$$\lambda \in \sigma_c(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \backslash ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))),$$

где $A_\lambda = A|E_2(\lambda)X$, $B_\lambda = B|E_1(\lambda)X$.

Доказательство. Известно [3], что в условиях теоремы матричный оператор T является ограниченным спектральным оператором с разложением единицы $\tilde{E}(\cdot) = \begin{pmatrix} E_1(\cdot) & O \\ O & E_2(\cdot) \end{pmatrix}$ и квазинильпотентной частью $\tilde{N} = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$.

Следовательно, если $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = O$, то $\tilde{E}(\lambda) = \tilde{O}$, и в силу приведенного утверждения $\lambda \in \sigma_c(T)$, где $\tilde{O}$ — нулевой матричный оператор, а в случае $\tilde{E}(\lambda) \neq \tilde{O}$, что получается хотя бы при одном из условий $E_1(\lambda) \neq O$, $E_2(\lambda) \neq O$, верны:

$$\lambda \in \sigma_p(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_p(\tilde{N}_\lambda), \quad \lambda \in \sigma_r(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_r(\tilde{N}_\lambda), \quad \lambda \in \sigma_c(T) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_c(\tilde{N}_\lambda),$$

где $\tilde{N}_\lambda = \tilde{N}|\tilde{E}(\lambda)X^2$. В силу утверждения 2) теоремы 2 получим

$$0 \in \sigma_p(\tilde{N}_\lambda) \;\Leftrightarrow\; 0 \in \sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda), \qquad 0 \in \sigma_r(\tilde{N}_\lambda) \;\Leftrightarrow\; 0 \in (\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \backslash (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda)),$$
$$0 \in \sigma_c(\tilde{N}_\lambda) \;\Leftrightarrow\; 0 \in (\sigma_c(A_\lambda) \cup \sigma_c(B_\lambda)) \backslash ((\sigma_r(A_\lambda) \cup \sigma_r(B_\lambda)) \cup (\sigma_p(A_\lambda) \cup \sigma_p(B_\lambda))).$$

Теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы : в 3 т. Т. III. Спектральные операторы. М. : Мир, 1974.

2. *Ismailov M. I.* On spectrum property of matrix operators in Banach space // Trans. NAS of Azerb. 2006. Vol. XXXIII. P. 47–52.

3. *Исмайлов М. И.* О спектральности матричных операторов в банаховом пространстве // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 4. С. 23–28.

УДК 517.984

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ СКАЧКИ НА ЛОМАНЫХ ЛИНИЯХ

О. А. Королева, А. П. Хромов

Саратовский государственный университет
E-mail: korolevaoart@yandex.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

В настоящей работе изучается равносходимость разложений в тригонометрические ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.

Ключевые слова: равносходимость, резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции.

Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines

O. A. Koroleva, A. P. Khromov

In this paper we study equiconvergence expansions in trigonometric Fourier series, and in eigenfunctions and associated functions of an integral operator whose kernel suffers jumps at the sides of the square inscribed in the unit square.

Key words: equiconvergence, resolvent, characteristic number, eigenfunctions and associated functions.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x,t)\, f(t)\, dt. \tag{1}$$

Обозначим: $A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\ 0 \le x \le 1/2\}$, $A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1/2\}$, $A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\ 1/2 \le x \le 1\}$, $A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\ 1/2 \le x \le 1\}$, $A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ и $\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\ 1/2 \le x \le 1\}$.

Предположим, что $A_i(x,t)$, $i = 1, \dots, 5$, непрерывно-дифференцируемые в своих областях, причем $A_5(x, 1/2 - x + 0) - A_1(x, 1/2 - x - 0) = a$, $A_5(x, 1/2 + x - 0) - A_2(x, 1/2 + x + 0) = b$, $A_5(x, -1/2 + x + 0) - A_3(x, -1/2 + x - 0) = c$, $A_5(x, 3/2 - x - 0) - A_4(x, 3/2 - x + 0) = d$, где a, b, c, d — постоянные.

Частный случай оператора (1) впервые рассматривался в [1].

1. Рассмотрим следующий оператор:

$$z = Bg = \int_0^{1/2} B(x,t) g(t)\, dt, \qquad 0 \le x \le 1/2, \tag{2}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & A(x, 1/2 - t) & A(x, 1/2 + t) & 0 \\ A(1/2 - x, t) & 0 & 0 & A(1/2 - x, 1 - t) \\ A(1/2 + x, t) & 0 & 0 & A(1/2 + x, 1 - t) \\ 0 & A(1 - x, 1/2 - t) & A(1 - x, 1/2 + t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Если $y = Af$, то $z = Bg$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1/2 - x)$, $z_3(x) = y(1/2 + x)$, $z_4(x) = y(1 - x)$, $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(1/2 - x)$, $g_3(x) = f(1/2 + x)$, $g_4(x) = f(1 - x)$. Обратно: если $z = Bg$ и $g_1(x) = g_2(1/2 - x)$, $g_3(x) = g_4(1/2 - x)$, то $z_1(x) = z_2(1/2 - x)$, $z_3(x) = z_4(1/2 - x)$ и $y = Af$, где $f(x) = g_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $f(x) = g_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$ и $y(x) = z_1(x)$, при $x \in [0, 1/2]$; $y(x) = z_3(-1/2 + x)$, при $x \in [1/2, 1]$.*

Доказательство. Пусть $y = Af$. Тогда имеем

$$y(x) = \int_0^{1/2} A(x,t) f(t)\, dt + \int_{1/2}^{1} A(x,t) f(t)\, dt. \tag{3}$$

Пусть $x \in [0, 1/2]$. Представим (3) в виде

$$y(x) = \int_0^{1/2} A(x, 1/2 - t) f(1/2 - t)\, dt + \int_0^{1/2} A(x, 1/2 + t) f(1/2 + t)\, dt. \tag{4}$$

Здесь разрывы ядер в обоих интегралах на линии $x = t$. Положим в (4) $1/2 - x$ вместо x, и в обоих интегралах выполним такие замены t, чтобы опять разрывы ядер были на линии $x = t$, т. е. будем иметь

$$y(1/2 - x) = \int_0^{1/2} A(1/2 - x, t) f(1/2 - t)\, dt + \int_0^{1/2} A(1/2 - x, 1 - t) f(1 - t)\, dt. \tag{5}$$

Пусть теперь $x \in [1/2, 1]$. Тогда возьмем в (3) $1/2 + x$ вместо x (т. е. опять получаем, что $x \in [0, 1/2]$), и опять надлежащими заменами по t добьемся, что разрывы ядер в интегралах будут на линии $x = t$, т. е. имеем

$$y\,(1/2 + x) = \int_0^{1/2} A(1/2 + x, t) f(t) dt + \int_0^{1/2} A(1/2 + x, 1 - t) f(1 - t)\, dt. \tag{6}$$

Наконец, в (6) положим $1/2 - x$ вместо x, и, действуя далее как и в (3), придем к

$$y(1 - x) = \int_0^{1/2} A(1 - x, 1/2 - t) f(1/2 - t)\, dt + \int_0^{1/2} A(1 - x, 1/2 + t) f(1/2 + t)\, dt. \tag{7}$$

В итоге, (4)–(7) представляет собой $z = Bg$. Обратное очевидно. □

Замечание. Представление типа (2) не единственно. Наше же представление хорошо тем, что компоненты матрицы $B(x,t)$ терпят разрывы лишь на линии $t = x$.

2. Займемся обращением оператора B. Представим B в виде

$$z(x) = Bg(x) = \int_0^x B_1(x,t)g(t)\,dt + \int_x^{1/2} B_2(x,t)g(t)\,dt, \tag{8}$$

где

$$B_1(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & A_5(x,1/2-t) & A_5(x,1/2+t) & 0 \\ A_1(1/2-x,t) & 0 & 0 & A_2(1/2-x,1-t) \\ A_3(1/2+x,t) & 0 & 0 & A_4(1/2+x,1-t) \\ 0 & A_5(1-x,1/2-t) & A_5(1-x,1/2+t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & A_1(x,1/2-t) & A_2(x,1/2+t) & 0 \\ A_5(1/2-x,t) & 0 & 0 & A_5(1/2-x,1-t) \\ A_5(1/2+x,t) & 0 & 0 & A_5(1/2+x,1-t) \\ 0 & A_3(1-x,1/2-t) & A_4(1-x,1/2+t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Дифференцируем (8) по x. Получим

$$z'(x) = \int_0^x B_1x(x,t)g(t)dt + \int_x^{1/2} B_2x(x,t)g(t)dt + Qg(x) = \int_0^x B_x(x,t)g(t)dt + Qg(x), \tag{9}$$

где $Q = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ -a & 0 & 0 & -b \\ -c & 0 & 0 & -d \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix}$.

Считаем, что Q обратима, т. е. требуем, чтобы $bc - ad \neq 0$. Тогда из (9) получим

$$Pz'(x) = g(x) + \tilde{B}g(x), \tag{10}$$

где $P = Q^{-1}$, $\tilde{B}g(x) = \int\limits_0^{1/2} \tilde{B}(x,t)g(t)dt$, $\tilde{B}(x,t) = PB_x(x,t)$.

Представим оператор $\tilde{B}$ в пространстве $L_2^2[0,1/2]$ в виде $\tilde{B} = W + V$, где $||W|| < 1$, а V — конечномерный, т.е. $Vg(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} (g,\psi_k)\varphi_k(x)$, где $\{\psi_k\}_{k=1}^m, \{\varphi_k\}_{k=1}^m$ — линейно независимые системы в пространстве вектор-функций размерности 4, причём $\varphi_k(x)$ достаточно гладкие, например, вектор-функции полной ортогональной системы, образованной из тригонометрической,

$$(g,\varphi_k) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{1/2} g_j(t)\overline{\psi_k^j}(t)dt,$$

где $\psi_k^j(t)$ компоненты ψ_k(t). Из (10) получаем

$$(E+W)^{-1} = Pz'(x) = g(x) + (E+W)^{-1}Vg(x). \tag{11}$$

Лемма 1. *Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} M = m,$$

где $M = \begin{pmatrix} E + (\tilde{\varphi},\psi)^T \\ \int\limits_0^{1/2} \tilde{B}(0,t)\tilde{\psi}^T(t)\,dt \end{pmatrix}$, *$E$ — единичная матрица $m \times m$,* $(\tilde{\varphi},\psi) = (\tilde{\varphi}_j,\psi_k)_{i,k=1}^m$, $\tilde{\varphi}_k = (E+W)^{-1}\varphi_k$, $\tilde{\varphi}^T = (\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_m)$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 14 из [1].

Лемма 2. *Пусть B^{-1} существует и для определенности минор $\triangle$ матрицы M, образованный из первых m строк, отличен от нуля. Тогда*

$$B^{-1}z = (E+W)^{-1}Pz'(x) - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,k=1}^{m}((E+W)^{-1}Pz', \psi_j)\Delta_{jk}\tilde{\varphi}_k(x), \tag{12}$$

$$\int\limits_0^{1/2} B(0,z)B^{-1}z(t)dt = z(0), \tag{13}$$

где Δ_{jk} — алгебраические дополнения элементов определителя Δ.

Доказательство. Пусть $z = Bg$. Тогда имеет место (10). Отсюда

$$\big((E+W)^{-1}Pz'(x), \psi_j\big) = (g,\psi_j) + \sum_{k=1}^{m}(g,\psi_k)(\tilde{\varphi}_k,\psi_j), \quad j=\overline{1,m}.$$

Так как определитель этой системы относительно (g,ψ_k) есть Δ, то, находя явно (g,ψ_k) и подставляя в (11), получаем (12). Соотношение (13) очевидно. □

Теорема 2. *Для оператора B^{-1} справедливо представление*

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\,(1/2) + a_3(x)z(x) + \int\limits_0^{1/2} a(x,t)z(t)\,dt,$$

$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int\limits_0^{1/2} a(t)z(t)\,dt = 0.$$

где $a_i(x)$, $i=\overline{1,3}$, $a_3'(x)$, $a(x)$ — непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x,t)$ имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x,t)$, $S = E + \int\limits_0^{1/2} B(0,t)a_1(t)\,dt$, $T = \int\limits_0^{1/2} B(0,t)a_2(t)\,dt$ — постоянные матрицы 4×4.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 10 в [1].

3. Получим интегродифференциальную систему для резольвенты $R_\lambda = (E-\lambda A)^{-1}A$ оператора A. Пусть $z = (E-\lambda B)^{-1}Bg$. Тогда $z - \lambda Bz = Bg$. Отсюда по теореме 2 получаем

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z(1/2) + a_3(x)z(x) + \tilde{N}z - \lambda z(x) = g(x), \tag{14}$$

$$Sz(0) + Tz(1/2) + \int\limits_0^{1/2} a(t)z(t)\,dt = 0, \tag{15}$$

где $\tilde{N}z = \int\limits_0^{1/2} a(x,t)z(t)\,dt$.

Теорема 3. *Если R_λ существует, то $R_\lambda f = v(x)$, где*

$$v(x) = z_1(x) \quad \text{при} \quad x\in[0,1/2] \quad \text{и} \quad v(x) = z_3(x-1/2) \quad \text{при} \quad x\in[1/2,1], \tag{16}$$

$z_1(x)$, $z_3(x)$ — первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (14), (15). *Обратно, если λ таково, что однородная краевая задача для* (14), (15) *имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле* (16).

Доказательство повторяет доказательство леммы 1 из [2].

4. Приступим к исследованию системы (14), (15). Минимальный многочлен матрицы $Q = P^{-1}$ совпадает с характеристическим многочленом и равен $\lambda^4 - \lambda^2(d^2 - 2bc + a^2) + (bc - ad)^2$. Значит, выполняется следующая лемма.

Лемма 3. *При условии $d \neq a, (d+a)^2 - 4bc \neq 0$ матрица Q подобна диагональной $D = \operatorname{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, причём $\omega_3 = -\omega_2$, $\omega_4 = -\omega_1$, $\omega_1 \neq \omega_2$. Пусть матрица Γ такая, что $\Gamma^{-1}P^{-1}\Gamma = D$. Выполнив в* (14), (15) *замену $z = \Gamma\tilde{z}$, получим*

$$\tilde{z}'(x) + P_1(x)\tilde{z}(0) + P_2(x)\tilde{z}(1/2) + P_3(x)\tilde{z}(x) + N\tilde{z}(x) - \lambda D\tilde{z}(x) = m(x), \tag{17}$$

$$M_0\Gamma\tilde{z}(0) + M_1\Gamma\tilde{z}(1/2) + \Gamma\int_0^{1/2}\Omega(t)\tilde{z}(t)\,dt = 0, \tag{18}$$

где $P_i(x) = D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma$, $N = D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma$, $m(x) = D\Gamma^{-1}g(x)$, $\Omega(t) = a(t)\Gamma$, $M_0 = S\Gamma$, $M_1 = T\Gamma$.

При изучении системы (17), (18) затруднения вызывает матрица $P_3(x)$. Поэтому дадим её дальнейшее преобразование.

Лемма 4. *Существует матрица-функция $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно-дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональная такая, что преобразование $\tilde{z} = H(x,\lambda)v$ приводит систему* (17), (18) *к виду*

$$v'(x) + P_1(x,\lambda)v(0) + P_2(x,\lambda)v(1/2) + P_3(x,\lambda)v(x) + N_\lambda v(x) - \lambda Dv(x) = m(x,\lambda), \tag{19}$$

$$U(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1/2) + \int_0^{1/2}\Omega(t,\lambda)v(t)dt = 0, \tag{20}$$

где $P_1(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_1(x)H(0,\lambda)$, $P_2(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_2(x)H(1/2,\lambda)$, $P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda) \times$ $\times [H_2'(x) + P_3(x)H_2(x)]$, $N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda)$, $M_{0\lambda} = M_0H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = M_1H(1/2,\lambda)$, $\Omega(t,\lambda) =$ $= \Omega(t)H(t,\lambda)$, $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$.

Доказывается так же, как и лемма 16 в [1].

5. Рассмотрим систему

$$w'(x) = \lambda Dw(x) + m(x), \tag{21}$$

$$U(w) = 0, \tag{22}$$

где U берётся из (20), а $m(x)$ — произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0,1/2]$. Будем считать, что $\operatorname{Re}\lambda\omega_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda\omega_2 \geqslant 0$. Так же, как в [1] (лемма 1), получаем следующую лемму.

Лемма 5. *Для решения w системы* (21), (22) *имеет место представление*

$$w(x) = w(x,\lambda) = -Y(x,\lambda)\,\triangle^{-1}(\lambda)\int\limits_0^{1/2} U_x(g(x,t,\lambda))m(t)dt + g_\lambda m(x), \tag{23}$$

где $Y(x,\lambda) = \operatorname{diag}(e^{\lambda\omega_1 x}, \ldots, e^{\lambda\omega_4 x})$, $\triangle(\lambda) = U(Y(x,\lambda))$, U_x означает, что U применяется по x,

$$g(x,t,\lambda) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\lambda), \ldots, g_4(x,t,\lambda)),$$

$$g_i(x,t,\lambda) = \begin{cases} -\varepsilon(t,x)e^{\lambda\omega_i(x-t)}, & \text{при } \operatorname{Re}\lambda\omega_i \geqslant 0, \\ \varepsilon(x,t)e^{\lambda\omega_i(x-t)}, & \text{при } \operatorname{Re}\lambda\omega_i \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leqslant x \\ 0, & \text{при } t > x, \end{cases}, \quad g_\lambda m(x) = \int\limits_0^{1/2} g(x,t,\lambda)m(t)dt.$$

Лемма 6. *Для матрицы $\triangle(\lambda)$ при больших λ имеет место следующее представление:*

$$\Delta(\lambda) = ([a_{ij}] + [b_{ij}]e^{\mu\omega_j})_{i,j=1}^4, \tag{24}$$

где $\mu = \lambda/2$, a_{ij}, b_{ij} — компоненты матриц K_0 и L_0 соответственно, $K_0 = S\Gamma H_0(0)$, $L_0 = T\Gamma H_0(1/2)$, $[a] = a + o(1)$.

Доказательство. Пусть $\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \Delta_1(\lambda)$, где $\Delta_0(\lambda) = M_{0\lambda}Y(0,\lambda) + M_{1\lambda}Y(1/2,\lambda)$, $\Delta_1(\lambda) =$ $= \int\limits_0^{1/2}\Omega(t,\lambda)Y(t,\lambda)\,dt$. Для $\Delta_0(\lambda)$ имеет место формула

$$\Delta_0(\lambda) = K_0 + \lambda^{-1}K_1 + (L_0 + \lambda^{-1}L_1)Y(1/2,\lambda),$$

где K_1, L_1 — постоянные матрицы. Элементы $\Delta_1(\lambda)$ имеют оценку $o(e^{\operatorname{Re}\mu\omega_i})$ для первого и второго столбиков и $o(1)$ — для третьего и четвёртого столбиков. Тогда утверждение леммы становится очевидным. $\square$

Лемма 7. *Для* $\det\Delta(\lambda)$ *имеет место асимптотическая формула:*

$$\det\Delta(\lambda) = \{\varphi(\lambda) + o(1)\}e^{\mu(\omega_1+\omega_2)},$$

где $\varphi(\lambda) = \theta_0 + \theta_1 e^{\mu(-\omega_1)} + \theta_2 e^{\mu(-\omega_2)} + \theta_3 e^{\mu(\omega_3-\omega_1-\omega_2)} + \theta_4 e^{\mu(\omega_3-\omega_2)} + \theta_5 e^{\mu(\omega_4-\omega_2)} + \theta_6 e^{\mu(\omega_3-\omega_1)} + \theta_7 e^{\mu(\omega_4-\omega_1)} + \theta_8 e^{\mu(\omega_3+\omega_4-\omega_1-\omega_2)}$, θ_i *— комплексные числа, причём*

$$\theta_0 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & b_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_{41} & b_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad \theta_8 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} & b_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix}.$$

Утверждение леммы следует из леммы 6.

Потребуем, чтобы $\theta_0\theta_8 \neq 0$. Из (24) следует, что нули $\det\Delta(\lambda)$, а именно они являются собственными значениями (21), (22) и при больших $|\lambda|$ находятся в полосах, границы которых параллельны некоторым лучам, исходящим из точки $\mu = 0$, причём в каждой полосе в любом прямоугольнике единичной длины число нулей $\det\,\Delta(\lambda)$ ограниченно числом, не зависящим от прямоугольника. Тогда известно, что если удалить все собственные значения вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ, то в получившейся области S_δ справедлива оценка:

$$|\Delta(\lambda)| \geq C|e^{\mu(\omega_1+\omega_2)}|, \tag{25}$$

где $C > 0$ и зависит только от δ.

Лемма 8. *Обозначим через* $R_{1\lambda}m$ *решение* $w(x,\lambda)$ *задачи* (21), (22). *В области* S_δ *при больших* $|\lambda|$ *имеют место оценки*

$$\|R_{1\lambda}m\|_\infty = O(\|m\|_1),$$
$$\|R_{1\lambda}m\|_1 = O(\psi(\lambda)\|m\|_1),$$
$$\|R_{1\lambda}m\|_\infty = O(\psi(\lambda)\|m\|_\infty),$$
$$\|R_{1\lambda}\chi\|_\infty = O(\tfrac{1}{\lambda}),$$

где $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ *— нормы в пространстве вектор-функций с компонентами из* $L_\infty(0,1/2)$, $L(0,1/2)$, $\chi(x)$ *— вектор-функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка, содержащегося в* $[0,1/2]$, $\psi(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{4} \aleph(|\operatorname{Re}\lambda\omega_j|)$, $\aleph(y) = (1-e^{-y})/y$ *при* $y \geqslant 0$.

Доказательство. В силу (24) алгебраические дополнения элементов матрицы $\Delta(\lambda)$ имеют оценки $\Delta_{j1} = O(e^{\mu\omega_2})$, $\Delta_{j2} = O(e^{\mu\omega_1})$, $\Delta_{j3} = O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)})$, $\Delta_{j4} = O(e^{\mu(\omega_1+\omega_2)})$. Они получаются после разложения миноров по аддитивному свойству и вынесением самой большой степени экспоненты. Поэтому в силу (25) для элементов матрицы $Y(x,\lambda)\cdot\Delta^{-1}(\lambda)$ справедливы оценки: $O(e^{\lambda\omega_i(x-1/2)})$, $i = 1,2$ и $O(e^{\lambda\omega_i x})$, $i = 3,4$. Так же, как в [2], получим, что $\int\limits_0^{1/2} g_j(x,t,\lambda)m_j(t)\,dt = O(\|m_j\|_1)$. Следовательно, $U(\int\limits_0^{1/2} g(x,t,\lambda)m(t)\,dt) = O(\|m\|_1)$, и первая оценка следует из (23).

Аналогично доказываются вторая и третья оценки. Четвертая оценка получается, если в качестве $m(x)$ взять $\chi(x)$. $\square$

Лемма 9. *Для* $f(x) \in L[0,1]$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right)\right] d\lambda \right\|_\infty = 0,$$

где $m(x) = D\Gamma^{-1}g(x)$.

Это утверждение доказывается по теореме Банаха–Штейнгауза.

6. Основная теорема. Рассмотрим краевую задачу

$$u'(x) = \lambda Du(x) + m(x),$$
$$U_0(u) = u(0) - u(1/2) = 0,$$

где $m(x)$ — вектор-функция с компонентами из $L[0,1/2]$. Ее решение обозначим через $R_{2\lambda}m$. Тогда для $R_{2\lambda}m$ имеет место формула (23), где Δ, U заменяются на Δ_0, U_0. Удалим из S_δ вместе с круговыми окрестностями δ нули $\Delta_0(\lambda)$. Получим новую область, которую опять обозначим за S_δ. Тогда в S_δ выполняются леммы:

Лемма 10. *Имеет место*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\lambda|=r} H(x,\lambda)[R_{1\lambda}m(x) - R_{2\lambda}m(x)]\,d\lambda\right\|_{[\varepsilon,1/2-\varepsilon]} = 0,$$

где $\|\cdot\|_{[\varepsilon,1/2-\varepsilon]}$ — *норма в* $C[\varepsilon,1/2-\varepsilon]$, $\varepsilon\in(0,1/4)$.

Это утверждение устанавливается так же, как и лемма 13 в [2].

Лемма 11. *Если* $v(x,\lambda)$ — *решение задачи* (19), (20), *то*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\int\limits_{|\lambda|=r}\left[H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}m(x))\right]\,d\lambda\right\|_{[\varepsilon,1/2-\varepsilon]} = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$H(x,\lambda)v(x,\lambda) - H_0(x)R_{2\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right) = H(x,\lambda)\left[v(x,\lambda) - R_{1\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right)\right] + H(x,\lambda)\times$$
$$\times\left[R_{1\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right) - R_{2\lambda}\left(H_0^{-1}m(x)\right)\right] + \left[H(x,\lambda) - H_0(x)\right]R_{2\lambda}H_0^{-1}m.$$

Тогда по леммам 9, 10 получаем требуемое. □

Теперь можно сформулировать теорему равносходимости.

Теорема 4. *Пусть существует* A^{-1}, *ядро* $A(x,t)$ *удовлетворяет условиям из леммы* 3. *Тогда в* S_δ *для любой* $f(x)\in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4}\gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j,x)\|_{[\varepsilon,1/2-\varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4}\gamma_{3j}\sigma_{r|\omega_j|}\left(\varphi_j,x-1/2\right)\|_{[1/2+\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — *частичная сумма ряда Фурье, по с. п. ф. оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k, *для которых* $|\lambda_k|<r$, $\sigma_r(f,x)$ — *частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на* $[0,1/2]$ *по системе* $\left\{e^{4k\pi ix}\right\}$ *для тех* k, *для которых* $|4k\pi|<r$, γ_{ij} (δ_{ij}) — *компоненты матрицы* Γ (Γ^{-1}), $\varphi_j(x) = \delta_{j1}f(x) + \delta_{j2}f(1/2-x) + \delta_{j3}f(1/2+x) + \delta_{j4}f(1-x)$.

Доказательство. Имеем

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f\,dx, \qquad \sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_{0\lambda}f\,dx,$$

где $R_{0\lambda}f$ — решение краевой задачи $y' - \lambda y = f$, $y(0) = y\,(1/2)$.

Пусть $x\in[\varepsilon,1/2-\varepsilon]$. Тогда в силу лемм 10–13 имеем

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} z_1(x)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\Gamma\tilde{z}(x)\right)_1\,d\lambda,$$

где $(\cdot)_1$ — первая компонента вектора, помещенного в скобки. Тогда

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\Gamma H(x,\lambda)v(x,\lambda)\right)_1 d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\left(\Gamma H_0(x)R_{2\lambda}(H_0^{-1}(x)m(x))\right)_1\,d\lambda + o(1),$$

где $o(1) \to 0$, $r \to \infty$ равномерно по $x \in [\varepsilon, 1/2 - \varepsilon]$. Значит,

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\Gamma \int\limits_{|\lambda|=r} H_0(x) R_{2\lambda}\left(h_1^{-1}(x)\omega_1\varphi_1(x), \dots, h_4^{-1}(x)\omega_4\varphi_4(x)\right)^T d\lambda\right)_1 + o(1) =$$
$$= (\Gamma \cdot (h_1(x)\sigma_{r|\omega_1|}(h_1^{-1}\varphi_1, x), \dots, h_4(x)\sigma_{r|\omega_4|}(h_4^{-1}\varphi_4, x))^T)_1 + o(1).$$

По аналогу теоремы Штейнгауза

$$a(x)\sigma_r(f,x) = \sigma_r(a \cdot f, x) + o(1), \qquad S_r(f,x) = \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j, x) + o(1).$$

Аналогично доказывается при $x \in [1/2 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ □

Лемма 12. *Для того чтобы ω_1, ω_2 — различные корни уравнения*

$$\lambda^2 - a_1\lambda + a_2 = 0, \tag{26}$$

где $a_1 = d^2 - 2bc + a^2$, $a_2 = (bc - ad)^2$, удовлетворяли условию $|\omega_1| = |\omega_2|$, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_1 = l(e^{\alpha\, i} + e^{\beta\, i}), \qquad a_2 = l^2 e^{(\alpha+\beta)\, i}, \tag{27}$$

где $l = |\omega_1|$, $\alpha = \arg\omega_1$, $\beta = \arg\omega_2$.

Доказательство. Пусть $|\omega_1| = |\omega_2| = l$. Тогда $\omega_1 = l\, e^{\alpha i}$, $\omega_2 = l\, e^{\beta i}$, и α, β различны. Тогда из (26) получим систему

$$\begin{cases} a_2 - l\, e^{\alpha i} a_1 = -l^2 e^{2\alpha i}, \\ a_2 - l\, e^{\beta i} a_1 = -l^2 e^{2\beta i}. \end{cases} \tag{28}$$

Отсюда $a_1 = l(e^{\alpha\, i} + e^{\beta\, i})$, $a_2 = l^2 e^{(\alpha+\beta)\, i}$.

Обратно, пусть выполняется (27). Тогда выполняется (28). Другими словами, уравнение (26) имеет корни $\omega_1 = l\, e^{\alpha i}$, $\omega_2 = l\, e^{\beta i}$. Лемма доказана. □

Теорема 5. *Если $|\omega_j| = l$, $j = \overline{1,4}$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sigma_{rl}(f,x)\|_{[\epsilon, 1/2-\epsilon]} = 0,$$
$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sigma_{rl}(g, x - 1/2)\|_{[1/2+\epsilon, 1-\epsilon]} = 0,$$

где $g(x) = f(1/2 + x)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}\sigma_{rl}(\varphi_j, x) = \sigma_{rl}(\gamma_{11}\varphi_1 + \gamma_{12}\varphi_2 + \gamma_{13}\varphi_3 + \gamma_{14}\varphi_4, x).$$

Так как $\gamma_{11}\varphi_1 + \gamma_{12}\varphi_2 + \gamma_{13}\varphi_3 + \gamma_{14}\varphi_4 = \left(\Gamma \cdot (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^T\right)_1 = (\Gamma \cdot \Gamma^{-1}(f(x), f(1/2 - x), f(1/2 + x), f(1 - x))^T)_1 = f(x)$, то первое утверждение доказано.

Аналогично доказывается второе утверждение. □

Замечание. Постановка задачи и результат, представленный в теореме 1, принадлежат А. П. Хромову.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270).

Библиографический список

1. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.
2. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.