УДК 517.521

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ХААРА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА И СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

М. Г. Магомед-Касумов

Научный сотрудник отдела математики и информатики Дагестанского научного центра РАН, Махачкала, rasuldev@gmail.com

Рассматриваются весовые пространства Лебега $L^{p(x)}_w$ и Соболева $W_{p(\cdot),w}$, показатель $p(x) \geq 1$ и вес $w(x)$ которых удовлетворяют условиям, обеспечивающим базисность системы Хаара в $L^{p(x)}_w$. Для функций из этих пространств получены оценки скорости сходимости сумм Фурье – Хаара. Оценки даны в терминах модуля непрерывности $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot),w}$, основанного на усредненном сдвиге (функции Стеклова).

Ключевые слова: весовое пространство, пространство Лебега, пространство Соболева, переменный показатель, модуль непрерывности, функция Стеклова, прямые теоремы теории приближений, скорость сходимости, суммы Фурье – Хаара, условие Макенхоупта.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $p(x)$ — измеримая на E функция такая, что $1 \leq \underline{p}(E) \leq \overline{p}(E) < \infty$. Здесь и далее символами $\underline{p}(M), \overline{p}(M)$ будем обозначать $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in M} p(x)$ и $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} p(x)$ соответственно. Пусть $w(x)$ — неотрицательная почти всюду (п. в.) положительная суммируемая функция (вес). Через $L^{p(x)}_w(E)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_E |f(x)|^{p(x)} w(x)dx < \infty$. Пространство $L^{p(x)}_w(E)$ представляет собой линейное нормированное пространство, в котором одну из эквивалентных норм можно определить равенством (см. [1–4])

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int\limits_E \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} w(x)\,dx \leq 1\Big\}.$$

В данной работе рассмотрена задача о приближении функций суммами Фурье – Хаара в весовых пространствах Лебега $L^{p(x)}_w = L^{p(x)}_w([0,1])$ с переменным показателем $p(x)$ и весом $w(x)$. Далее, если речь идет об отрезке $[0,1]$, то существенную верхнюю и нижнюю грани функции $p(x)$ будем обозначать кратко $\overline{p}$ и $\underline{p}$ соответственно. Через $c, c(p), c(p,w)$ будут обозначаться константы, зависящие лишь от величин в скобках и, вообще говоря, различные в разных местах. Результаты данной статьи являются обобщениями на весовой случай результатов, полученных в статье [5].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом параграфе приводятся некоторые свойства весовых пространств Лебега с переменным показателем.

Лемма 1. *Множество непрерывных функций $C[0,1]$ всюду плотно в $L^{p(x)}_w$.*

Доказательство. Доказательство проведем в три шага. Сначала 1) докажем, что пространство ограниченных функций всюду плотно в $L^{p(x)}_w$, затем 2) покажем, что всякая ограниченная функция может быть сколь угодно точно приближена функциями с конечным числом значений. И наконец, 3) заметим, что функции с конечным числом значений можно с любой степенью точности приближать непрерывными функциями.

1. Отметим сначала, что всякая ограниченная измеримая функция $g(x)$, определенная на отрезке $[0,1]$, будет принадлежать $L^{p(x)}_w$:

$$|g(x)| \leq c \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^1 |g(x)|^{p(x)} w(x)dx \leq (c+1)^{\overline{p}} \int\limits_0^1 w(x)dx < \infty.$$

Возьмем теперь произвольную функцию $f(x) \in L_w^{p(x)}$. В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого множества $E \subset [0,1]$ с мерой $\mu(E) < \delta$ интеграл $\int\limits_E |f(x)|^{p(x)} w(x)dx < \varepsilon$. С другой стороны, $f(x)$ — измеримая функция, поэтому, пользуясь C-свойством Лузина, мы можем утверждать, что для данного $\delta > 0$ всегда найдется замкнутое множество $F_\delta \subset [0,1]$ с мерой $\mu(F_\delta) > 1 - \delta$, на котором $f(x)$ будет непрерывной. Рассмотрим следующую функцию:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F_\delta, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus F_\delta. \end{cases}$$

Из сказанного видно, что $g(x)$ — ограниченная измеримая функция, причем

$$\int\limits_0^1 |f(x) - g(x)|^{p(x)} w(x)\, dx = \int\limits_{[0,1]\setminus F_\delta} |f(x)|^{p(x)} w(x)\, dx < \varepsilon,$$

так как $\mu([0,1] \setminus F_\delta) < \delta$. Это и означает, что множество ограниченных функций всюду плотно в $L_w^{p(x)}$.

2. Любую ограниченную измеримую функцию $g(x)$ можно с любой степенью точности равномерно приблизить функциями с конечным числом значений. Действительно, задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, разобьем множество значений $[A, B]$ функции $g(x)$ на интервалы длиной меньше чем ε:

$$A = y_0 < y_1 < \ldots < y_N = B, \qquad y_{j+1} - y_j < \varepsilon.$$

Рассмотрим множества $e_j = \{x : y_j \le g(x) < y_{j+1}\}$, $j = \overline{0, N-1}$, $e_N = \{x : g(x) = y_N\}$. Введем функцию $h(x)$, положив $h(x) = y_j$, $x \in e_j$. Ясно, что $h(x)$ — функция, принимающая конечное число значений, и $|g(x) - h(x)| < \varepsilon$, $x \in [0,1]$. Следовательно, функции с конечным числом значений также образуют в $L_w^{p(x)}$ всюду плотное множество.

3. Покажем теперь, что всякую функцию $h(x)$, имеющую конечное число значений, можно как угодно точно приблизить в $L_w^{p(x)}$ непрерывными функциями. Поскольку функцию с конечным числом значений можно представить как линейную комбинацию характеристических функций $\chi_M(x)$, то доказательство достаточно провести только для $\chi_M(x)$.

Пусть $M \subset [0,1]$ — измеримое множество и

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases}$$

Поскольку рассматривается обычная мера Лебега на прямой, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такие множества F_M — замкнутое и G_M — открытое, что

$$F_M \subset M \subset G_M \quad \text{и} \quad \mu(G_M) - \mu(F_M) < \varepsilon.$$

Определим теперь функцию

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x, [0,1] \setminus G_M)}{\rho(x, [0,1] \setminus G_M) + \rho(x, F_M)}\,.$$

Легко заметить, что введенная функция является непрерывной, равна 1 на множестве F_M, 0 вне множества G_M и не превосходит 1 на $G_M \setminus F_M$. Поэтому разность $|\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|$ отлична от нуля только на $G_M \setminus F_M$, причем $|\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \le 1$, $x \in G_M \setminus F_M$. Отсюда имеем:

$$\int\limits_0^1 |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^{p(x)} w(x)dx = \int\limits_{G_M \setminus F_M} |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|^{p(x)} w(x)dx \le \int\limits_{G_M \setminus F_M} w(x)\, dx.$$

Но $w(x) \in L^1$, поэтому в силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега за счет выбора ε последний интеграл в приведенной формуле можно сделать сколь угодно малым. $\square$

Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы в [1], можно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Если* $1 \le p(x) \le q(x) \le \overline{q}(E) < \infty$, *то для любой функции* $f \in L_w^{q(x)}(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \le r_{p,q}^w \|f\|_{q(\cdot),w},$$

где

$$r_{p,q}^w \le \frac{1}{\underline{\alpha}} + \frac{\int_E w(x)dx}{\underline{\alpha^*}} \qquad \Big(\alpha(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \quad \alpha^*(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}\Big).$$

Нам также понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $f(x,t)$ — *измеримая функция, заданная на декартовом произведении* $E_1 \times E_2$ *множеств* E_1 *и* E_2, *на которых заданы конечные меры* μ_1 *и* μ_2 *соответственно. Тогда справедливо неравенство*

$$\Big\|\int\limits_{E_2} |f(\cdot,x)| d\mu_2(x)\Big\|_{p(\cdot),w(E_1)} \le r_p \int\limits_{E_2} \|f(\cdot,x)\|_{p(\cdot),w(E_1)}\, d\mu_2(x), \tag{1}$$

где

$$r_p \le \frac{1}{\underline{p}(E_1)} + \frac{1}{\underline{p}'(E_1)} \le 2, \qquad \frac{1}{p(t)} + \frac{1}{p'(t)} = 1, \qquad 1 \le p(t) \le \overline{p}(E_1) < \infty.$$

Доказательство. Утверждение леммы в случае $w(x) = 1$ было доказано в [2, с. 35]. Перенести его на случай произвольного веса $w(x)$ не составляет труда, если учесть, что $\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f \cdot w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}$. Действительно,

$$\Big\|\int\limits_{E_2} |f(\cdot,x)| d\mu_2(x)\Big\|_{p(\cdot),w(E_1)} = \Big\|\int\limits_{E_2} |f(\cdot,x) w(\cdot)^{\frac{1}{p(\cdot)}}| d\mu_2(x)\Big\|_{p(E_1)} \le$$
$$\le r_p \int\limits_{E_2} \|f(\cdot,x) w(\cdot)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(E_1)} d\mu_2(x) = r_p \int\limits_{E_2} \|f(\cdot,x)\|_{p(\cdot),w(E_1)}\, d\mu_2(x). \qquad \square$$

Как было отмечено в [6, 7], для построения рядов Фурье – Хаара (см. определение в [8, с. 70]) для функций из $L_w^{p(x)}$ необходимо и достаточно, чтобы имело место вложение $L_w^{p(x)} \subset L^1$. Там же было показано, что для выполнения указанного требования достаточно, чтобы вес удовлетворял следующим условиям:

$$1) \quad w(x) \ge C_1(w) > 0, \quad x \in E_1 \ \ (\text{п. в.}),$$
$$2) \quad \|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty,$$

где $E_1 = \{x : p(x) = 1\}$, $E_2 = [0,1] \setminus E_1$, $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} = 1$.

Множество весовых функций $w(x)$ на отрезке $[0,1]$, удовлетворяющих при заданном $p(x)$ условиям 1) и 2), будем обозначать через $\mathscr{H}(p)$. Таким образом, если $w \in \mathscr{H}(p)$, то $L_w^{p(x)} \subset L^1$.

Заметим также [6, 7], что для функций $f \in L_w^{p(x)}$ при $w \in \mathscr{H}(p)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_E |f(x)|\, dx \le c(p,w) \cdot \|f\|_{p(\cdot),w}. \tag{2}$$

В [6, 7] были получены достаточные условия, при которых система Хаара образует базис в $L_w^{p(x)}$. Приведем соответствующую теорему из упомянутой статьи. Для этого сначала введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathfrak{S}$ — система множеств. Через $\mathfrak{F}_p(\mathfrak{S})$ будем обозначать подсистему системы множеств $\mathfrak{S}$, состоящую из множеств S, для которых $\underline{p}(S) = 1$:

$$\mathfrak{F}_p(\mathfrak{S}) = \{S \in \mathfrak{S} : \underline{p}(S) = 1\}.$$

Для заданной системы множеств $\mathfrak{S}$ символом $\hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{S})$ обозначим множество весовых функций $w(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$(A1) \qquad \sup_{S\in\mathfrak{F}_p(\mathfrak{S})} \frac{1}{|S|}\int\limits_S w(x)dx < c(p,w),$$

$$(A2) \qquad \sup_{S\in\mathfrak{S}\setminus\mathfrak{F}_p(\mathfrak{S})} \Big(\frac{1}{|S|}\int\limits_S w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|S|}\int\limits_S w(x)^{-\frac{1}{\underline{p}(S)-1}}dx\Big)^{\underline{p}(S)-1} < c(p,w).$$

Пусть $\mathfrak{B}_\nu$ — множество всех двоичных интервалов (см. [8, с. 69]) из пачек с номерами $j\geq\nu$

$$\mathfrak{B}_\nu = \{\Delta_j^i : j\geq\nu, i=1,\dots,2^j\}.$$

Множество измеримых на $[0,1]$ функций $p(x)\geq 1$, удовлетворяющих условию

$$\big|p(x)-p(y)\big|\ln\frac{1}{|x-y|}\leq c(p), \tag{3}$$

будем обозначать символом $\mathscr{P}^{log}$.

Теорема A. *Пусть $p(x)\in\mathscr{P}^{log}$, $w(x)\in\mathscr{H}(p)$. Тогда система Хаара будет базисом пространства $L_w^{p(x)}$, если $w(x)\in\bigcup\limits_\nu \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{B}_\nu)$.*

Отметим, что в безвесовом случае условия базисности системы Хаара были найдены в работе [9].

Основным результатом настоящей работы является оценка скорости сходимости сумм Фурье – Хаара $Q_n(f,x)=\sum\limits_{k=1}^n c_k\chi_k(x)$ к исходной функции $f(x)$ в метрике пространства $L_w^{p(x)}$. Для безвесового случая исследование этого вопроса было проведено в [5], где автор отмечает необходимость использования для пространств Лебега с переменным показателем модуля непрерывности $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}$, основанного на усредненном сдвиге (см. также [10]). В весовом случае мы воспользуемся аналогичной конструкцией. Пусть $f(x)\in L_w^{p(x)}$, $w\in\mathscr{H}(p)$. Будем считать, что функция $f(x)$ продолжена на всю полуось $[0,+\infty)$ с помощью равенства $f(x)=0, x>1$. Тогда для таких функций $f(x)$ мы можем ввести оператор Стеклова:

$$s_h(f)=s_h(f)(x)=\frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+t)dt, \quad x\in[0,1].$$

Отметим, что при условии $w\in\mathscr{H}(p)$ имеет место вложение $L_w^{p(x)}\subset L^1$, поэтому оператор Стеклова будет определен для любой $f\in L_w^{p(x)}$. Введем теперь модуль непрерывности:

$$\Omega(f,\delta)_{p(\cdot),w}=\begin{cases}0, & \delta=0,\\ \sup\limits_{0<h\leq\delta}\|f-s_h(f)\|_{p(\cdot),w}, & \delta>0.\end{cases} \tag{4}$$

Модуль непрерывности (4) является неубывающей неотрицательной функцией, а при некоторых ограничениях на показатель $p(x)$ и вес $w(x)$ также и непрерывной. Последнее вытекает из следующего результата, доказанного в работе [11].

Теорема B. *Пусть $\mathfrak{D}_\nu=\{\Delta_j^i\cup\Delta_j^{i+1} : j\geq\nu, i=1,\dots,2^j-1\}$ и*

$$1)\ p(x)\in\mathscr{P}^{log}(E), \quad 2)\ w(x)\in\mathscr{H}_{p(\cdot)}(E), \quad 3)\ w(x)\in\bigcup_\nu\hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu).$$

Тогда для функций $f(x)\in L_w^{p(x)}$ имеет место оценка $(0<h\leq 1)$

$$\|s_h(f)\|_{p(\cdot),w}\leq c(p,w)\|f\|_{p(\cdot),w}.$$

Другими словами, семейство операторов $s_h(f)(0<h\leq 1)$ будет равномерно ограничено в $L_w^{p(x)}$.

Данная теорема позволяет утверждать, в частности, что при условиях 1)–3) усредненный сдвиг $s_h(f)$ для любой функции $f\in L_w^{p(x)}$ также будет принадлежать пространству $L_w^{p(x)}$. Более того, с помощью этой теоремы легко устанавливается следующий факт (см. также [5, лемма 3.2]).

Лемма 4. *Если* $p(x) \in \mathscr{P}^{log}$, $w(x) \in \mathscr{H}(p) \cap \Big[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu)\Big]$, *то*

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot),w} \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta \to 0. \tag{5}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.2 в работе [5] с той лишь особенностью, что в данном случае приходится пользоваться леммой 1 о всюду плотности непрерывных функций в $L_w^{p(x)}$.

Отметим, что система Хаара будет базисом в пространствах $L_w^{p(x)}$, если показатель $p(x)$ и вес $w(x)$ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы B.

В данной работе рассматривается задача об оценке в терминах модуля непрерывности (4) скорости приближения функций суммами Фурье – Хаара в весовых пространствах Лебега $L_w^{p(x)}$ с переменным показателем $p(x) \in \mathscr{P}^{log}$ и весом $w(x) \in \mathscr{H}(p) \cap \Big[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu)\Big]$.

3. ВЕСОВЫЕ КЛАССЫ СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Классом Соболева $W^r_{p(\cdot),w}(M)$ с переменным показателем $p(x)$ и весом $w(x)$ будем называть множество $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}(x) \in L_w^{p(x)}$ и $\|f^{(r)}\|_{p(\cdot),w} \le M$. Положим $W^r_{p(\cdot),w} = \cup_{M>0} W^r_{p(\cdot),w}(M)$, $W_{p(\cdot),w} = W^1_{p(\cdot),w}$. В настоящем параграфе рассмотрена задача о приближении функций $f \in W_{p(\cdot),w}$ суммами Фурье – Хаара $Q_n(f) = Q_n(f,x)$.

Теорема 1. *Пусть* $p(x) \in \mathscr{P}^{log}$, $w(x) \in \mathscr{H}(p) \cap \Big[\bigcup_{\nu} \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu)\Big]$. *Справедлива следующая оценка для* $f \in W_{p(\cdot),w}$:

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot),w} \le \frac{c(p,w)}{n} \|f'\|_{p(\cdot),w}.$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x) \in W^1_{p(\cdot),w}(1)$. Следовательно, $f'(x) \in L_w^{p(x)}$ и

$$\|f'\|_{p(\cdot),w} \le 1. \tag{6}$$

Напомним, что для сумм Фурье – Хаара справедлива формула [12, с. 21]

$$S_n(f,x) = \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{\lambda_{ns}} f(t)dt, \quad x \in \lambda_{ns},$$

где λ_{ns}, $s = \overline{1,n}$ — двоичные интервалы постоянства системы функций $\chi_k, k = \overline{1,n}$ и

$$|\lambda_{ns}| = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{j+1}}, & 1 \le s \le 2i, \\ \dfrac{1}{2^j}, & 2i+1 \le s \le n \end{cases}.$$

Используя эту формулу, оценим интеграл:

$$\int\limits_0^1 |n(Q_n(f,x) - f(x))|^{p(x)} w(x)\,dx = \sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} \Big| \frac{n}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{\lambda_{ns}} (f(y) - f(x))\,dy \Big|^{p(x)} w(x)\,dx =$$

$$= \sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} \Big| \frac{n}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{\lambda_{ns}} \Big[\int\limits_x^y f'(t)\,dt\Big] dy \Big|^{p(x)} w(x)\,dx \le \sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} \Big[\frac{n}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{\lambda_{ns}} dy \int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|\,dt\Big]^{p(x)} w(x)\,dx =$$

$$= \sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} \Big[n \int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|\,dt\Big]^{p(x)} w(x)\,dx = \sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} \Big[n \int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|\,dt\Big]^{p(x)-p_s+p_s} w(x)\,dx, \tag{7}$$

где через p_s обозначен минимум $p(x)$ на λ_{ns}. Поскольку $f'(x) \in L_w^{p(x)}$ и $w(x) \in \mathscr{H}(p)$, то можно применить неравенство (2). Поэтому, используя условие (3) и неравенство (6) для одного из множителей под интегралом в последнем выражении цепочки соотношений (7), получим:

$$\Big[n \int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|dt\Big]^{p(x)-p_s} \le n^{p(x)-p_s} \Big[\int\limits_0^1 |f'(t)|dt\Big]^{p(x)-p_s} \le$$

$$\leq c(p)\Big[c(p,w)\|f'(t)\|_{p(\cdot),w}\Big]^{p(x)-p_s} \leq c(p,w). \tag{8}$$

Из (7) и (8) имеем:

$$\int\limits_0^1 |n(Q_n(f,x)-f(x))|^{p(x)}w(x)\,dx \leq c(p,w)\sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} \Big[n\int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|\,dt\Big]^{p_s} w(x)\,dx =$$

$$= c(p,w)\sum_{s=1}^n \int\limits_{\lambda_{ns}} w(x)\,dx\Big[n\int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|\,dt\Big]^{p_s}. \tag{9}$$

Разобьем полученную сумму на две части: к первой части Σ_1 отнесем члены с такими номерами s, для которых $p_s = 1$, а все остальные включим во вторую часть Σ_2. Так как $w(x) \in \bigcup\limits_\nu \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu)$, то для веса $w(x)$ выполняется условие $(A1)$. Поэтому для первой суммы ($\sigma_1 = \{s : p_s = 1\}$) можно написать:

$$\Sigma_1 = \sum_{s\in\sigma_1} \frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(x)dx\cdot(n|\lambda_{ns}|)\cdot\int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|dt < c(p,w)\sum_{s\in\sigma_1}\int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|dt \leq$$

$$\leq c(p,w)\sum_{s=1}^n\int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|dt = c(p,w)\|f'\|_1.$$

Как уже отмечалось, к $f'(x)$ применимо неравенство (2). Поэтому для суммы Σ_1 получим:

$$\Sigma_1 < c(p,w). \tag{10}$$

Перейдем теперь к рассмотрению второй суммы ($\sigma_2 = \{s : p_s > 1\}$):

$$\Sigma_2 = \sum_{s\in\sigma_2}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(x)dx\Big[n\int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|dt\Big]^{p_s}. \tag{11}$$

Применяя неравенство Гельдера для второго множителя, можно получить следующую оценку:

$$\left[n\int\limits_{\lambda_{ns}} |f'(t)|\,dt\right]^{p_s} = \left[n\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{\frac{1}{p_s}}|f'(t)|w(t)^{-\frac{1}{p_s}}\,dt\right]^{p_s} \leq$$

$$\leq \left[n\left(\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f'(t)|^{p_s}\,dt\right)^{\frac{1}{p_s}}\left(\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{-\frac{p_s'}{p_s}}\,dt\right)^{\frac{1}{p_s'}}\right]^{p_s} <$$

$$< \frac{c(p)}{|\lambda_{ns}|^{p_s}}\left(\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f'(t)|^{p_s}\,dt\right)\left(\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{-\frac{p_s'}{p_s}}\,dt\right)^{\frac{p_s}{p_s'}} =$$

$$= c(p)\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\left(\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f'(t)|^{p_s}\,dt\right)\left(\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{-\frac{1}{p_s-1}}\,dt\right)^{p_s-1}, \qquad \frac{1}{p_s}+\frac{1}{p_s'} = 1. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), приходим к следующему соотношению:

$$\Sigma_2 < c(p)\sum_{s\in\sigma_2}\left[\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(x)\,dx\left(\frac{1}{|\lambda_{ns}|}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)^{-\frac{1}{p_s-1}}\,dt\right)^{p_s-1}\right]\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f'(t)|^{p_s}\,dt.$$

В силу $(A2)$ выражение в квадратных скобках ограниченно величиной $c(p,w)$, не зависящей от λ_{ns}. Следовательно,

$$\Sigma_2 < c(p,w)\sum_{s\in\sigma_2}\int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f'(t)|^{p_s}dt.$$

Рассмотрим функцию $h(t) = p_s$, $t \in \lambda_{ns}$. Так как $h(t) \le p(t)$, то в силу леммы 2 и условия (6) имеем:

$$\Sigma_2 < c(p,w) \sum_{s\in\sigma_2} \int\limits_{\lambda_{ns}} w(t)|f'(t)|^{h(t)} dt \le c(p,w) \int\limits_0^1 w(t)|f'(t)|^{h(t)} dt =$$

$$= c(p,w) \int\limits_0^1 w(t) \|f'\|^{h(t)}_{h(\cdot),w} \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{h(\cdot),w}} \right|^{h(t)} dt \le c(p,w) \int\limits_0^1 w(t) (r^w_{h,p})^{h(t)} \|f'\|^{h(t)}_{p(\cdot),w} \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{h(\cdot),w}} \right|^{h(t)} dt \le$$

$$\le c(p,w)(r^w_{h,p})^{\overline{p}} \int\limits_0^1 w(t) \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{h(\cdot),w}} \right|^{h(t)} dt = c(p,w)(r^w_{h,p})^{\overline{p}}. \tag{13}$$

Из (9), (10) и (13) находим

$$\int\limits_0^1 |n(Q_n(f,x) - f(x))|^{p(x)} w(x) dx \le c(p,w).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \left| \frac{n(Q_n(f,x) - f(x))}{c(p,w)^{\frac{1}{p(x)}}} \right|^{p(x)} w(x) dx \le 1.$$

Но тогда тем более

$$\int\limits_0^1 \left| \frac{(Q_n(f,x) - f(x))}{(1+c(p,w))^{\frac{1}{\underline{p}}}/n} \right|^{p(x)} w(x) dx \le 1.$$

Последнее и означает, что

$$\|Q_n(f) - f\|_{p(\cdot),w} \le \frac{(1+c(p,w))^{\frac{1}{\underline{p}}}}{n} = \frac{c(p,w)}{n}.$$

Таким образом, для $f(x) \in W^1_{p(\cdot),w}(1)$ теорема доказана. Случай $f(x) \in W_{p(\cdot),w}$ сводится к уже доказанному заменой $g(x) = \dfrac{f(x)}{\|f'\|_{p(\cdot),w}}$. □

4. ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

В случае постоянного p задача о скорости приближения функций $f(x) \in L^p$ суммами Фурье–Хаара была решена П. Л. Ульяновым.

Теорема (П. Л. Ульянов). *Если $f(x) \in L^p(0,1)$ с некоторым $p \in [1,\infty]$, то*

$$\|f - Q_n(f)\|_p \le 24\, \omega_p(f, \tfrac{1}{n}) \text{ *при* } n \ge 1,$$

где $\omega_p(f,\delta) = \sup\limits_{0<h\le\delta} \Big(\int\limits_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$.

Данная теорема получила обобщение на переменный показатель в работе И. И. Шарапудинова [5]. Напомним, что для этого потребовалось ввести модуль непрерывности, основанный на усредненном сдвиге.

Теорема (И. И. Шарапудинов). *Пусть $p(x) \in P^{log}$, $f(x) \in L^{p(x)}$. Тогда справедлива оценка*

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} \le c(p)\Omega(f, \tfrac{1}{n})_{p(\cdot)}.$$

В этом параграфе мы получим аналогичную оценку для функций $f(x) \in L^{p(x)}_w$ в терминах модуля непрерывности (4). Для этого нам понадобится следующий оператор:

$$\Theta_\nu(f)(x) = \frac{2}{\nu} \int\limits_{\nu/2}^{\nu} s_h(f)(x) dh = \frac{2}{\nu} \int\limits_{\nu/2}^{\nu} \frac{dh}{h} \int\limits_0^h f(x+t)\, dt = \frac{2}{\nu} \int\limits_{\nu/2}^{\nu} \frac{dh}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)\, dt, \qquad 0 < \nu \le 1.$$

Отметим, что данный оператор использовался при доказательстве приведенной ранее теоремы из статьи [5, § 5] (см. также [10, с. 291]). Рассмотрим некоторые свойства этого оператора.

1. *Для любого* $f(x) \in L^1$ *функция* $\Theta_\nu(f)(x)$, $0 < \nu \le 1$ *является абсолютно непрерывной на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство есть в [5, теорема 4]. Таким образом, $\Theta_\nu(f)(x)$ — абсолютно непрерывна и, следовательно, почти всюду дифференцируема. Более того, справедливо следующее свойство.

2. *Для любого* $f(x) \in L^1$ *для почти всех* $x \in [0,1]$ *имеет место равенство*

$$\big(\Theta_\nu(f)\big)'(x) = \frac{2}{\nu}\int\limits_{\nu/2}^{\nu} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dh. \tag{14}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [5, с. 13].

3. *Для любого* $f(x) \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathscr{H}(p)$ *выполняется неравенство* $(0 < \nu \le 1)$

$$\|\big(\Theta_\nu(f)\big)'\|_{p(\cdot),w} \le c(p)\,\frac{\Omega(f,\nu)_{p(\cdot),w}}{\nu}.$$

Доказательство. Воспользуемся интегрированием по частям для интеграла из (14) ($u = 1/h$, $v' = f(x+h) - f(x)$):

$$\int\limits_{\nu/2}^{\nu} \frac{1}{h}\Big(f(x+h)-f(x)\Big)\,dh = \frac{1}{h}\int\limits_0^h \Big(f(x+t)-f(x)\Big)\,dt\Big|_{\nu/2}^{\nu} +$$

$$+\int\limits_{\nu/2}^{\nu}\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\,dt\,dh = I_1(x) + I_2(x). \tag{15}$$

$I_1(x)$ можно записать в следующем виде:

$$I_1(x) = (s_\nu(f)(x) - f(x)) - (s_{\nu/2}(f)(x) - f(x)).$$

Отсюда следует, что

$$\|I_1\|_{p(\cdot),w} \le \|s_\nu(f) - f\|_{p(\cdot),w} + \|s_{\nu/2}(f) - f\|_{p(\cdot),w} \le \Omega(f,\nu)_{p(\cdot),w} + \Omega(f,\tfrac{\nu}{2})_{p(\cdot),w} \le 2\Omega(f,\nu)_{p(\cdot),w}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь $I_2(x)$:

$$I_2(x) = \int\limits_{\nu/2}^{\nu}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Big(f(x+t)-f(x)\Big)dt\right]dh = \int\limits_{\nu/2}^{\nu}\frac{1}{h}\Big(s_h(f)(x)-f(x)\Big)\,dh.$$

Тогда, используя лемму 3, получим:

$$\|I_2\|_{p(\cdot),w} = \Big\|\int\limits_{\nu/2}^{\nu}\frac{1}{h}\Big(s_h(f)(\cdot)-f(\cdot)\Big)\,dh\Big\|_{p(\cdot),w} \le$$

$$\le c(p)\int\limits_{\nu/2}^{\nu}\frac{1}{h}\|s_h(f)-f\|_{p(\cdot),w}\,dh \le c(p)\Omega(f,\nu)_{p(\cdot),w} \qquad (c(p) \le 2). \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) получаем требуемое. □

Из свойств 1 и 3 следует, что, в частности

4. $\Theta_\nu(f) \in W_{p(\cdot),w}$ *для* $f \in L_w^{p(x)}, w \in \mathscr{H}(p), 0 < \nu \le 1$.

5. *Пусть* $f \in L_w^{p(x)}$, $w \in \mathscr{H}(p)$, $0 < \nu \le 1$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|\Theta_\nu(f) - f\|_{p(\cdot),w} \le c(p)\Omega(f,\nu)_{p(\cdot),w}.$$

Доказательство. В силу того что $|\Theta_\nu(f)(x)-f(x)| \le \dfrac{2}{\nu}\int\limits_{\nu/2}^{\nu}|s_h(f)(x)-f(x)|\,dh$, пользуясь леммой 3, сразу получаем требуемое:

$$\|\Theta_\nu(f)-f\|_{p(\cdot),w} \le c(p)\frac{2}{\nu}\int\limits_{\nu/2}^{\nu}\|s_h(f)-f\|_{p(\cdot),w}\,dh \le c(p)\frac{2}{\nu}\int\limits_{\nu/2}^{\nu}\Omega(f,\nu)_{p(\cdot),w}\,dh = c(p)\Omega(f,\nu)_{p(\cdot),w}. \quad \square$$

Сформулируем теперь основную теорему данного пункта.

Теорема 2. *Пусть* $p(x)\in\mathscr{P}^{log}$, $w(x)\in\mathscr{H}(p)\cap\left[\bigcup\limits_\nu \hat{A}_{p(\cdot)}(\mathfrak{D}_\nu)\right]$. *Тогда для* $f\in L^{p(\cdot)}_w$ *имеет место оценка*

$$\|f-Q_n(f)\|_{p(\cdot),w}\le c(p,w)\Omega(f,\tfrac{1}{n})_{p(\cdot),w}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\|f-Q_n(f)\|_{p(\cdot),w}\le\|f-\Theta_{\frac1n}(f)\|_{p(\cdot),w}+\|\Theta_{\frac1n}(f)-Q_n(\Theta_{\frac1n}(f))\|_{p(\cdot),w}+$$
$$+\|Q_n(\Theta_{\frac1n}(f))-Q_n(f)\|_{p(\cdot),w}. \tag{18}$$

Из свойства 5 оператора $\Theta_\nu(f)$ следует, что

$$\|f-\Theta_{\frac1n}(f)\|_{p(\cdot),w}\le c(p)\Omega(f,\tfrac1n)_{p(\cdot),w}. \tag{19}$$

Далее, при условиях теоремы система Хаара образует базис в $L^{p(x)}_w$ (см. теорему A), поэтому

$$\|Q_n(f)\|_{p(\cdot),w}\le c(p,w)\|f\|_{p(\cdot),w}.$$

Но тогда в силу линейности оператора $Q_n(f)$ и свойства 5 оператора $\Theta_\nu(f)$ для 3-го слагаемого в (18) получаем:

$$\|Q_n(\Theta_{\frac1n}(f))-Q_n(f)\|_{p(\cdot),w}=\|Q_n(\Theta_{\frac1n}(f)-f)\|_{p(\cdot),w}\le$$
$$\le c(p,w)\|\Theta_{\frac1n}(f)-f\|_{p(\cdot),w}\le c(p,w)\Omega(f,\tfrac1n)_{p(\cdot),w}. \tag{20}$$

Наконец, свойства 3, 4 оператора $\Theta_\nu(f)$ и теорема 1 позволяют написать для второго слагаемого из (18) оценку:

$$\|\Theta_{\frac1n}(f)-Q_n(\Theta_{\frac1n}(f))\|_{p(\cdot),w}\le\frac{c(p,w)}{n}\|\Theta'_{\frac1n}(f)\|_{p(\cdot),w}\le$$
$$\le\frac{c(p,w)}{n}\cdot\frac{\Omega(f,\frac1n)_{p(\cdot),w}}{1/n}=c(p,w)\Omega(f,\tfrac1n)_{p(\cdot),w}. \tag{21}$$

Доказательство завершается подстановкой оценок (19)–(21) в (18). $\square$

Автор благодарит И. И. Шарапудинова за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.

2. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. 270 с.

3. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin; Heidelberg : Springer-Verlag, 2011. P. 509. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.

4. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2013. P. 312. DOI: 10.1007/978-3-0348-0548-3.

5. *Шарапудинов И. И.* Приближение функций из пространств Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье – Хаара // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 2. С. 145–160. DOI: 10.4213/sm8274.

6. *Магомед-Касумов М. Г.* Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования : тез. докл. междунар. науч. конф. (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.). Владикавказ, 2013. С. 68–69.

7. *Магомед-Касумов М. Г.* Базисность системы Хаара

в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказ. мат. журн. 2014. Т. 16, вып. 3. С. 38–46.
8. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.
9. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(t)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283.
10. *Guven A., Israfilov D. M.* Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ // J. Math. Inequal. 2010. Vol. 4, № 2. P. 285–299.
11. *Шах-Эмиров Т. Н.* О равномерной ограниченности семейства операторов Стеклова в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Вестн. ДНЦ РАН. 2014. Вып. 54. С. 12–17.
12. *Соболь И. М.* Многомерные квадратные формулы и функции Хаара. М. : Наука, 1969. 288 с.

Approximation of Functions by Fourier – Haar Sums in Weighted Variable Lebesgue and Sobolev Spaces

M. G. Magomed-Kasumov

Daghestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 45, Gadgieva str., Makhachkala, Republic of Dagestan, 367000, Russia, rasuldev@gmail.com

It is considered weighted variable Lebesgue $L_w^{p(x)}$ and Sobolev $W_{p(\cdot),w}$ spaces with conditions on exponent $p(x) \geq 1$ and weight $w(x)$ that provide Haar system to be a basis in $L_w^{p(x)}$. In such spaces there were obtained estimates of Fourier – Haar sums convergence speed. Estimates are given in terms of modulus of continuity $\Omega(f,\delta)_{p(\cdot),w}$, based on mean shift (Steklov's function).

Key words: weighted space, Lebesgue space, Sobolev space, variable exponent, modulus of continuity, Steklov's function, direct theorems of approximation theory, convergence speed, Fourier – Haar sums, Muckenhoupt condition.

References

1. Sharapudinov I. I. Topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. *Mat. Zametki*, 1979, vol. 26, no. 4, pp. 613–632. DOI: 10.1007/BF01159546.
2. Sharapudinov I. I. *Some aspects of approximation theory in variable Lebesgue spaces*. Vladikavkaz, 2012, 270 p. (in Russian).
3. Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2011, 509 p. DOI : 10.1007/978-3-642-18363-8.
4. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2013. 312 p. DOI 10.1007/978-3-0348-0548-3.
5. Sharapudinov I.I. Approximation of function by Fourier — Haar sums in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces by Fourier — Haar sums. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 2, pp. 145–160. DOI: 10.4213/sm8274.
6. Magomed-Kasumov M. G. Basis property of the Haar system in the weighted variable Lebesgue spaces. *Poriadkovyi analiz i smezhnye voprosy matematicheskogo modelirovaniia: tezisy dokladov mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii* (Vladikavkaz, 14—20.07.2013). Vladikavkaz, 2013, pp. 68–69 (in Russian).
7. Magomed-Kasumov M. G. Basis property of the Haar system in the weighted variable Lebesgue spaces. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* [Vladikavkaz Mathematical Journal], 2014, vol. 16, iss. 3, pp. 38–46 (in Russian).
8. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal series*. Translations of Math. Monographs, vol. 75, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1989.
9. Sharapudinov I.I. On the basis property of the Haar system in the space $L^p(t)([0,1])$ and the principle of localization in the mean. *Math. of the USSR-Sbornik*, 1987, vol. 58, no. 1, pp. 279—287. DOI: 10.1070/SM1987v058n 01ABEH003104.
10. Guven A., Israfilov D. M. Trigonometric approximation in generalized lebesgue spaces $L^{p(x)}$. *J. Math. Inequal.*, 2010, vol. 4, no. 2, pp. 285–299.
11. Shakh-Emirov T. N. O ravnomernoi ogranichennosti semeistva operatorov Steklova v vesovykh prostranstvakh Lebega s peremennym pokazatelem [Uniform boundedness of Steklov's operators families in weighted variable Lebesgue spaces]. *Vestnik DNC RAN*, 2014, iss. 54, pp. 12–17 (in Russian).
12. Sobol I. M. *Mnogomernye kvadratnye formuly i funktsii Khaara* [Multidimensional Quadrature Formulas and Haar Functions]. Moscow, Nauka, 1969, 288 p. (in Russian).