References

1. Steklov V. A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [The main tasks of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1983, 432 p. (in Russian).
2. Krylov A. N. *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniiakh matematicheskoi fiziki, imeiushchikh prilozheniia v tekhnicheskikh voprosakh* [On some differential equations of mathematical physics with applications in technical matters]. Leningrad, GITTL, 1950, 368 p. (in Russian).
3. Chernyatin V. A. *Obosnovanie metoda Fur'e v smeshannoi zadache dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Justification of the Fourier method in a mixed problem for partial differential equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1991, 112 p. (in Russian).
4. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. The resolvent approach for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 2, pp. 227–239. DOI: 10.1134/S0965542515020050.
5. Kornev V. V., Khromov A. P. Resolvent approach to the Fourier method in a mixed problem for the wave equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 4, pp. 618–627. DOI: 10.1134/S0965542515040077.
6. Kornev V. V., Khromov A. P. A resolvent approach in the Fourier method for the wave equation: The non-selfadjoint case. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, iss. 7, pp. 1138–1149. DOI: 10.1134/S0965542515070088.
7. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 783–786.
8. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1971, 538 p. (in Russian).
9. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. New York, Ungar, 1967; Moscow, Nauka, 1969, 828 p.
10. Rasulov M. L. *Metod konturnogo integrala* [The method of the contour integral]. Moscow, Nauka, 1964, 462 p. (in Russian).
11. Vagabov A. I. *Vvedenie v spektral'nuiu teoriiu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, Rostov Univ. Press, 1994, 106 p. (in Russian).
12. Marchenko V. A. *Sturm – Liouville Operators and Applications*. Kiev, Naukova Dumka, 1977, 332 p. (in Russian).

УДК 517.54

О НОВОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С УСЛОВИЕМ НА ЛУЧЕ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ИНДЕКСА

Р. Б. Салимов

Салимов Расих Бахтигареевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov.rsb@gmail.com

Для решения однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом и условием на луче предлагается новый подход, основанный на приведении рассматриваемой задачи к соответствующей задаче с условием на действительной оси и конечным индексом. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в комплексной плоскости z, разрезанной по положительной действительной полуоси L^+, если выполняется краевое условие $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), t \in L^+$, где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ – предельные значения функции $\Phi(z)$, при $z \to t$ соответственно слева и справа, коэффициент $G(t)$ – заданная функция, для аргумента которой справедливо представление $\arg G(t) = \nu^- t^\rho + \nu(t)$, $t \in L^+$, здесь ν^-, ρ — заданные числа, $\nu^- > 0$, $1/2 < \rho < 1$, причём $\ln|G(t)|$, $\nu(t)$ — функции, удовлетворяющие условию Гёльдера. Принимается, что $G(t) = 1$ при $t \in (-\infty, 0)$. Для устранения бесконечного разрыва $\arg G(t)$ используются функции $E^+(z) = e^{(\alpha+i\beta)z^\rho}$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, $E^-(z) = e^{(\alpha-i\beta)z^\rho}$, $-\pi \leqslant \arg z \leqslant 0$, путём соответствующего подбора действительных чисел α, β.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-29-33

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D — область в плоскости комплексного переменного, границей которой служит L^+ — положительная часть действительной оси. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D, если её граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \qquad t \in L^+, \tag{1}$$

где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ — предельные значения функции $\Phi(z)$ при $z \to t$ слева и справа, когда $\mathrm{Im}\,(z) > 0$ и $\mathrm{Im}\,(z) < 0$ соответственно, коэффициент $G(t)$ — заданная функция, удовлетворяющая условиям

1) $\ln|G(t)|$ удовлетворяет условию Гёльдера на L^+ — условию H_{L^+} $(\ln|G(t)| \in H_{L^+})$;

2) для $\arg G(t)$ справедливо представление

$$\arg G(t) = \nu^- t^\rho + \nu(t), \qquad t \in L^+, \tag{2}$$

где ν^-, ρ — заданные числа, $\nu^- > 0$, $1/2 < \rho < 1$, $\nu(t)$ – заданная функция, $\nu(t) \in H_{L^+}$.

Рассматриваемая задача является задачей с бесконечным индексом, так как $\arg G(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

Аналогичная задача рассмотрена в статье [1], в которой краевое условие задавалось на всей действительной оси $L = L^- \cup L^+$, где L^- — отрицательная часть действительной оси L.

Значения искомой функции $\Phi(z)$ будем обозначать $\Phi^+(z) = \Phi(z)$ при $\mathrm{Im}\,(z) > 0$, $\Phi^-(z) = \Phi(z)$ при $\mathrm{Im}\,(z) < 0$.

Тогда для предельных значений этих функций при $z \to t < 0$ будем иметь

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t),$$

следовательно, как и в [2, с. 440], приходим к заключению, что искомые функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, удовлетворяют краевому условию:

$$\Phi^+(t) = G_0(t)\Phi^-(t), \qquad t \in L, \tag{3}$$

где

$$\begin{cases} G_0(t) = G(t), & t \in L^+, \\ G_0(t) = 1, & t \in L^-. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, решение задачи (1) приводится к решению задачи (3), рассмотренной в статье [1].

В настоящей работе используются сведения, приведённые в последней статье [1], и её результаты. Там же указаны основные этапы развития изучаемого научного направления.

Будем считать, что

$$\arg G_0(t) = 0 \qquad \text{при} \qquad t \in L^-. \tag{5}$$

Для простоты предположим, что слагаемое $\nu(t)$ формулы (2) удовлетворяет условиям

$$\nu(0) = \nu(0+0) = 0, \qquad \nu(+\infty) = 0, \tag{6}$$

кроме того,

$$G(0) = |G(0+0)| = 1, \qquad |G(+\infty)| = 1. \tag{7}$$

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Считая α, β действительными числами, введем в рассмотрение функции

$$\begin{cases} E^+(z) = e^{(\alpha+i\beta)z^\rho}, & 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi, \\ E^-(z) = e^{(\alpha-i\beta)z^\rho}, & -\pi \leqslant \arg z \leqslant 0, \end{cases} \tag{8}$$

аналитические и однозначные в полуплоскостях соответственно D^+, D^-, понимая под $\arg z$ ветвь, непрерывную в соответствующей полуплоскости. Для точки $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, области D^+ (когда $z = re^{-i\theta} \in D^-$) имеем:

$$\begin{gathered} |E^+(re^{i\theta})| = |E^-(re^{-i\theta})| = e^{(\alpha\cos\rho\theta - \beta\sin\rho\theta)r^\rho}, \\ \arg E^+(re^{i\theta}) = -\arg E^-(re^{-i\theta}) = (\alpha\sin\rho\theta + \beta\cos\rho\theta)r^\rho. \end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда при $\theta = 0$, когда $z = t > 0$, получим:

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = e^{2i\beta t^\rho}, \qquad t > 0, \tag{10}$$

при $\theta = \pi$, когда $z = t < 0$, будем иметь:

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = e^{2i(\alpha \sin \rho\pi + \beta \cos \rho\pi)|t|^\rho}, \qquad t < 0. \tag{11}$$

Краевое условие (3) запишем так:

$$\Phi^+(t)E^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t)E^-(t), t \in L, \tag{12}$$

где

$$G_1(t) = |G_0(t)|e^{i \arg G_0(t)} \frac{E^+(t)}{E^-(t)}. \tag{13}$$

Принимая во внимание (2), (4), (5), (10), (11), постоянные α, β формул (8) выберем так, чтобы

$$2\beta = -\nu^-, \qquad 2(\alpha \sin \rho\pi + \beta \cos \rho\pi) = 0. \tag{14}$$

Тогда будем иметь

$$\beta = -\frac{\nu^-}{2}, \qquad \alpha = \frac{\nu^- \cos \rho\pi}{2 \sin \rho\pi}. \tag{15}$$

При этом формула (13) примет вид

$$G_1(t) = \begin{cases} |G(t)|e^{i\nu(t)}, & t > 0, \\ 1, & t < 0. \end{cases}$$

В силу условий (6) и (7) функция $G_1(t)$ непрерывна в точках $t = 0$, $t = +\infty$ и удовлетворяет условию H_L. Далее находим аналитическую в области D функцию [2, с. 119]:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \ln G_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z}$$

(здесь $\ln G_1(\tau) = 0$ на L^-) и определяем аналитическую в области D функцию $\chi(z) = e^{\Gamma(z)}$, отличную от нуля всюду в области D, включая L^+. Обозначая $\Gamma^+(z) = \Gamma(z)$ при $z \in D^+$, $\Gamma^-(z) = \Gamma(z)$ при $z \in D^-$, здесь имеем $\chi^\pm(z) = e^{\Gamma^\pm(z)}$.

Найденные функции $\chi^+(z)$, $\chi^-(z)$ удовлетворяют краевому условию $\chi^+ = G_1(t)\chi^-(t)$, $t \in L$. Поэтому краевое условие (12) можно представить в виде

$$\frac{\Phi^+(t)E^+(t)}{\chi^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)E^-(t)}{\chi^-(t)}, \qquad t \in L.$$

Отсюда видно, что функции $\dfrac{\Phi^+(z)E^+(z)}{\chi^+(z)}$, $\dfrac{\Phi^-(z)E^-(z)}{\chi^-(z)}$ образуют целую функцию $F(z)$, причём

$$\frac{\Phi^+(z)E^+(z)}{\chi^+(z)} = F(z), \qquad \frac{\Phi^-(z)E^-(z)}{\chi^-(z)} = F(z), \tag{16}$$

где соответственно $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$.

Поступая, как и в статье [1], покажем, что порядок ρ_F вышеуказанной целой функции $F(z)$ не превышает ρ: $\rho_F \leqslant \rho$. С учётом (15) соотношение (9) запишем так

$$|E^+(re^{i\theta})| = |E^-(re^{-i\theta})| = e^{r^\rho \nu^- \cos \rho(\pi-\theta)/(2 \sin \rho\pi)}, \qquad r > 0, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{17}$$

Из последней формулы при $\theta = 0$, когда $r = t > 0$, будем иметь $|E^+(t)| = |E^-(t)| = e^{t^\rho \nu^- \cos \rho\pi/(2 \sin \rho\pi)}$, $t > 0$, при $\theta = \pi$, когда $re^{i\pi} = -|t| = t < 0$, получим

$$|E^+(t)| = |E^-(t)| = e^{|t|^\rho \nu^-/(2 \sin \rho\pi)}, \qquad t < 0.$$

Учитывая эти два соотношения на основании формул (16), в которых $\Phi^{\pm}(z)$, $1/\chi^{\pm}(z)$ — функции, ограниченные в области $D^{\pm}$, включая её границу $L^{\pm}$, придем к неравенствам

$$|F(t)| < Ce^{t^{\rho}\nu^{-}\cos\rho\pi/(2\sin\rho\pi)}, \qquad t > 0, \tag{18}$$

$$|F(t)| < Ce^{|t|^{\rho}\nu^{-}/(2\sin\rho\pi)}, \qquad t < 0, \tag{19}$$

где $C = \mathrm{const} > 0$, которым должна удовлетворять целая функция $F(z)$ формул (16).

Так как $1/2 < \rho < 1$ и в интервале $0 < \theta < \pi$ функция $\cos\rho(\pi - \theta)$ возрастает от $\cos\rho\pi < 0$ до 1, то найдётся значение $\theta = \theta_{\rho}$, для которого $\cos\rho(\pi - \theta_{\rho}) = 0$ и $\theta_{\rho} = \pi - \frac{\pi}{2\rho}$; при этом согласно формуле (17) имеем

$$|E^{+}(re^{i\theta_{\rho}})| = |E^{-}(re^{-i\theta_{\rho}})| = 1.$$

Следовательно, на основании (16) получим неравенства

$$|F(re^{i\theta_{\rho}})| < C, \qquad |F(re^{-i\theta_{\rho}})| < C, \qquad r > 0, \tag{20}$$

где C — вышеуказанная постоянная, которым также должна удовлетворять функция $F(z)$.

В силу второго соотношения (14) и формулы (11) имеем:

$$E^{+}(t) = E^{-}(t) \quad \text{при} \quad t < 0,$$

в то время как при $t > 0$ функции $E^{+}(t)$, $E^{-}(t)$ связаны соотношением (10), в котором $\beta = -\upsilon^{-}/2$. Это означает, что функции $E^{+}(z)$, $E^{-}(z)$ формулы (8), в которой постоянные α, β определены соотношениями (15), образуют функцию $E(z)$, аналитическую в области D.

Учитывая это и принимая во внимание равенства (16), придём к заключению, что искомая функция $\Phi(z)$ определяется формулой

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{E(z)}F(z), \tag{21}$$

в которой $F(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_F \leqslant \rho$, удовлетворяющая условиям (18)–(20).

Если $\rho_F < \rho$, то содержащий отрицательную часть действительной оси угол между лучами $\theta = \theta_{\rho}$, $\theta = -\theta_{\rho}$, равный π/ρ, будет меньше π/ρ_F: $\pi/\rho < \pi/\rho_F$.

Так как на сторонах этого угла имеют места неравенства (20), то согласно теореме Фрагмена – Линделёфа [3, с. 255] модуль $|F(z)|$ ограничен той же постоянной C и внутри угла:

$$|F(z)| < C, z \in D_{\rho},$$

где D_{ρ} — вышеуказанный угол.

Ясно, что аналогичное неравенство будет справедливо для содержащего положительную часть действительной оси угла между вышеуказанными лучами, раствор которого меньше $\pi < \pi/\rho$.

Таким образом, во всей плоскости z выполняется неравенство $|F(z)| < C$, поэтому $F(z) = \mathrm{const}$. Но согласно (18) $|F(z)| \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, $F(z) = 0$ всюду на плоскости z, когда $\rho_F < \rho$, и формула (21) даёт не нулевое решение рассматриваемой задачи, когда в ней $F(z)$ означает произвольную целую функцию порядка ρ.

Нетрудно убедиться в том, что такие ненулевые решения существуют. Для этого достаточно показать, что существуют целые функции порядка ρ $(1/2 < \rho < 1)$, удовлетворяющие неравенствам (18)–(20).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Если краевая задача* (1) *имеет ограниченное решение* $\Phi(z)$, *то оно представляется формулой* (21), *в которой* $F(z)$ *есть произвольная целая функция порядка* ρ, *удовлетворяющая условиям* (18)–(20).

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 2. *Если $F(z)$ — любая целая функция порядка ρ, удовлетворяющая условиям* (18)–(20)*, то ограниченное решение краевой задачи* (1) *определяется формулой* (21).

Последняя теорема доказывается аналогично тому, как это сделано для соответствующей теоремы работы [1].

Замечание. Условия (6), (7) не ограничивают общности решения задачи. При их невыполнении решение задачи (1) с помощью методов, аналогичных указанным в книге [2, с. 428–436], можно привести к рассмотренному в данной статье случаю с новой искомой функцией, для которой точка $z = 0$ может оказаться особой и в ней функция может обращаться в бесконечность степенного порядка при «неудачном» задании $v(t)$ в окрестности точки $t = 0$ [4, с. 114, условие $-1 < \varphi(t_0) \leqslant 0$].

В случае, когда для точки $t = 0$ условия (6), (7) не выполняются, решение (21) остаётся в силе, его поведение вблизи точки $z = 0$ легко установить непосредственно, учитывая, что функция $\chi(z) = e^{\Gamma(z)}$ выражается через интеграл типа Коши, плотность которого $\ln G_1(t)$ в точке $t = 0$ имеет разрыв первого рода, и для указанного интеграла справедливо известное представление вблизи точки $z = 0$ [2, с. 68].

Библиографический список

1. *Салимов Р. Б., Карабашева Э. Н.* Новый подход к решению краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 155–164.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. Т. 2 М. : Наука, 1968. 624 с.
4. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986. 239 с.

About New Approach to Solution of Riemann's Boundary Value Problem with Condition on the Half-line in Case of Infinite Index

R. B. Salimov

Salimov Rasikh Bakhtigareevich, Kazan State University of Architecture and Engineering, 1, Zelenaya st., Kazan, Russia, 420043, salimov.rsb@gmail.com

To solve a homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index and condition on the half-line we propose a new approach based on the reduction of the considered problem to the corresponding task with the condition on the real axis and finite index. It is required to define a function $\Phi(z)$, analytic and bounded in the complex plane z, cut down on positive real semi-axis L^+, if the edge condition $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$, $t \in L^+$ is fulfilled, where $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ are limit values of the function $\Phi(z)$, as $z \to t$ correspondingly on the left and on the right, $G(t)$ is a given function, for which argument $\arg G(t) = \nu^- t^\rho + \nu(t), t \in L^+$ holds, here ν^-, ρ are given numbers, $\nu^- > 0$, $\frac{1}{2} < \rho < 1$, and $\ln|G(t)|$, $\nu(t)$ are functions which satisfy the Holder condition. It is admitted that $G(t) = 1$ at $t \in (-\infty, 0)$. The functions $E^+(z) = e^{(\alpha+i\beta)z^\rho}$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, $E^-(z) = e^{(\alpha-i\beta)z^\rho}$, $-\pi \leqslant \arg z \leqslant 0$ are used to avoid infinite gap of the $\arg G(t)$, by the selection of real numbers α, β.

Key words: Riemann boundary value problem, analytic functions, infinite index.

References

1. Salimov R. B. , Karabasheva E. N. The new approach to solving the Riemann boundary value problem with infinite index. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 2, pp. 155–165 (in Russian).
2. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977, 640 p. (in Russian).
3. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions*, in 2 vol. Vol. 2. Moscow, Nauka, 1968, 624 p. (in Russian).
4. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986, 239 p. (in Russian).