10.4213/sm4502.
25. *Трынин А. Ю.* Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа – Якоби // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, вып. 6. С. 129–162. DOI: 10.4213/im4275.
26. *Kramer H. P.* A generalized sampling theorem // J. Math. Phus. 1959. Vol. 38. P. 68–72.
27. *Zayed A. I., Hinsen G., Butzer P. L.* On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm – Liouville problems // SIAM J. Appl. Math. 1990. Vol. 50, № 3. P. 893–909.
28. *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // Учен. записки Ленингр. пед. ин-та. 1958. Т. 166. С. 213–219.
29. *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2000. № 9. С. 60–73.
30. *Трынин А. Ю.* Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма – Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, вып. 4. С. 133–143.
31. *Трынин А. Ю.* Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма – Лиувилля // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, вып. 4. С. 116–129.
32. *Трынин А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля // Изв. вузов. Матем. 2010. № 11. С. 74–85.
33. *Трынин А. Ю.* Принцип локализации для процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 137–140.
34. *Трынин А. Ю.* Об одном интегральном признаке сходимости процессов Лагранжа – Штурма – Лиувилля // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 94–97.
35. *Трынин А. Ю.* Существование систем Чебышева с ограниченными константами Лебега интерполяционных процессов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 79–81.
36. *Трынин А. Ю.* Пример системы Чебышева с почти всюду сходящейся к нулю последовательностью функций Лебега интерполяционных процессов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 74–76.
37. *Трынин А. Ю., Панфилова И. С.* Об одном признаке типа Дини – Липшица сходимости обобщенных интерполяционных процессов Уиттекера – Котельникова – Шеннона // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 83–87.
38. *Трынин А. Ю., Панфилова И. С.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по узлам Якоби на множестве полной меры // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 87–91.
39. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях равномерной и поточечной сходимости интерполяционных процессов по «взвешенным» многочленам Якоби // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 96–100.
40. *Трынин А. Ю.* Об одной модификации аналога формулы Неваи для синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 78–81.
41. *Трынин А. Ю.* О некоторых достаточных условиях равномерной сходимости синк-аппроксимаций // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 269–272.

Образец для цитирования:

Трынин А. Ю. Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 288–298. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298.

Necessary and Sufficient Conditions for the Uniform on a Segment Sinc-approximations Functions of Bounded Variation

A. Yu. Trynin

Alexandr Yu. Trynin, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, tayu@rambler.ru

The necessary and sufficient conditions for the uniform convergence of sinc-approximations of functions of bounded variation is obtained. Separately we consider the conditions for the uniform convergence in the interval $(0, \pi)$ and on the interval $[0, \pi]$. The impossibility of uniform approximation of arbitrary continuous function of bounded variation on the interval $[0, \pi]$ is settled. We identify the main error of the sinc-approximations when approaching non-smooth functions in spaces of continuous functions and continuous functions vanishing at the ends of the interval $[0, \pi]$, equipped with the norm of Chebyshev.

Key words: uniform convergence, sinc-approximations, bounded variation, sinc-approximation.

References

1. Kashin B. S.; Saakyan A. A. *Ortogonol'nye ryady* [Orthogonal series]. Moscow, AFTs, 1999, 550 p. (in Russian).
2. Novikov I. Ya., Stechkin S. B. Basic wavelet theory. *Russian Math. Surveys*, 1998, vol. 58, iss. 6, pp. 1159–1231. DOI: 10.1070/rm1998v053n06ABEH000089.
3. Stenger F. *Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions*. Springer Series in Comput. Math. (Book 20). New York, Springer-Verlag, 1993, 565 p.
4. Dobeshi I. *Desiat' lektsii po veivletam* [Ten lectures on wavelets]. Izhevsk, NITs "Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika", 2001, 464 p. (in Russian).
5. Butzer P. L. A retrospective on 60 years of approximation theory and associated fields. *J. Approx. Theory*, 2009, vol. 160, iss. 1–2, pp. 3–18. DOI: 10.1016/j.jat.2009.05.004.
6. Schmeisser G., Stenger F. Sinc Approximation with a Gaussian Multiplier. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 2007, vol. 6, no. 2, pp. 199–221.
7. Livne O. E., Brandt A. E. MuST : The Multilevel Sinc Transform. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2011, vol. 33, iss. 4, pp. 1726–1738. DOI: 10.1137/100806904.
8. Tharwat M. M. Sinc approximation of eigenvalues of Sturm – Liouville problems with a Gaussian multiplier. *Calcolo*, 2014, vol. 51, iss. 3, pp. 465–484. DOI : 10.1007/s10092-013-0095-3.
9. Kivinukk A., Tamberg G. Interpolating generalized Shannon sampling operators, their norms and approximation theoremerties. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 2009, vol. 8, no. 1, pp. 77–95.
10. Schmeisser G. Interconnections Between Multiplier Methods and Window Methods in Generalized Sampling. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 2010, vol. 9, no. 1–3, pp. 1–24.
11. Jerri A. J. Lanczos-Like σ-Factors for Reducing the Gibbs Phenomenon in General Orthogonal Expansions and Other Representations. *J. Comput. Anal. Appl.*, 2000, vol. 2, iss. 2, pp. 111–127. DOI: 10.1023/A:1010146500493.
12. Trynin A. Yu., Sklyarov V. P. Error of sinc-approximation of analytic functions on an interval. *Sampl. Theory Signal Image Process.*, 2008, vol. 7, no. 3, pp. 263–270.
13. Zayed A. I., Schmeisser G. *New Perspectives on Approximation and Sampling Theory*. Ser. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Basel, Birkhäuser, 2014. 472 p. DOI: 10.1007/978-3-319-08801-3.
14. Trynin A. Yu. Ob otsenke approksimatsii analiticheskikh funktsii interpoliatsionnym operatorom po sinkam [On an estimate of approximation of analytic functions by interpolation sinc-operator]. *Mathematics, Mechanics*. Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2005, iss. 7, pp. 124–127 (in Russian).
15. Trynin A. Yu. Estimates for the Lebesgue functions and the Nevai formula for the *sinc*-approximations of continuous functions on an interval. *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, iss. 5, pp. 929–938. DOI: 10.1007/s11202-007-0096-z.
16. Trynin A. Yu. Tests for pointwise and uniform convergence of sinc approximations of continuous functions on a closed interval. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 10, pp. 1517–1534. DOI: 10.1070/SM2007v198n10ABEH003894.
17. Trynin A. Yu. A criterion for the uniform convergence of sinc-approximations on a segment. *Russian Math.*, 2008, vol. 52, iss. 6, pp. 58–69. DOI: 10.3103/S1066369X08060078.
18. Sklyarov V. P. On the best uniform sinc-approximation on a finite interval. *East J. Approx.*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 183–192.
19. Mohsen A., El-Gamel M. A Sinc-Collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations. *ZAMP*, 2007, vol. 58, iss.3, pp. 380-390. DOI 10.1007/s00033-006-5124-5.
20. Trynin A. Yu. On divergence of sinc-approximations everywhere on $(0, \pi)$. *St. Petersburg Math.*

J., 2011, vol. 22, iss. 4, pp. 683–701. DOI: 10.1090/S1061-0022-2011-01163-X.
21. Trynin A. Yu. On some properties of sinc approximations of continuous functions on the interval. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, iss. 4, pp. 111–126. DOI: 10.13108/2015-7-4-111.
22. Trynin A. Yu. On necessary and sufficient conditions for convergence of sinc approximations. *Algebra i Analiz*, 2015, vol. 27, iss. 5, pp. 170–194 (in Russian).
23. Trynin A. Yu. Approximation of continuous on a segment functions with the help of linear combinations of sincs. *Russian Math.*, 2016, vol. 60, iss. 3, pp. 63–71. DOI: 10.3103/S1066369X16030087.
24. Trynin A. Yu. A generalization of the Whittaker – Kotel'nikov – Shannon sampling theorem for continuous functions on a closed interval. *Sb. Math.*, 2009, vol. 200, iss. 11, pp. 1633–1679. DOI: 10.1070/SM2009v200n11ABEH004054.
25. Trynin A. Yu. On operators of interpolation with respect to solutions of a Cauchy problem and Lagrange – Jacobi polynomials. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, iss. 6, pp. 1215–1248. DOI: 10.1070/IM2011v075n06ABEH002570.
26. Kramer H. P. A generalized sampling theorem. *J. Math. Phus.*, 1959, vol. 38, pp. 68–72.
27. Zayed A. I., Hinsen G., Butzer P. L On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm – Liouville problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 1990, vol. 50, no. 3, pp. 893–909.
28. Natanson G. I. Ob odnom interpoliatsionnom protsesse [An interpolation process]. *Uchen. zapiski Leningrad. ped. in-ta*, 1958, vol. 166, pp. 213–219 (in Russian).
29. Trynin A. Yu. On the absence of stability of interpolation in eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem. *Russian Math.*, 2000, vol. 44, iss. 9, pp. 58–71.
30. Trynin A. Yu. Differential properties of zeros of eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 3, iss. 4, pp. 133–143 (in Russian).
31. Trynin A. Yu. On inverse nodal problem for Sturm – Liouville operator. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, iss. 4, pp. 112–124. DOI: 10.13108/2013-5-4-112.
32. Trynin A. Yu. The divergence of Lagrange interpolation processes in eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem. *Russian Math.*, 2010, vol. 54, iss. 11, pp. 66–76. DOI: 10.3103/S1066369X10110071.
33. Trynin A. Yu. Printsip lokalizatsii dlia protsessov Lagranzha – Shturma – Liuvillia [The localization principle for the Lagrange – Sturm – Liouville processes]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2006, iss. 8, pp. 137–140 (in Russian).
34. Trynin A. Yu. Ob odnom integral'nom priznake skhodimosti protsessov Lagranzha – Shturma – Liuvillia [An integral criterion for the convergence of the Lagrange – Sturm – Liouville processes]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2007, iss. 9, pp. 94–97 (in Russian).
35. Trynin A. Yu. Sushchestvovanie sistem Chebysheva s ogranichennymi konstantami Lebega interpoliatsionnykh protsessov [Existence of Chebyshev systems with limited Lebesgue constants interpolation processes]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2008, iss. 10, pp. 79–81 (in Russian).
36. Trynin A. Yu. Primer sistemy Chebysheva s pochti vsiudu skhodiashcheisia k nuliu posledovatel'nost'iu funktsii Lebega interpoliatsionnykh protsessov [Example Chebyshev system converges almost everywhere to zero Lebesgue functions of the sequence of interpolation processes]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2009, iss. 11, pp. 74–76 (in Russian).
37. Trynin A. Iu., Panfilova I. S. Ob odnom priznake tipa Dini – Lipshitsa skhodimosti obobshchennykh interpoliatsionnykh protsessov Uittekera – Kotel'nikova – Shennona [A criterion such as the Dini – Lipschitz convergence of generalized interpolation processes Whittaker – Nyquist – Shannon]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, iss. 12, pp. 83–87 (in Russian).
38. Trynin A. Iu., Panfilova I. S. O raskhodimosti interpoliatsionnykh protsessov Lagranzha po uzlam Iakobi na mnozhestve polnoi mery [On the divergence of Lagrange interpolation processes on Jacobi nodes on a set of full measure]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, iss. 12, pp. 87–91 (in Russian).
39. Trynin A. Yu. O neobkhodimykh i dostatochnykh usloviiakh ravnomernoi i potochechnoi skhodimosti interpoliatsionnykh protsessov po "vzveshennym"mnogochlenam Iakobi [On necessary and sufficient conditions for the uniform and pointwise convergence of interpolation processes on the "weighted"Jacobi polynomials]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2011, iss. 13, pp. 96–100 (in Russian).
40. Trynin A. Yu. Ob odnoi modifikatsii analoga formuly Nevai dlia sink-priblizhenii nepreryvnykh funktsii na otrezke [A modification of the Nevai formula for analog sinc-approximations of continuous functions on the interval]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2014, iss. 16, pp. 78–81 (in Russian).

41. Trynin A. Yu. O nekotorykh dostatochnykh usloviiakh ravnomernoi skhodimosti sink-approksimatsii [Some sufficient conditions for the uniform convergence of sinc-approximations]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2015, iss. 17, pp. 269–272 (in Russian).

Please cite this article in press as:
Trynin A. Yu. Necessary and Sufficient Conditions for the Uniform on a Segment Sinc-approximations Functions of Bounded Variation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 288–298 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298.

УДК 517.51

ОБ ОПЕРАТОРАХ С РАЗРЫВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ

Г. В. Хромова

Хромова Галина Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

На базе известных операторов из теории приближения функций построены интегральные операторы с разрывной областью значений, позволяющие получать равномерные приближения к непрерывным функциям на всем отрезке их задания.

Ключевые слова: оператор, непрерывная функция, отрезок, равномерные приближения.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-298-302

1. В теории приближения функций при решении целого ряда задач используются интегральные операторы с дельтаобразными ядрами [1]. Это интегралы вида

$$K_\alpha f = \int_a^b K_\alpha(x,t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям:

1) $K_\alpha(x,t) > 0$ и интегрируема по t;

2) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_{|x-t|>\eta} K_\alpha(x,t)dt = 0$ равномерно для всех значений x, каково бы ни было мало число $\eta > 0$;

3) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_{|x-t|\leqslant\eta} K_\alpha(x,t)dt = 1$ равномерно для всех x из промежутка $[a', b']$, где $a < a' < b' < b$.

Теорема 1 (см. [1]). *Для любой $f(x) \in C[a,b]$ имеет место сходимость:*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_a^b K_\alpha(x,t) f(t) dt = f(x)$$

равномерно по x из любого внутреннего отрезка $[a', b'] \subset [a,b]$.

Доказательство. В силу свойства 3) операторов K_α справедливо представление:

$$K_\alpha 1 = 1 + o(1),$$

где $o(1) \to 0$ при $\alpha \to \alpha_0$ равномерно по $x \in [a', b']$, $a < a' < b' < b$. Значит, для таких x

$$f(x) = f(x) K_\alpha 1 + f(x) o(1).$$

Отсюда следует представление

$$K_\alpha f - f = \int\limits_a^b K_\alpha(x,t)(f(t) - f(x))\, dt + f(x) o(1). \tag{2}$$