41. Trynin A. Yu. O nekotorykh dostatochnykh usloviiakh ravnomernoi skhodimosti sink-approksimatsii [Some sufficient conditions for the uniform convergence of sinc-approximations]. *Mathematics, Mechanics*: Collection of Scientific Papers, Saratov, Saratov Univ. Press, 2015, iss. 17, pp. 269–272 (in Russian).

Please cite this article in press as:
Trynin A. Yu. Necessary and Sufficient Conditions for the Uniform on a Segment Sinc-approximations Functions of Bounded Variation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 288–298 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298.

УДК 517.51

ОБ ОПЕРАТОРАХ С РАЗРЫВНОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ

Г. В. Хромова

Хромова Галина Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

На базе известных операторов из теории приближения функций построены интегральные операторы с разрывной областью значений, позволяющие получать равномерные приближения к непрерывным функциям на всем отрезке их задания.

Ключевые слова: оператор, непрерывная функция, отрезок, равномерные приближения.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-298-302

1. В теории приближения функций при решении целого ряда задач используются интегральные операторы с дельтаобразными ядрами [1]. Это интегралы вида

$$K_\alpha f = \int_a^b K_\alpha(x,t) f(t)\, dt, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям:

1) $K_\alpha(x,t) > 0$ и интегрируема по t;

2) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_{|x-t|>\eta} K_\alpha(x,t)dt = 0$ равномерно для всех значений x, каково бы ни было мало число $\eta > 0$;

3) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_{|x-t|\leqslant\eta} K_\alpha(x,t)dt = 1$ равномерно для всех x из промежутка $[a',b']$, где $a < a' < b' < b$.

Теорема 1 (см. [1]). *Для любой $f(x) \in C[a,b]$ имеет место сходимость:*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^b K_\alpha(x,t) f(t) dt = f(x)$$

равномерно по x из любого внутреннего отрезка $[a',b'] \subset [a,b]$.

Доказательство. В силу свойства 3) операторов K_α справедливо представление:

$$K_\alpha 1 = 1 + o(1),$$

где $o(1) \to 0$ при $\alpha \to \alpha_0$ равномерно по $x \in [a',b']$, $a < a' < b' < b$. Значит, для таких x

$$f(x) = f(x) K_\alpha 1 + f(x) o(1).$$

Отсюда следует представление

$$K_\alpha f - f = \int_a^b K_\alpha(x,t)(f(t) - f(x))\, dt + f(x) o(1). \tag{2}$$

Далее, обозначим интеграл в правой части (2) через I и представим его в виде

$$I = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{|x-t|\leqslant\eta} K_\alpha(x,t)(f(t)-f(x))\,dt, \qquad I_2 = \int\limits_{|x-t|>\eta} K_\alpha(x,t)(f(t)-f(x))\,dt,$$

$$a' < \eta \leqslant (b'-a')/2.$$

Тогда $|I_1|$ можно сделать как угодно малым за счет оценки

$$|f(t)-f(x)| \leqslant \omega(\eta, f),$$

где $\omega(\eta, f)$ — модуль непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$, а $|I_2|$ — за счет оценки

$$|f(t)-f(x)| \leqslant 2\|f\|_{C[a,b]}$$

и условия 2).

Отсюда и из представления (2) следует утверждение теоремы. □

Оператор K_α оказывает усредняющее действие на функцию $f(x)$. При этом усреднение может быть локальным, т.е. действующим на функцию в окрестности точки $x \in [a,b]$ (пример — известный оператор Стеклова), либо глобальным, т.е. действующим на всем отрезке(пример — оператор Ландау [1]).

Недостатком указанных выше операторов является затруднение при получении равномерных приближений к непрерывным функциям на всем отрезке их задания.

С целью устранения этого недостатка делались попытки модификации операторов K_α (особенно это относится к наиболее простому из них — оператору Стеклова [2, 3]).

А. П. Хромовым был предложен метод построения из операторов (1) операторов с разрывной областью значений (разрывных операторов), с помощью которых получаются равномерные приближения к непрерывным функциям на всем отрезке их задания. Такие операторы построены из операторов Стеклова [4] и Ландау [5].

Разрывные операторы дают возможность строить из них конструкции, позволяющие получать равномерные приближения к решению различных задач. А именно на базе разрывных операторов были решены следующие задачи.

1. Задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению — используя разрывный оператор Стеклова [4]:

$$S_\alpha f = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\int\limits_x^{x+\alpha} f(t)dt \equiv S_{\alpha 2} f, & x \in [0, 1/2], \\ \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} f(t)dt \equiv S_{\alpha 1} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

и разрывный оператор [5]:

$$T_n f = \begin{cases} (n+1)\int\limits_x^1 (1-(t-x))^n f(t)dt, & x \in [0, 1/2], \\ (n+1)\int\limits_0^x (1-(x-t))^n f(t)dt, & x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

2. Задача приближения производной m-го порядка и задача восстановления такой производной по заданному среднеквадратичному приближению к самой функции — использовался разрывный оператор [6]:

$$T_{\alpha m} f = \begin{cases} D^m S_{\alpha 2}^{m+1} f, & x \in [0, 1/2], \\ D^m S_{\alpha 1}^{m+1} f, & x \in [1/2, 1] \end{cases} \tag{3}$$

(D^m — оператор дифференцирования порядка m).

3. Обратная задача для уравнения теплопроводности — использовались операторы (3) при $m = 1$ и оператор, составленный из квадратов операторов, стоящих в правой части (3) при $m = 1$ [7].

4. Задача приближенного решения уравнения Абеля — использовались разрывные операторы:

$$R_\alpha f = \begin{cases} S_{\alpha 2} A^{-1} f, & x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1} A^{-1} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \qquad R_\alpha f = \begin{cases} S_{\alpha 2}^2 A^{-1} f, & x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1}^2 A^{-1} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где A^{-1} — оператор, обратный к оператору в уравнении Абеля [8, 9].

2. Рассмотрим оператор [10, с. 298]

$$\bar{A}_n f = \frac{n}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f(t)dt}{1 + n^2(t - x)^2}.$$

Это один из операторов вида (1) и для него справедлива теорема 1.

Построим разрывный оператор:

$$A_n f = \begin{cases} \dfrac{2n}{\pi} \displaystyle\int\limits_x^1 \frac{f(t)dt}{1 + n^2(t - x)^2} \equiv A_{n2} f, & x \in [0, \xi], \\ \dfrac{2n}{\pi} \displaystyle\int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{1 + n^2(t - x)^2} \equiv A_{n1} f, & x \in [\xi, 1]. \end{cases} \tag{4}$$

Лемма 1. *При $x \in [\xi, 1]$, $0 < \xi \leqslant 1/2$ для любой $f(x) \in C[0, 1]$ имеет место сходимость:*

$$\|A_{n1} f - f\|_{C[\xi,1]} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Имеем:

$$A_{n1} 1 = 1 + o(1), \tag{5}$$

где $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [\xi, 1]$.

Действительно, справедливо представление

$$A_{n1} 1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{nx} \frac{dt}{1 + t^2}. \tag{6}$$

Далее, из равенства $\int\limits_0^{nx} = \int\limits_0^{\infty} - \int\limits_{nx}^{\infty}$ и оценки: $\left|\int\limits_{nx}^{\infty}\right| \leqslant \left|\int\limits_{n\xi}^{\infty}\right|$ вытекает равенство (6).

Отсюда получаем:

$$A_{n1} f - f(x) = \frac{2n}{\pi} \int\limits_0^x \frac{f(t) - f(x)}{1 + n^2(t - x)} dt + o(1) f(x).$$

Теперь берем η из интервала $(0, x)$, пользуемся представлением

$$\int\limits_0^x = \int\limits_0^{x-\eta} + \int\limits_{x-\eta}^x$$

и повторяем рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1. Учитываем, что равенство (5) выполняется при $x \in [\xi, 1]$, и получаем утверждение леммы. □

Аналогично доказывается

Лемма 2. *При $x \in [0, 1 - \xi]$, $0 < \xi \leqslant 1/2$ для любой $f(x) \in C[0, 1]$ имеет место сходимость*

$$\|A_{n2} f - f\|_{C[0,1-\xi]} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из (4) и лемм 1 и 2 при $\xi = 1/2$ следует

Теорема 2. *Для любой* $f(x) \in C[0,1]$ *выполняется сходимость*

$$\|A_n f - f\|_{L_\infty[0,1]} \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

где $\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\}$.

3. Рассмотрим оператор Вейерштрасса [10, с. 345]:

$$\bar{W}_n f = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^1 e^{-n^2(t-x)^2} f(t)\, dt.$$

Для него также справедлива теорема 1.

Построим разрывный оператор:

$$W_n f = \begin{cases} \frac{2n}{\pi} \int\limits_x^1 e^{-n^2(t-x)^2} f(t) dt \equiv W_{n1} f, & x \in [0, \xi], \\ \frac{2n}{\pi} \int\limits_0^x e^{-n^2(t-x)^2} f(t) dt \equiv W_{n2} f, & x \in [\xi, 1]. \end{cases}$$

Для этого оператора справедливы утверждения лемм 1 и 2 с заменой A_{nj} на W_{nj}, $j = 1, 2$. В этом легко убедиться, повторив доказательства лемм с учетом равенства

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отсюда следует справедливость теоремы 2 с заменой A_n на W_n .

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014К).

Библиографический список

1. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М. : ГИТЛ, 1954.
2. *Хромова Г. В.* О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.
3. *Сендов Б. Х.* Модифицированная функция Стеклова // Докл. Болг. Акад. наук. 1983. Т. 134, № 2. С. 355–379.
4. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 15-й Сарат. зимн. шк., посвящ. 125-летию со дня рожд. В. В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. С. 181.
5. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Об одном семействе операторов с разрывной областью значений в задачах приближения и восстановления непрерывных функций // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 10. С. 1603–1609. DOI: 10.7868/S0044466913100104.
6. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* Разрывные операторы Стеклова в задаче равномерного приближения производных на отрезке // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54, № 9. С. 57–62. DOI: 10.7868/S0044466914090099.
7. *Хромов А. А., Хромова Г. В.* Решение задачи об определении плотности тепловых источников // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 309–314. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314.
8. *Хромова Г. В.* Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4. С. 597–601.
9. *Хромова Г. В.* О равномерных приближениях к решению интегрального уравнения Абеля // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55, № 10. С. 1703–1712. DOI: 10.7868/S0044466915100142.
10. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. СПб. : Лань, 2013. 560 с.

Образец для цитирования:

Хромова Г. В. Об операторах с разрывной областью значений // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 298–302. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-298-302.

On Operators with Discontinuous Range

G. V. Khromova

Galina V. Khromova, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

With the use of operators from approximation function theory we construct integral operators with discontinuous range of values, which make it possible to obtain uniform approximations of continuous functions on the whole interval of their definition.

Key words: operator, continuous function, interval, uniform approximations.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1520.2014K).

References

1. Goncharov V. L. The theory of interpolation and approximation of functions. Moscow, GITL, 1954 (in Russian).
2. Khromova G. V. The problem of the reconstruction of functions that are given with error. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1977, vol. 17, no. 5, pp. 1161–1171.
3. Sendov B. X. A modified Steklov function. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 1983, vol. 134, no. 2, pp. 355–379.
4. Khromov A. P., Khromova G. V. On a modification of the Steklov operator. *Modern Problems in Function Theory and Applications : Abstracts of Papers of Saratov Winter School*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2010, pp. 181 (in Russian).
5. Khromov A. P., Khromova G. V. A family of operators with discontinuous ranges and approximation and restoration of continuous functions. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 10, pp. 1603–1609. DOI: 10.1134/S0965542513100096.
6. Khromov A. P., Khromova G. V. Discontinuous Steklov operators in the problem of uniform approximation of derivatives on an interval. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 9, pp. 57–62. DOI: 10.1134/S0965542514090085.
7. Хромов A. A., Khromova G. V. The solution of the problem of determining the density of heat sources in a rod, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 309–314. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314.
8. Khromova G. V. Regularization of Abel Equation with the Use of Discontinuous Steklov Operator, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 597–601.
9. Khromova G. V. On uniform approximations to the solution of the Abel integral equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 10, pp. 1703–1712. DOI: 10.1134/S0965542515100139.
10. Nathanson I. P. *Theory of functions of a real variable*. St. Petersburg, Lan', 2013, 560 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:
Khromova G. V. On Operators with Discontinuous Range. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 298–302 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-298-302.

УДК 591.65

О ПРЕДЕЛЬНОМ ЗНАЧЕНИИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМУ ПОЛИНОМУ ЛАГРАНЖА

И. А. Шакиров

Шакиров Искандер Асгатович, кандидат физико-математических наук, проректор по дополнительному образованию, Набережночелнинский государственный педагогический университет, iskander@tatngpi.ru

Изучается поведение константы Лебега тригонометрического полинома Лагранжа, интерполирующего периодическую функцию в нечетном числе узлов. Найдено предельное значение остаточного члена, входящего в известную асимптотическую формулу для этой константы. Специальное представление остаточного члена позволило установить его строгое убывание. На этой основе для константы Лебега получена неулучшаемая равномерная двусторонняя оценка логарифмическими функциями. Решены экстремальные задачи, связанные с наилучшим приближением константы Лебега: указаны вполне определенные элементы наилучшего приближения и значение наилучшего приближения.

Ключевые слова: полином Лагранжа, квадратурная формула, константа Лебега, экстремальная задача, аппроксимация.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-302-310