УДК 517.518.82

ПРАВИЛО СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

И. В. Тихонов[1], В. Б. Шерстюков[2], М. А. Петросова[3]

[1]Тихонов Иван Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики факультета ВМК, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, ivtikh@mail.ru

[2]Шерстюков Владимир Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», shervb73@gmail.com

[3]Петросова Маргарита Арсеновна, аспирантка кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, petrosova05@mail.ru

Изучаются специальные закономерности, возникающие в последовательности полиномов Бернштейна на симметричном отрезке $[-1,1]$. Установлено явное правило регулярного попарного совпадения (правило склеивания), действующее для полиномов Бернштейна в случае кусочно-линейной порождающей функции с рациональными абсциссами точек излома. Показана точность этого правила для выпуклых кусочно-линейных порождающих функций. Отмечена возможность «случайных» склеиваний полиномов Бернштейна в невыпуклом случае. Рассмотрены примеры и иллюстрации.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, симметричный отрезок, кусочно-линейные функции, правило склеивания.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-288-300

Полиномы Бернштейна, помимо фундаментальных аппроксимирующих свойств, подчинены многочисленным комбинаторным и алгебраическим закономерностям, запись которых может изменяться при переносе конструкции на другой отрезок. В настоящем сообщении будет проведено исследование тех принципов, что действуют на симметричном отрезке $[-1,1]$. Установленные правила представляют интерес при практическом использовании полиномов Бернштейна.

1. ПОЛИНОМЫ БЕРНШТЕЙНА

Для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$, *полиномы Бернштейна* вводят формулой

$$B_n(f,x)=\frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{(b-a)k}{n}+a\right) C_n^k\,(x-a)^k\,(b-x)^{n-k},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Здесь x — вещественная переменная, а C_n^k — биномиальные коэффициенты:

$$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!},\qquad n\in\mathbb{N},\qquad k=0,\,1,\,\ldots,\,n;\qquad C_0^0=1.$$

Ясно, что $B_n(f,x)$ — алгебраический полином переменной x, причем

$$\deg B_n(f,x)\leqslant n,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

В случае простейшего отрезка $[\,0,1]$ получаем *стандартные полиномы Бернштейна*:

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\,x^k\,(1-x)^{n-k},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Обычно изучают именно их (см. [1–5]).

Сейчас нас интересует случай симметричного отрезка $[-1,1]$, имеющий свою специфику. Согласно общему определению полиномы Бернштейна для функции $f\in C[-1,1]$ вводят формулой

$$B_n(f,x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n}-1\right) C_n^k\,(1+x)^k\,(1-x)^{n-k},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Случай симметричного отрезка важен для практики. Структура многих функций более естественно проявляется на $[-1,1]$, чем при переносе этих функций на $[\,0,1]$.

Непосредственное вычисление полиномов Бернштейна часто выявляет любопытные закономерности. Некоторые из них допускают простое объяснение, другие требуют специального анализа. Приведем пример, сочетающий сразу несколько особенностей.

2. ХАРАКТЕРНЫЙ ПРИМЕР

Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -1 \leqslant x \leqslant -1/2, \\ 0, & -1/2 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 2x-1, & 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Функция (2) является нечетной, кусочно-линейной на $[-1, 1]$ с изломами в точках

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

График функции представлен на рисунке.

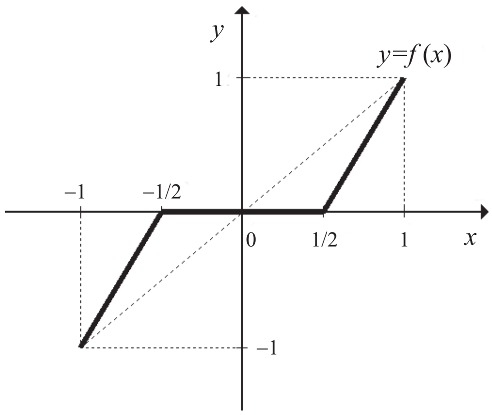

График функции (2)

Прямые вычисления по формуле (1) дают несколько первых полиномов Бернштейна:

$$B_1(f,x) = x, \qquad B_2(f,x) = x, \qquad B_3(f,x) = \frac{1}{4}\left(3x + x^3\right),$$

$$B_4(f,x) = \frac{1}{2}\left(x + x^3\right), \qquad B_5(f,x) = \frac{1}{2}\left(x + x^3\right),$$

$$B_6(f,x) = \frac{1}{16}\left(7x + 10x^3 - x^5\right), \qquad B_7(f,x) = \frac{1}{32}\left(11x + 25x^3 - 3x^5 - x^7\right),$$

$$B_8(f,x) = \frac{1}{8}\left(2x + 7x^3 - x^7\right), \qquad B_9(f,x) = \frac{1}{8}\left(2x + 7x^3 - x^7\right).$$

Обратим внимание на такие особенности. Большинство полиномов представленного списка *вырождаются*, т. е. имеют степень меньше собственного номера. Отчасти это связано с соображениями нечетности, но, впрочем, не только. Также влияют совпадения

$$B_2(f,x) = B_1(f,x), \qquad B_5(f,x) = B_4(f,x), \qquad B_9(f,x) = B_8(f,x).$$

Первое из них вызвано особыми причинами — тем, что точки графика с абсциссами $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ попадают на одну прямую $y = x$ (ср. рисунок и лемму 5). Последующие совпадения вида

$$B_{4m+1}(f,x) = B_{4m}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

будут регулярными и продолжатся до бесконечности. Причина заключена в точках излома (3). Отнюдь не очевидно, но правило (4) «учитывает» то, что в записи несократимых дробей (3) содержится четное число (см. теорему 1).

Отмеченные обстоятельства требуют осмысления. Начнем с элементарных наблюдений, связанных с четностью или нечетностью порождающей функции.

3. СООБРАЖЕНИЯ ЧЕТНОСТИ И НЕЧЕТНОСТИ

Симметричный отрезок $[-1,1]$ естественно приспособлен для изучения четных и нечетных функций. Логично предположить, что полиномы (1) наследуют свойства четности или нечетности порождающей функции $f(x)$. Это действительно так.

Лемма 1. *Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле* (1). *Тогда справедливы утверждения:*

1) *если $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in [-1,1]$, то*

$$B_n(f,-x) = B_n(f,x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}; \tag{5}$$

2) *если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-1,1]$, то*

$$B_n(f,-x) = -B_n(f,x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Доказательство. При всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $n \in \mathbb{N}$ по формуле (1) получаем:

$$B_n(f,-x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \, (1-x)^k \, (1+x)^{n-k} = \{\, k = n - m \,\} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{2(n-m)}{n} - 1\right) C_n^{n-m} \, (1-x)^{n-m} \, (1+x)^m =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} f\left(1 - \frac{2m}{n}\right) C_n^m \, (1+x)^m \, (1-x)^{n-m}.$$

Обозначим индекс суммирования снова через k. В результате имеем:

$$B_n(f,-x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) C_n^k \, (1+x)^k \, (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Если $f(x)$ является четной, то

$$f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) = f\left(\frac{2k}{n} - 1\right).$$

Сравнивая (1) и (7), видим, что тогда $B_n(f,-x) = B_n(f,x)$, т. е. выполнено соотношение (5).

Если $f(x)$ является нечетной, то

$$f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) = -f\left(\frac{2k}{n} - 1\right).$$

Но тогда $B_n(f,-x) = -B_n(f,x)$, т. е. выполнено соотношение (6). Тем самым, оба утверждения леммы доказаны. □

Итак, полиномы Бернштейна (1), построенные по четной функции $f(x)$, содержат в алгебраической записи только четные степени x. Аналогично, полиномы, построенные по нечетной функции $f(x)$, содержат в алгебраической записи только нечетные степени x. Это обстоятельство влечет за собой следующее *свойство вырожденности*, действующее для полиномов Бернштейна четных или нечетных функций.

Лемма 2. *Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле* (1). *Тогда справедливы такие утверждения:*

1) *если $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in [-1,1]$, то*

$$\deg B_{2m+1}(f,x) \leqslant 2m, \qquad m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\};$$

2) *если $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-1,1]$, то*

$$\deg B_{2m}(f,x) \leqslant 2m - 1, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Отмеченные соотношения суть прямые следствия того, что полиномы Бернштейна сохраняют четность или нечетность порождающей функции $f(x)$. $\square$

Перечисленные соображения полезны на практике, но элементарны и приведены для полноты изложения. Более тонким является другой вопрос — о появлении в последовательности полиномов Бернштейна регулярно совпадающих (склеивающихся) пар. Точный закон такого совпадения будем называть *правилом склеивания*. Основные результаты на сей счет представлены в следующем пункте.

4. ПРАВИЛО СКЛЕИВАНИЯ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Возможность попарных совпадений в последовательности полиномов Бернштейна впервые подмечена в [6] для кусочно-линейных выпуклых функций $f(x)$ на $[0,1]$. Некоторые аспекты такого явления изучались затем в [7–10]. Формулировка, восходящая к [6], кажется нам не вполне удачной: соотношение $B_{n+1}(f,x)=B_n(f,x)$ с фиксированным $n\in\mathbb{N}$ гарантируется для стандартных полиномов Бернштейна на $[0,1]$ при условии, что функция $f(x)$ линейна на отрезках вида

$$\left[\frac{j-1}{n},\,\frac{j}{n}\right],\qquad j=1,\,\dots,\,n.$$

Подобный подход, исходящий из номера совпадения, а не из особенностей выбранной функции, не слишком удобен на практике. Поставим, например, вопрос о возможных совпадениях стандартных полиномов Бернштейна для кусочно-линейной функции $f(x)$, заданной на $[0,1]$, с изломами в точках

$$x_1=\frac{1}{7},\qquad x_2=\frac{1}{6},\qquad x_3=\frac{1}{5},\qquad x_4=\frac{1}{4},\qquad x_5=\frac{1}{3},\qquad x_6=\frac{1}{2}.\tag{8}$$

Пользуясь указанной формулировкой, трудно угадать правильный ответ, который состоит в том, что $B_{420m+1}(f,x)=B_{420m}(f,x)$ при любом $m\in\mathbb{N}$.

Более практичная формулировка предложена в [11]: на $[0,1]$ действует универсальное правило $B_{qm+1}(f,x)=B_{qm}(f,x)$, где $m\in\mathbb{N}$, а q — наименьший общий знаменатель дробей, выражающих абсциссы точек излома. От функции $f(x)$ требуется только кусочная линейность, от точек излома — только рациональность абсцисс. Прочие соображения оказываются не важны; разбор примера (8) становится элементарным. Отметим также, что наш интерес к проблематике вызван предыдущим исследованием [12], посвященным полиномам Бернштейна для функции

$$f(x)=|2x-1|,\qquad x\in[0,1].$$

В этом принципиальном примере правило склеивания $B_{2m+1}(f,x)=B_{2m}(f,x)$ играло центральную роль. Дополнительные подробности по свойству склеивания на $[0,1]$ представлены в обзоре [5].

Обратимся теперь к симметричному отрезку $[-1,1]$. Простая идея — взять кусочно-линейную функцию на $[-1,1]$, перенести ее на $[0,1]$ и воспользоваться прежними результатами — вполне пригодна в каждом конкретном случае. Но такой подход не позволяет выявить подлинной закономерности. Дело в том, что несократимые дроби на $[-1,1]$ переходят в некие дроби на $[0,1]$, чей наименьший общий знаменатель сложно зависит от характера первоначальных дробей на $[-1,1]$. Желательно дать универсальное правило в терминах исходной функции. Окончательный результат выглядит так.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно-линейна на $[-1,1]$ с конечным числом точек излома, причем абсциссы всех точек излома рациональны и записаны в виде несократимых дробей*

$$x_j=\frac{p_j}{q_j},\qquad j=1,\,\dots,\,r,\tag{9}$$

где

$$p_j\in\mathbb{Z},\qquad q_j\in\mathbb{N},\qquad |p_j|<q_j,\qquad j=1,\,\dots,\,r.\tag{10}$$

Пусть q — наименьшее общее кратное знаменателей $q_1,\dots,q_r$. Тогда если все числа p_j, q_j, $j=1,\,\dots,\,r$, являются нечетными, то полиномы Бернштейна (1) *функции $f(x)$ подчинены правилу попарного склеивания:*

$$B_{qm+1}(f,x)=B_{qm}(f,x),\qquad m\in\mathbb{N}.\tag{11}$$

Если же среди чисел p_j, q_j, $j=1,\ldots,r$, есть хотя бы одно четное число, то правило склеивания приобретает вид

$$B_{2qm+1}(f,x)=B_{2qm}(f,x), \qquad m\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

Представленные правила (11) и (12) описывают регулярные цепочки склеиваний, неизбежно возникающие в последовательностях полиномов Бернштейна для кусочно-линейных функций на $[-1,1]$. Полезно иметь в виду, что при дополнительном требовании *выпуклости*, наложенном на порождающую функцию $f(x)$, какие-либо иные попарные совпадения, кроме отмеченных в теореме 1, будут уже невозможны. Другими словами, справедлив такой результат, показывающий точность теоремы 1 для выпуклых кусочно-линейных функций.

Теорема 2. *Пусть непрерывная кусочно-линейная функция $f(x)$ удовлетворяет предположениям теоремы 1 и, кроме того, является выпуклой вверх или выпуклой вниз на $[-1,1]$. Тогда для полиномов Бернштейна* (1) *функции $f(x)$ действует соотношение*

$$B_{n+1}(f,x)\neq B_n(f,x) \tag{13}$$

при всех номерах $n\in\mathbb{N}$, кроме указанных в теореме 1.

Точнее, если несократимые дроби (9), *выражающие абсциссы точек излома функции $f(x)$, содержат только нечетные значения p_j, q_j, $j=1,\ldots,r$, то соотношение* (13) *действует при всех $n\in\mathbb{N}$, кроме случаев, отмеченных в правиле* (11). *Значение q в правиле* (11) *есть наименьшее общее кратное для знаменателей дробей* (9).

Если же несократимые дроби (9) *содержат в своей записи хотя бы одно четное число среди значений p_j, q_j, $j=1,\ldots,r$, то соотношение* (13) *действует при всех $n\in\mathbb{N}$, кроме случаев, отмеченных в правиле* (12), *где q — по-прежнему наименьшее общее кратное для знаменателей дробей* (9).

Теоремы 1 и 2 являются основными результатами статьи. Для замкнутости изложения обоснуем их независимо, не апеллируя к отрезку $[0,1]$. Ключевую роль в рассуждениях играет специальная формула, выражающая разность двух последовательных полиномов Бернштейна.

5. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФОРМУЛА ТЕМПЛА

Нужная формула впервые появилась в работе Темпла [13] для стандартных полиномов Бернштейна на $[0,1]$. Позже и независимо это же соотношение переоткрывалось в работах [6, 14] (см. также [3, с. 115] и [4, с. 309–310]). Модификация на $[-1,1]$ выглядит более громоздко, но будет полезной при систематическом изучении полиномов Бернштейна на симметричном отрезке. Приведем соответствующий результат вместе с полным выводом.

Лемма 3. *Пусть $f\in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле* (1). *Тогда*

$$B_{n+1}(f,x)-B_n(f,x)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n} Q_{n,k}(f)\,(1+x)^k\,(1-x)^{n-k+1}, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{14}$$

где

$$Q_{n,k}(f)=C_{n+1}^k\,f\left(\frac{2k}{n+1}-1\right)-C_n^k\,f\left(\frac{2k}{n}-1\right)-C_n^{k-1}f\left(\frac{2(k-1)}{n}-1\right). \tag{15}$$

Доказательство. Основываясь на (1), имеем:

$$B_n(f,x)=B_n(f,x)\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n}-1\right)C_n^k\Big[(1+x)^k\,(1-x)^{n-k+1}+(1+x)^{k+1}\,(1-x)^{n-k}\Big].$$

Разобьем на две суммы и во второй перейдем к нумерации по k от 1 до $n+1$. Получим:

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \,(1+x)^k\,(1-x)^{n-k+1} +$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} f\left(\frac{2(k-1)}{n} - 1\right) C_n^{k-1}\,(1+x)^k\,(1-x)^{n-k+1}.$$

Из первой суммы выделим слагаемое с $k=0$, из второй — с $k=n+1$. В итоге

$$B_n(f,x) = \frac{1}{2^{n+1}}\Big(f(-1)(1-x)^{n+1} + f(1)(1+x)^{n+1}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \left[C_n^k\, f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) + C_n^{k-1}\, f\left(\frac{2(k-1)}{n} - 1\right)\right](1+x)^k\,(1-x)^{n-k+1}.$$

Для полинома $B_{n+1}(f,x)$ имеем соответственно

$$B_{n+1}(f,x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{2k}{n+1} - 1\right) C_{n+1}^k\,(1+x)^k\,(1-x)^{n-k+1} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\Big(f(-1)(1-x)^{n+1} + f(1)(1+x)^{n+1}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k\, f\left(\frac{2k}{n+1} - 1\right)\,(1+x)^k\,(1-x)^{n-k+1}.$$

Взяв разность $B_{n+1}(f,x) - B_n(f,x)$, приходим к заявленной формуле (14) с коэффициентами вида (15). □

Тот же Темпл, первым подметил в [13], что коэффициенты подобных формул допускают геометрическое истолкование (см. также [4, с. 309–310] и [6, 14]). В нашем случае эта идея воплощается так.

Рассмотрим коэффициенты $Q_{n,k}(f)$ в записи (15). Применим тождество

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$$

и получим

$$Q_{n,k}(f) = C_n^{k-1}\left(f\left(\frac{2k}{n+1} - 1\right) - f\left(\frac{2(k-1)}{n} - 1\right)\right) - C_n^k\left(f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) - f\left(\frac{2k}{n+1} - 1\right)\right).$$

Теперь, воспользовавшись обозначением для разделенных разностей

$$[f;\; x_1, x_0] \equiv \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

нетрудно проверить, что

$$Q_{n,k}(f) = -\frac{2}{n+1}\, C_{n-1}^{k-1}\left(\left[f;\, \frac{2k}{n} - 1,\, \frac{2k}{n+1} - 1\right] - \left[f;\, \frac{2k}{n+1} - 1,\, \frac{2(k-1)}{n} - 1\right]\right). \tag{16}$$

Переходя к разделенным разностям второго порядка

$$[f;\; x_2, x_1, x_0] \equiv \frac{[f;\; x_2, x_1] - [f;\; x_1, x_0]}{x_2 - x_0},$$

имеем запись

$$Q_{n,k}(f) = -\frac{4}{n(n+1)}\, C_{n-1}^{k-1}\left[f;\; \frac{2k}{n} - 1,\; \frac{2k}{n+1} - 1,\; \frac{2(k-1)}{n} - 1\right]. \tag{17}$$

При работе с формулами (16), (17) полезно учитывать расположение точек

$$-1 \leqslant \frac{2(k-1)}{n} - 1 < \frac{2k}{n+1} - 1 < \frac{2k}{n} - 1 \leqslant 1, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

верное при любом $n \in \mathbb{N}$.

6. НУЖНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛЫ ТЕМПЛА

Выясним теперь, при каких условиях возможно совпадение двух последовательных полиномов Бернштейна. Ясно, что вся необходимая информация заложена в формулу Темпла (14). Наиболее удобно работать с коэффициентами в записи (17), поскольку разделенные разности второго порядка имеют прозрачный геометрический смысл.

Справедлив очевидный принцип: разделенная разность $[f;\, x_2, x_1, x_0]$ равна нулю тогда и только тогда, когда тройка точек

$$(x_0,\, f(x_0)), \quad (x_1,\, f(x_1)), \quad (x_2,\, f(x_2))$$

расположена на одной прямой. Отсюда извлекаем следующий результат.

Лемма 4. *Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле* (1). *Для выполнения соотношения*

$$B_{\nu+1}(f,x) = B_\nu(f,x) \tag{18}$$

с некоторым фиксированным значением $\nu \in \mathbb{N}$ необходимо и достаточно, чтобы при каждом $k \in \{\,1,\, \ldots,\, \nu\,\}$ точка

$$\left(\frac{2k}{\nu+1} - 1,\ f\left(\frac{2k}{\nu+1} - 1\right)\right) \tag{19}$$

находилась на прямой, соединяющей точки

$$\left(\frac{2(k-1)}{\nu} - 1,\ f\left(\frac{2(k-1)}{\nu} - 1\right)\right), \qquad \left(\frac{2k}{\nu} - 1,\ f\left(\frac{2k}{\nu} - 1\right)\right). \tag{20}$$

Доказательство. Согласно формуле (14), примененной к фиксированному значению $n = \nu$, для выполнения соотношения (18) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $Q_{\nu,k}(f)$ обращались в нуль при $k = 1,\, \ldots,\, \nu$. Достаточность понятна. Для доказательства необходимости надо заметить, что система функций

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{2^{\nu+1}}\,(1+x)^k\,(1-x)^{\nu-k+1}, \qquad k = 1,\, \ldots,\, \nu,$$

линейно независима на $[-1,1]$, поскольку после подстановки $x = \gamma(t) \equiv (t-1)/(t+1)$ с переменной $t \geqslant 0$ получим систему

$$\psi_k(t) \equiv \varphi_k(\gamma(t)) = \frac{t^k}{(t+1)^{\nu+1}}, \qquad k = 1,\, \ldots,\, \nu,$$

очевидно линейно независимую на $[0,\infty)$. Основываясь затем на записи (17), замечаем, что каждый коэффициент $Q_{\nu,k}(f)$ равен нулю тогда и только тогда, когда соответствующая точка (19) попадает на прямую, соединяющую точки (20). Лемма доказана. $\square$

Особо отметим следующий частный случай леммы 4. Он, кстати, был реализован ранее в примере для функции (2).

Лемма 5. *Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле* (1). *Для выполнения соотношения*

$$B_2(f,x) = B_1(f,x) \tag{21}$$

необходимо и достаточно, чтобы серединная точка $(0,\, f(0))$ графика функции $f(x)$ находилась на прямой, соединяющей концевые точки $(-1,\, f(-1))$, $(1,\, f(1))$. В частности, для выпуклой на $[-1,1]$ функции $f(x)$ (неважно, выпуклой вверх или выпуклой вниз) соотношение (21) *возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ линейна на $[-1,1]$.*

Доказательство. Утверждение леммы 5 непосредственно следует из леммы 4, взятой со значением $\nu = 1$. Понятно, что в выпуклом случае промежуточная точка $(0,\, f(0))$ может находиться на прямой, соединяющей концевые точки $(-1,\ f(-1))$, $(1,\ f(1))$, тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ линейна на $[-1,1]$. $\square$

Совпадение (21) возникает обычно изолировано — оно не вписывается в общие правила (11), (12), отмеченные в теореме 1. Приведем теперь другой результат, также основанный на лемме 4, но имеющий прямое отношение к регулярным цепочкам склеиваний.

Лемма 6. *Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле* (1). *Предположим, что функция $f(x)$ кусочно-линейна на $[-1,1]$ с конечным числом точек излома, абсциссы которых рациональны и записаны в виде несократимых дробей* (9) *при ограничениях* (10). *Допустим, что дроби* (9) *представимы в виде*

$$\frac{p_j}{q_j} = \frac{2k_j}{\nu} - 1, \qquad k_j \in \mathbb{N}, \qquad k_j < \nu, \qquad j = 1, \ldots, r, \tag{22}$$

с общим фиксированным значением $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 2$. Тогда для такого ν имеет место совпадение (18).

Доказательство. Действительно, пусть дроби (9), выражающие абсциссы точек излома, представимы в виде (22) с общим фиксированным значением $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 2$. Тогда все отрезки

$$\Delta_k = \left[\,\frac{2(k-1)}{\nu} - 1,\ \frac{2k}{\nu} - 1\,\right], \qquad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, \nu, \tag{23}$$

попадают на промежутки линейности функции $f(x)$, и при каждом $k \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, \nu\}$ точка (19) находится на прямой, соединяющей точки (20). Применяя лемму 4, получаем требуемое соотношение (18). $\square$

Для выпуклых функций утверждение леммы 6 допускает такое обращение (ср. с [3, с. 115] и [6, с. 253], где аналогичное свойство с несколько иной точки зрения обсуждается на стандартном отрезке $[0,1]$).

Лемма 7. *Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна $B_n(f,x)$, определенными по формуле* (1). *Предположим, что функция $f(x)$ выпукла вверх или выпукла вниз на $[-1,1]$ и отлична от линейной функции. Допустим, что при некотором $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 2$, имеет место совпадение* (18). *Тогда функция $f(x)$ является кусочно-линейной на $[-1,1]$ с конечным числом точек излома, количество которых $r \in \mathbb{N}$ подчинено ограничению $r < \nu$. Абсциссы точек излома рациональны, и дроби, их выражающие, представимы в виде* (22) *с тем же значением ν, что и в* (18).

Доказательство. Действительно, пусть выполнено соотношение (18) с некоторым фиксированным значением $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 2$. По лемме 4 каждая промежуточная точка (19) должна попадать на прямую, соединяющую соответствующие точки (20). Для выпуклой функции это возможно, если $f(x)$ линейна на каждом отрезке (23). Следовательно, функция $f(x)$ непременно будет кусочно-линейной; ее точки излома находятся среди концевых точек отрезков (23) и допускают представление вида (22). Количество таких точек может быть любым числом $r \in \mathbb{N}$, подчиненным ограничению $r < \nu$. Лемма доказана. $\square$

После проделанной подготовительной работы можно приступить к доказательству основных теорем 1 и 2.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно-линейна на $[-1,1]$ с конечным числом точек излома. Считаем, что абсциссы всех точек излома рациональны и записаны в виде несократимых дробей (9) с естественными ограничениями (10).

По лемме 6 если дроби (9) представимы в виде (22) с фиксированным $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 2$, то гарантировано совпадение (18) с тем же значением $\nu \in \mathbb{N}$. Другими словами, представления (22) *достаточны* для совпадения (18). Более того, по лемме 7 если $f(x)$ является выпуклой на $[-1,1]$ (неважно, выпуклой вверх или выпуклой вниз), то представления (22) не только достаточны, но и *необходимы* для совпадения (18). Проанализируем представления (22) и установим, при каких ν они возможны.

Выражая из (22) значения k_j, получим:

$$k_j = \frac{(p_j + q_j)\,\nu}{2q_j}, \qquad j = 1, \ldots, r. \tag{24}$$

С учетом предположений (10) ясно, что $0 < k_j < \nu$. Но числа k_j обязаны быть также натуральными. Выявим точное ограничение на ν, обусловленное данным требованием. Именно оно необходимо и достаточно для справедливости представлений (22).

Поскольку дроби p_j/q_j считаем несократимыми, то дроби $(p_j+q_j)/q_j$ тоже несократимы. Поэтому число ν в (24) должно делиться нацело на наименьшее общее кратное q чисел $q_1, \ldots, q_r$. Наличие двойки в знаменателях дробей (24) влечет необходимость различать два случая.

Допустим сначала, что все числа p_j, q_j, $j = 1, \ldots, r$, являются нечетными. В таком случае все суммы $p_j + q_j$ окажутся четными, и для принадлежности чисел (24) множеству $\mathbb{N}$ необходимо и достаточно, чтобы $\nu = qm$ с некоторым значением $m \in \mathbb{N}$. Итак, для справедливости представлений (22) необходимо и достаточно, чтобы $\nu = qm$ с некоторым значением $m \in \mathbb{N}$. Но тогда действует правило склеивания (11), как и утверждает теорема 1. Более того, если $f(x)$ является выпуклой на $[-1, 1]$, то никакие иные последовательные совпадения, кроме (11), становятся невозможны, как утверждает теорема 2.

Пусть теперь среди чисел p_j, q_j, $j = 1, \ldots, r$, есть какие-то четные, например, в парах

$$p_{j_s},\ q_{j_s}, \qquad s = 1, \ldots, t.$$

Так как дроби (9) предполагаем несократимыми, то в каждой такой паре может быть только один четный элемент, и, значит, все суммы $p_{j_s} + q_{j_s}$, $s = 1, \ldots, t$, заведомо окажутся нечетными. Следовательно, для принадлежности чисел (24) множеству $\mathbb{N}$ необходимо и достаточно, чтобы ν делилось нацело на

$$2q_{j_1}, \ldots, 2q_{j_t}, \tag{25}$$

а также на все остальные числа

$$q_j, \quad j \notin \{\, j_1, \ldots, j_t \,\}, \tag{26}$$

если они есть. Среди чисел (26) четные точно отсутствуют. Поэтому наименьшим общим кратным всех чисел (25), (26) будет $2q$, и значение ν обязано делиться на $2q$. Точнее, для принадлежности чисел (24) множеству $\mathbb{N}$ необходимо и достаточно, чтобы $\nu = 2qm$ с некоторым $m \in \mathbb{N}$. Тем самым, для справедливости представлений (22) необходимо и достаточно, чтобы $\nu = 2qm$ с некоторым значением $m \in \mathbb{N}$. Но тогда действует правило склеивания (12). Более того, если $f(x)$ является выпуклой на $[-1, 1]$, то никакие иные последовательные совпадения, кроме (12), становятся невозможны.

Теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

8. ПРИМЕРЫ И КОММЕНТАРИИ

Установленные правила позволяют быстро выявлять регулярные цепочки склеиваний в последовательностях полиномов Бернштейна для кусочно-линейных функций на $[-1, 1]$. Требуется только следить, какой из случаев — (11) или (12) — соответствует имеющимся точкам излома. Для наглядности приведем несколько примеров. Как и прежде, обозначаем через q наименьшее общее кратное (НОК) знаменателей $q_1, \ldots, q_r$ несократимых дробей (9), выражающих абсциссы точек излома. Другими словами, значение q есть наименьший общий знаменатель указанных дробей.

1. Пусть $f(x) = |3x - 1|$ на $[-1, 1]$. Функция имеет точку излома с абсциссой $x_1 = 1/3$. Здесь $p_1 = 1$, $q_1 = 3$ и $q = 3$. Числа p_1, q_1 являются нечетными, и по формуле (11) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой $B_{3m+1}(f, x) = B_{3m}(f, x)$ при $m \in \mathbb{N}$.

2. Пусть $f(x) = |2x - 1|$ на $[-1, 1]$. Функция имеет точку излома с абсциссой $x_1 = 1/2$. Здесь $p_1 = 1$, $q_1 = 2$ и $q = 2$, причем число q_1 является четным. По формуле (12) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой $B_{4m+1}(f, x) = B_{4m}(f, x)$ при $m \in \mathbb{N}$.

3. Пусть $f(x) = |5x+3| + |3x-1|$ на $[-1, 1]$. Функция имеет точки излома с абсциссами $x_1 = -3/5$, $x_2 = 1/3$. Числа $p_1 = -3$, $q_1 = 5$, $p_2 = 1$, $q_2 = 3$ являются нечетными, причем $q = \text{НОК}(5, 3) = 15$. По формуле (11) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой $B_{15m+1}(f, x) = B_{15m}(f, x)$ при $m \in \mathbb{N}$.

4. Пусть $f(x) = |5x+3|+|3x-2|$ на $[-1,1]$. Функция имеет точки излома с абсциссами $x_1 = -3/5$, $x_2 = 2/3$. Здесь $p_1 = -3$, $q_1 = 5$, $p_2 = 2$, $q_2 = 3$. Снова $q =$ НОК(5, 3) = 15, но число $p_2 = 2$ является четным. По формуле (12) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой $B_{30m+1}(f,x) = B_{30m}(f,x)$ при $m \in \mathbb{N}$, что в два раза реже, чем в предыдущем примере.

5. Пусть $f(x) = |7x-1|+|6x-1|+|5x-1|+|4x-1|+|3x-1|+|2x-1|$ на $[-1,1]$. Функция имеет те же точки излома, что и в примере (8), обсуждавшемся на $[0,1]$ ранее. Поскольку в записи дробей (8) встречаются четные числа, то по формуле (12) полиномы Бернштейна на $[-1,1]$ склеиваются цепочкой $B_{840m+1}(f,x) = B_{840m}(f,x)$ при $m \in \mathbb{N}$, что в два раза реже, чем для того же выражения $f(x)$, но взятого на $[0,1]$.

6. Пусть $f(x) = |x|$ на $[-1,1]$. Единственная точка излома $x_1 = 0$ дает значения $p_1 = 0$, $q_1 = 1$ и $q = 1$. Так как число p_1 является четным, то по формуле (12) полиномы Бернштейна склеиваются цепочкой

$$B_{2m+1}(f,x) = B_{2m}(f,x), \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Регулярная цепочка (27) — наиболее «частая» из возможных. Ее также порождает любая другая кусочно-линейная функция на $[-1,1]$ с единственной точкой излома в нуле. Отметим, кстати, что свойство склеивания обладает сильной неустойчивостью, и при малейших возмущениях точки излома регулярная цепочка склеиваний «переформатируется», выдавая результат, сколь угодно далекий от исходного.

7. Пусть $f(x) = |x|$, $f_1(x) = |x - x_1|$, $f_2(x) = |x - x_2|$ на $[-1,1]$ со значениями

$$x_1 \equiv \frac{1}{1001}, \qquad x_2 \equiv \frac{1}{1002}.$$

Структура функций однотипна, значения близки, но правило склеивания действует совершенно по-разному: для функции $f(x)$ выполнено прежнее соотношение (27), в то время как для возмущенных функций имеем цепочки

$$B_{1001m+1}(f_1,x) = B_{1001m}(f_1,x), \quad B_{2004m+1}(f_2,x) = B_{2004m}(f_2,x), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Поскольку НОК(2, 1001, 2004) $= 1001 \cdot 2004 = 2006004$, то первое совместное совпадение произойдет лишь на номере $\nu = 2006004$, когда

$$B_{2006005}(f,x) \equiv B_{2006004}(f,x), \quad B_{2006005}(f_k,x) \equiv B_{2006004}(f_k,x), \quad k = 1,2,$$

сразу для трех указанных функций.

В представленных примерах все функции являются выпуклыми вниз на $[-1,1]$. По теореме 2 отсюда следует, что среди их полиномов Бернштейна нет никаких других последовательных совпадений, кроме указанных выше по правилам теоремы 1. Иначе говоря, в примерах 1–7 указанными цепочками склеиваний всё и исчерпывается.

Более того, для полиномов Бернштейна от непрерывной выпуклой функции никакие случайные склеивания вообще невозможны, и ситуация полностью покрывается леммами 5, 7 и теоремами 1, 2. Действительно, пусть, например, функция $f(x)$ непрерывна и выпукла вниз (или вверх) на $[-1,1]$ и отлична от линейной функции. По лемме 7 хоть одно разовое совпадение двух последовательных полиномов Бернштейна непременно влечет соответствующую кусочно-линейную природу функции $f(x)$. Но тогда к полиномам Бернштейна для $f(x)$ будет применима теорема 1, гарантирующая наличие регулярной цепочки склеиваний, причем по теореме 2 исходное разовое совпадение полиномов Бернштейна должно встроиться в эту цепочку.

Без требования выпуклости картина сложнее. Исправляя неточность, допущенную в [5, с. 144], специально подчеркнем, что в невыпуклом случае, помимо регулярных цепочек склеиваний, возможны и случайные совпадения отдельных полиномов, возникающие из-за специфики той или иной порождающей функции. Соответствующий пример уже фигурировал в п. 2 для функции $f(x)$ из формулы (2). Напомним, что там $B_2(f,x) = B_1(f,x) = x$ вне всякой связи с регулярным законом (4). Отмеченное совпадение полностью объясняется частной леммой 5. Множество других примеров случайных склеиваний без труда строится с учетом основной леммы 4. Обсудим это обстоятельство отдельно.

9. СЛУЧАЙНОЕ СКЛЕИВАНИЕ В НЕВЫПУКЛОМ СЛУЧАЕ

Каждое разовое совпадение $B_{\nu+1}(f,x)=B_\nu(f,x)$ двух последовательных полиномов Бернштейна должно быть согласовано с леммой 4. Однако точки (19) могут «случайно» оказаться на прямых, соединяющих соответствующие точки (20), без непосредственной связи с расположением точек излома. Именно так и происходит со значением $\nu=1$ для функции (2), когда точка графика $(0,f(0))$ попадает на прямую, проходящую через точки $(-1,f(-1))$ и $(1,f(1))$ (см. рисунок).

Развивая идею, легко указать конструкцию кусочно-линейной функции $f(x)$ с выполненным соотношением $B_{\nu+1}(f,x)=B_\nu(f,x)$ для любого заранее предписанного значения $\nu\geqslant 2$, не обусловленного теоремой 1.

Проще всего поступить следующим образом. Зафиксируем значение $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\geqslant 2$, и рассмотрим точки
$$x_{\nu,k}\equiv\frac{2k}{\nu}-1,\quad k=0,1,\ldots,\nu;\qquad x_{\nu+1,k}\equiv\frac{2k}{\nu+1}-1,\quad k=1,\ldots,\nu,$$
расположив их в одну возрастающую последовательность:
$$-1=x_{\nu,0}<x_{\nu+1,1}<x_{\nu,1}<x_{\nu+1,2}<x_{\nu,2}<\ \ldots\ <x_{\nu,\nu-1}<x_{\nu+1,\nu}<x_{\nu,\nu}=1. \qquad (28)$$
Проведем теперь ломаную так, чтобы ее последовательные изломы располагались между точками (28), а в самих точках (28) ломаная пересекала бы ось абсцисс. Отождествим эту ломаную с графиком кусочно-линейной функции $f(x)$. Поскольку $f(x)$ обращается в нуль во всех точках (28), то $B_{\nu+1}(f,x)=B_\nu(f,x)=0$ просто по определению (1). Ясно, что данное совпадение полностью согласовано с леммой 4, но никак не связано с правилами (11) или (12) из теоремы 1, ибо абсциссы точек излома могут произвольно варьироваться между точками последовательности (28).

Подобная конструкция позволяет построить функцию $f(x)\not\equiv 0$ (кусочно-линейную или даже просто непрерывную, но непременно не выпуклую) с совпадением любой наперед заданной конечной выборки полиномов Бернштейна:
$$B_{n_1}(f,x)=B_{n_2}(f,x)=\ \ldots\ =B_{n_j}(f,x)$$
вне всякой связи с теоремой 1.

Но можно ли хоть для какой-то непрерывной функции $f(x)$ добиться появления бесконечной цепочки регулярных склеиваний, не подпадающих под действие теоремы 1, нам пока неясно. Эта так называемая «проблема Пассоу» [8] до сих пор не решена и требует специального исследования. Разумеется, принципиальный ответ достаточно получить для стандартного отрезка $[0,1]$. Некоторые подготовительные соображения и обсуждение задачи см. в [9, 10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00281).

Библиографический список

1. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. N.Y. : Chelsea Publ. Comp., 1986. xi+134 p.
2. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна : учеб. пособие к спецкурсу. Л. : ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990. 64 с.
3. *Davis P. J.* Interpolation and Approximation. N. Y. : Dover, 1975. xvi+394 p.
4. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Berlin ; Heidelberg ; N.Y. : Springer–Verlag, 1993. x+450 p.
5. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна : старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.
6. *Schoenberg I. J.* On Variation Diminishing Approximation Methods // On Numerical Approximation. Proceedings of a Symposium conducted by the Math. Research Center US Army, University of Wisconsin, Madison, April 21–23, 1958 / ed. by R. E. Langer. Madison : University of Wisconsin Press, 1959. P. 249–274.
7. *Freedman D., Passow E.* Degenerate Bernstein polynomials // J. Approx. Theory. 1983. Vol. 39, № 1. P. 89–92.
8. *Passow E.* Some unusual Bernstein polynomials // Approximation Theory IV. Proc. Intern. Symposium on Approximation Theory Held at Texas A&M University, College Station, Texas, on January 10–14, 1983 / eds. C. K. Chui, L. L. Schumaker,

J. D. Ward. N. Y. ; London : Academic Press, 1983. P. 649–652.

9. *Passow E.* Deficient Bernstein polynomials // J. Approx. Theory. 1989. Vol. 59, № 3. P. 282–285.
10. *Kocić Lj. M., Della Veccia B.* Degeneracy of positive linear operators // Facta Universitatis (Niš). Ser. Mathematics and Informatics. 1998. Vol. 13. P. 59–72.
11. *Петухова Н. Ю., Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Свойство склеивания полиномов Бернштейна для кусочно-линейных непрерывных функций // Математика, информатика, физика в науке и образовании : сб. науч. трудов к 140-летию МПГУ. М. : Прометей, 2012. С. 81–82.
12. *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.
13. *Temple W. B.* Stieltjes integral representation of convex functions // Duke Mathematical Journal. 1954. Vol. 21, № 3. P. 527–531.
14. *Aramă O.* Rroprientăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor // Studii şi cercetări de Matematică (Cluj). 1957. Vol. 8, № 3–4. P. 195–210.

Gluing Rule for Bernstein Polynomials on the Symmetric Interval

I. V. Tikhonov[1], V. B. Sherstyukov[2], M. A. Petrosova[3]

[1]Tikhonov Ivan Vladimirovich, Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, 119991, Moscow, Russia, ivtikh@mail.ru

[2]Sherstyukov Vladimir Borisovich, National Research Nuclear University MEPhI, 31, Kashirskoe shosse, 115409, Moscow, Russia, shervb73@gmail.com

[3]Petrosova Margarita Arsenovna, Moscow Pedagogical State University, 1, M. Pirogovskaya st., 199296, Moscow, Russia, petrosova05@mail.ru

We study special laws that arise in a sequence of the Bernstein polynomials on a symmetric interval. In particular, we set the exact rule of regular pairwise coincidence (gluing rule) which is acting for the Bernstein polynomials of a piecewise linear generating function with rational abscissas of break points. The accuracy of this rule for convex piecewise linear generating functions is shown. The possibility of “random” gluing for the Bernstein polynomials in a non-convex case is noted. We give also some examples and illustrations.

Key words: Bernstein polynomials, symmetric interval, piecewise linear functions, gluing rule.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00281).

References

1. Lorentz G. G. *Bernstein Polynomials*. New York, Chelsea Publ. Comp., 1986, xi+134 p.
2. Videnskii V. S. *Mnogochleny Bernshteina* [Bernstein Polynomials]. Posobie k spetskursu. Leningrad, LGPI, 1990, 64 p. (in Russian).
3. Davis P. J. *Interpolation and Approximation*. New York, Dover, 1975, xvi+394 p.
4. DeVore R. A., Lorentz G. G. *Constructive Approximation*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer–Verlag, 1993, x+450 p.
5. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B., Petrosova M. A. Polynomy Bernshteina: staroe i novoe [Bernstein Polynomials: the old and the new]. *Matematicheskii forum. Issledovaniia po matematicheskomu analizu*, Vladikavkaz, Publ. VNTs RAN, 2014, vol. 8, pt. 1, pp. 126–175 (in Russian).
6. Schoenberg I. J. On Variation Diminishing Approximation Methods. *On Numerical Approximation. Proceedings of a Symposium conducted by the Math. Research Center US Army*, University of Wisconsin, Madison, April 21–23, 1958 / ed. by R. E. Langer. Madison, University of Wisconsin Press, 1959, pp. 249–274.
7. Freedman D., Passow E. Degenerate Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 1983, vol. 39, no. 1, pp. 89–92. DOI: 10.1016/0021-9045(83)90071-0.
8. Passow E. Some unusual Bernstein polynomials. *Approximation Theory IV. Proceedings of the International Symposium on Approximation Theory Held at Texas A&M University*, College Station, Texas, on January 10–14, 1983 / eds. C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. D. Ward. New York, London, Academic Press, 1983, pp. 649–652.
9. Passow E. Deficient Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 1989, vol. 59, no. 3, pp. 282–285. DOI: 10.1016/0021-9045(89) 90092-0.

10. Kocić Lj. M., Della Veccia B. Degeneracy of positive linear operators. *Facta Universitatis (Niš). Ser. Mathematics and Informatics*, 1998, vol. 13, pp. 59–72.
11. Petukhova N. Yu., Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Svoistvo skleivaniia polinomov Bernshteina dlia kusochno-lineinykh nepreryvnykh funktsii [Gluing property of Bernstein polynomials for piecewise linear continuous functions]. *Matematika, informatika, phizika v nauke i obrazovanii. Sbornik nauchnykh trudov k 140-letiyu MPGU*. Moscow, Prometei, 2012, pp. 81–82 (in Russian).
12. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Priblizhenie modulia polinomami Bernshteina [The module function approximation by Bernstein polynomials]. *Vestnik ChelGU. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 15, no. 26, pp. 6–40 (in Russian).
13. Temple W. B. Stieltjes integral representation of convex functions. *Duke Mathematical Journal*, 1954, vol. 21, no. 3, pp. 527–531. DOI: 10.1215/S0012-7094-54-02152-3.
14. Aramă O. Rroprientăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor. *Studii şi cercetări de Matematică (Cluj)*, 1957, vol. 8, no. 3–4, pp. 195–210.

УДК 517.518

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ p-ВАРИАЦИИ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

А. А. Тюленева

Тюленева Анна Анатольевна, аспирантка кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, anantuleneva@mail.ru

В настоящей статье мы изучаем средние Эйлера:

$$e_n^q(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k}(1+q)^{-n} S_k(f)(x), \qquad q \geqslant 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $S_k(f)$ есть k-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье. Для p-абсолютно непрерывных функций ($f \in C_p$, $1 < p < \infty$) мы рассматриваем их приближения средними Эйлера в равномерной и C_p-метрике в терминах модулей непрерывности $\omega_k(f)_{C_p}$, $k \in \mathbb{N}$, и наилучших приближений тригонометрическими полиномами $E_n(f)_{C_p}$. Можно отметить следующее неравенство разных метрик из теоремы 2:

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leqslant C_1(1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

которое является точным. Доказано также следующее обобщение результата Ч. Чуи и А. Холланда.

Если ω является модулем непрерывности на $[0,\pi]$, таким что $\delta \int_\delta^\pi t^{-2}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $1 < p < \infty$ и $f \in C_p$ удовлетворяет двум свойствам: 1) $\omega_2(f,t)_{C_p} \leqslant C\omega(t)$; 2) $\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} t^{-1}\|\varphi_x(t) - \varphi_x(t+2\pi/(n+1))\|_{C_p}\,dt = O(\omega(1/n))$, где $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, то $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leqslant C\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Даны также некоторые приложения к приближениям в метриках типа Гёльдера.

Ключевые слова: функции ограниченной p-вариации, p-абсолютно непрерывные функции, средние Эйлера, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-300-309

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая ограниченная 2π-периодическая функция и $\xi = \{x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Введем p-вариационную сумму:

$$\varkappa_\xi^p(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p}$$