УДК 517.956

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А. Д. Баев, С. С. Бунеев*

Воронежский государственный университет
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru
*Елецкий государственный университет
E-mail: limes88@mail.ru

Доказана теорема о существовании и единственности решения краевой задачи в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося на одной из границ полосы в уравнение третьего порядка по одной из переменных.

Ключевые слова: априорная оценка, вырождающееся эллиптическое уравнение, весовые пространства С. Л. Соболева.

The Theorem on Existence and Uniqueness of the Solution of One Boundary Value Problem in Strip for Degenerate Elliptic Equations of Higher Order

A. D. Baev, S. S. Buneev

Theorem on the existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem in the strip for one degenerate elliptic equations of higher order, which degenerate on one of boundary of the strip in the third-order equation by one variable, is proved.

Key words: a priori estimate, degenerate elliptic equation, weight of the space S. L. Sobolev.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интерес к вырождающимся уравнениям возрос в связи с использованием таких уравнений для моделирования различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. В работе В. П. Глушко [3] была установлена коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом. Задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с согласованным вырождением исходных данных в произвольной выпуклой области была исследована в работе В. А. Рукавишникова и А. Г. Ереклинцева [4]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [5, 6]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [7, 8], С. З. Левендорским [9], С. А. Исхоковым [10].

В работах А. Д. Баева [11–13] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка.

В настоящей работе доказана теорема о существовании и единственности решения краевой задачи типа задачи Дирихле в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе $t = 0$ в уравнение третьего порядка по одной из переменных.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассмотрим уравнение вида

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t) = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) + b\partial_t^3, \qquad L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum_{|\tau|+j\le 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j.$$

Здесь b, $a_{\tau j}$ — комплексные коэффициенты, причем $\operatorname{Im}\bar{b}a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \dfrac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\,\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|}\,\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}\ldots\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы задается условие вида

$$\sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau D_x^\tau v(x,t)|_{t=0} = G(x), \tag{2}$$

где b_τ — комплексные коэффициенты.

На границе $t = d$ задаются условия вида

$$v(x,t)|_{t=d} = \partial_t v(x,t)|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1} v(x,t)|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Предположим выполнение следующих условий.

Условие 1. *При всех $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$ справедлива оценка $\operatorname{Re}\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta) \ge c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ, η.*

Условие 2. *Для некоторого $s \ge \max\{2m,\ m^* + \frac{m}{3}\}$ функция $\alpha(t)$ принадлежит пространству $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.*

Условие 3. *При всех $\xi \in R^{n-1}$ справедливо условие $\sum\limits_{|\tau|\le m^*} b_{\tau j}\xi^\tau \ne 0$.*

Рассмотрим интегральное преобразование, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp\left(i\eta\int\limits_t^d \dfrac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right)\dfrac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$. В [3] показано, что для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. В этой работе для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$ ($s \ge 0$ — действительное число, m — натуральное число) состоит их тех функций $v(x,t) \in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} = \{\sum_{j=0}^{[\frac{3s}{2m}]} \left\|F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[(1+|\xi|^2+\eta^2)^{1/2(s-\frac{2m}{3}j)}F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_t^j v]]\right\|_{L_2(R_d^n)}^2\}^{1/2},$$

где $\left[\dfrac{3s}{2m}\right]$ — целая часть числа $\dfrac{3s}{2m}$. Здесь $F_{x\to\xi}$ ($F_{\xi\to x}^{-1}$) — прямое (обратное) преобразование Фурье.

Если s — целое неотрицательное число, то эта норма эквивалентна норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3}} = \left\{\sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{3}p\le s}\left\|D_x^\tau D_{\alpha,t}^j\partial_t^p v(x,t)\right\|_{L_2(R_d^n)}^2\right\}^{1/2}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева–Слободецкого.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $s \ge \max\{2m,\ m^* + \frac{m}{3}\}$ — целое число, $m \ge 3$ и выполнены условия 1–3. Пусть $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$, $G(x) \in H_{s-m^*-\frac{m}{3}}(R^{n-1})$. Тогда существует единственное решение $v(x,t)$ задачи (1)–(3), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$.*

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Наряду с задачей (1)–(3) рассмотрим следующую краевую задачу:

$$A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)\, u(\xi,t) = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t})\, u(\xi,t) + \partial_t^3 u(\xi,t) = f(\xi,t), \tag{4}$$

$$\sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau \xi^\tau u(\xi,t)\,|_{t=0} = g(\xi), \tag{5}$$

$$u(\xi,t)\,|_{t=d} = \partial_t u(\xi,t)\,|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1} u(\xi,t)\,|_{t=d} = 0. \tag{6}$$

Эта задача получается из задачи (1)–(3), если применить преобразования Фурье $F_{x\to\xi}$.

Аналогично определенным выше пространствам введем пространства $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0,d)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит по t пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0,d)$ ($s \ge 0$ — целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} = \left\{ \sum_{k+\frac{2m}{3}j\le s} \left\| F_\alpha^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{1/2k} F_\alpha\left[\partial_t^j u\right]\right]\right\|^2_{L_2(0;d)} \right\}^{1/2}.$$

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $s \ge \max\left\{2m, m^* + \frac{m}{3}\right\}$ *— целое число,* $m \ge 3$ *— целое число. Пусть* $f(\xi,t) \in \widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$ *при всех* $\xi \in R^{n-1}$ *и выполнены условия* 1–3. *Тогда при всех* $\xi \in R^{n-1}$ *существует единственное решение задачи* (4)–(6)*, принадлежащее пространству* $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$.

При доказательстве теоремы 2 существенно используется априорная оценка решений задачи (4)–(6). Сформулируем эту оценку в виде теоремы, которую приведем здесь без доказательства.

Теорема 3 *Пусть* $s \ge \max\left\{2m, m^* + \frac{m}{3}\right\}$ *— целое число,* $m \ge 3$ *— целое число. Пусть* $f(\xi,t) \in \widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0,d)$ *и выполнены условия* 1–3. *Тогда для любого решения* $u(\xi,t)$ *задачи* (4)–(6)*, принадлежащего при всех* $\xi \in R^{n-1}$ *пространству* $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$*, справедлива априорная оценка:*

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} \le c\left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|} + \left(1+|\xi|^2\right)^{s-m^*-\frac{m}{3}} |g(\xi)|^2 \right).$$

Для доказательства теоремы 2 вначале сведём задачу (4)–(6) к нелокальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром.

Рассмотрим функцию $\gamma(t) = (\alpha(t))^{\frac{2m}{2m-3}}$, тогда

$$D^k_{\alpha,t} u = \left(\frac{1}{i}\right)^k \sum_{j=0}^{k} \psi_{kj}(t)\gamma^{\frac{3(2m-j)}{2m}}(t)\gamma^{j-3}(t)\partial_t^j u\,, \tag{7}$$

где функции $\psi_{kj}(t)$ $(0 \le j \le k)$ находятся по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{cases} \psi_{k+1,k+1}(t) = \psi_{k,k}(t), \qquad \psi_{0,0}(t) = 1, \\ \psi_{j+1,0}(t) = \alpha(t)\partial_t\psi_{j,0}(t) + \frac{1}{2}\alpha'(t)\psi_{j,0}(t), \\ \psi_{j+1,\chi}(t) = \alpha(t)\partial_t\psi_{j,\chi}(t) + \psi_{j,\chi-1}(t) + (\chi+\frac{1}{2})\alpha'(t)\psi_{j,\chi}(t) \qquad (1 \le \chi \le j-1), \\ \psi_{j+1,j}(t) = \psi_{j,j-1}(t) + (j+\frac{1}{2})\alpha'(t). \end{cases} \tag{8}$$

Используя формулу (7), запишем уравнение (4) в виде

$$\sum_{k=4}^{2m} b_{2m-k}(\xi,t)\gamma^{k-3}\partial_t^k u + \sum_{k=0}^{3} b_{2m-k}(\xi,t)\partial_t^k u = f(\xi,t), \tag{9}$$

где $b_0(\xi,t) \equiv 1$, а функции $b_{2m-k}(\xi,t)$, $k = 0,1,\ldots,2m-1$ определяются по формулам

$$b_{2m-k}(\xi,t) = \sum_{j=k}^{2m} \sum_{|\tau|\le 2m-j} (-1)^{\frac{2m-j}{2m}} \frac{a_{\tau j}}{a_{02m}} \xi^\tau \psi_{j,k}(t)\gamma^{\frac{(2m-k)3}{2m}}(t), \tag{10}$$

где $4 \le k \le 2m-1$,

$$b_{2m-3}(\xi,t)=\sum_{j=3}^{2m}\sum_{|\tau|\le 2m-j}(-1)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,3}(t)\gamma^{\frac{3(2m-3)}{2m}}(t)+\frac{(-1)^m b}{a_{02m}},\tag{11}$$

$$b_{2m-k}(\xi,t)=\sum_{j=k}^{2m}\sum_{|\tau|\le 2m-j}(-1)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,k}(t)\gamma^{\frac{j(2m-3)}{2m}}(t),\tag{12}$$

где $k=1,2;$

$$b_{2m}(\xi,t)=\sum_{j=0}^{2m}\sum_{|\tau|\le 2m-j}(-1)^{\frac{2m-j}{2m}}\frac{a_{\tau j}}{a_{02m}}\xi^{\tau}\psi_{j,0}(t).\tag{13}$$

Обозначим

$$\begin{cases} w_{2m-k}(\xi,t)=\partial_t^k u(\xi,t), \qquad k=0,\,1,\,2,\,3,\\ w_{2m-k}(\xi,t)=\gamma^{k-3}(t)\partial_t^k u(\xi,t), \qquad k=4,\ldots,2m.\end{cases}\tag{14}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\gamma(t)\partial_t w_{2m-k}(\xi,t)-w_{2m-(k+1)}(\xi,t)-(k-3)\gamma'(t)w_{2m-k}(\xi,t)=0,\tag{15}$$

где $k=4,\ldots,2m-2;$

$$\begin{cases} \gamma(t)\partial_t w_1(\xi,t)=(2m-4)\gamma'(t)w_1(\xi,t)+\partial_t^{2m}u(\xi,t),\\ \gamma(t)\partial_t w_{2m-3}(\xi,t)-w_{2m-4}(\xi,t)=0,\\ \partial_t w_{2m-k}(\xi,t)-w_{2m-k-1}(\xi,t)=0, \qquad k=0,\,1,\,2.\end{cases}\tag{16}$$

Используя эти формулы, можно записать уравнение (9) в виде

$$\begin{cases} \gamma(t)\dfrac{d\overline{u}_1}{dt}+B_{11}(\xi,t)\overline{u}_1+B_{12}(\xi,t)\overline{u}_2=\overline{f}(\xi,t),\\ \dfrac{d\overline{u}_2}{dt}+B_{22}\overline{u}_2+B_{12}\overline{u}_1=0,\end{cases}\tag{17}$$

где $\overline{u}_1=(w_1(\xi,t),w_2(\xi,t),\ldots,w_{2m-3}(\xi,t))^T$, $\overline{u}_2=(w_{2m-2},\ldots,w_{2m})^T$, знак T означает транспонирование; $\overline{f}(\xi,t)=f(\xi,t)\overline{e}_1$, $\overline{e}_1=\{\delta_{1j}\}_{j=1}^{2m-3}$, δ_{ij} — символ Кронекера; $B_{11}(\xi,t)=\{c_{ij}\}_{i,j=1}^{2m-3}$ — матрица размерности $(2m-3)\times(2m-3)$, где

$$\begin{cases} c_{1,1}(\xi,t)=b_1(\xi,t)-(2m-4)\gamma'(t); \qquad c_{1,j}(\xi,t)=b_j(\xi,t), \quad j=2,3,\ldots,2m-3;\\ c_{j-1,j}=-1, \quad j=2,3,\ldots,2m-3; \qquad c_{j,j}=-(2m-3-j)\gamma'(t), \quad j=2,3,\ldots,2m-3.\end{cases}$$

Остальные элементы матрицы $B_{11}(\xi,t)$ равны нулю. $B_{12}(\xi,t)$ — матрица размера $(2m-3)\times 3$, у которой все элементы, кроме первой строки, равны нулю, а элементы первой строки имеют вид $c_{1,j}=b_{2m-3+j}(\xi,t)$, $j=1,2,3$. $B_{22}(\xi,t)$ — матрица размера 3×3, в которой $c_{j-1,j}=-1, j=2,3$, а остальные элементы равны нулю, $B_{21}(\xi,t)$ — матрица размера $3\times(2m-3)$, в которой $c_{1,2m-3}=1$, а все остальные элементы равны нулю.

Рассмотрим наряду с системой (17) систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \gamma(t)\dfrac{d\overline{u}_1}{dt}+(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I)\overline{u}_1+B_{12}^0(\xi,0)\overline{u}_2=\overline{f}(\xi,t),\\ \dfrac{d\overline{u}_2}{dt}+B_{22}\overline{u}_2+B_{21}\overline{u}_1=0.\end{cases}\tag{18}$$

Здесь матрица $B_{12}^0(\xi,0)$ отличается от матрицы $B_{12}(\xi,0)$ лишь тем, что элемент $b_{2m}(\xi,0)$ заменен на элемент $b_{2m}^0(\xi,0)$, где $b_{2m}^0(\xi,0)$ — главная часть многочлена $b_{2m}(\xi,0)$.

Как известно [14], нахождение «гладких» вплоть до $t=0$ решений системы (18) связано с расположением спектра матрицы $B_{11}(\xi,0)$. Из условий на функцию $\alpha(t)$ и определения функции $\gamma(t)$ получим, что $\gamma(0)=\gamma'(0)=0$. Отсюда и из (10)–(13) получим

$$b_{2m-k}(\xi,0)=0, \qquad k=1,2,\ldots,2m-1, \qquad k\neq 3; \qquad b_{2m-3}(\xi,0)=\frac{(-1)^m b}{a_{0\,2m}}.$$

Найдём собственные числа матрицы $B_{11}(\xi,0)$. Из вида матрицы $B_{11}(\xi,0)$ получим, что $\det(B_{11}(\xi,0)-\lambda I)=(-\lambda)^{2m-3}+b_{2m-3}(\xi,0)=0$. Отсюда $\lambda^{2m-3}=(-1)^m b/a_{0\,2m}$. Значит, все собственные числа матрицы $B_{11}(\xi,0)$ различны, причём нет собственных чисел, лежащих на мнимой оси. При этом $(m-2)$ собственных чисел лежат в левой полуплоскости и $(m-1)$ собственных чисел лежат в правой полуплоскости. То есть размерность инвариантного пространства $E_-(E_+)$ оператора $B_{11}(\xi,0)$, соответствующего собственным числам λ_k, лежащим в левой (правой) полуплоскости, равна $m-2$ $(m-1)$. Обозначим через $P_-(P_+)$ проекторы на $E_-(E_+)$. Будем обозначать через P_k $(k=1,2,\ldots,2m)$ операторы, действующие по формулам

$$P_k\overline{u}_1=w_k,\qquad k=1,2,\ldots,2m-3;\qquad P_k\overline{u}_2=w_k,\qquad k=2m-2,2m-1,2m.$$

Проектируя первое уравнение системы (18) на E_- и E_+, получим

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^-}}{dt}+(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I)\overline{u_1^-}=(f(\xi,t)-b^0_{2m}(\xi,0)u)P_-\overline{e}_1, \tag{19}$$

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^+}}{dt}+(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I)\overline{u_1^+}=(f(\xi,t)-b^0_{2m}(\xi,0)u)P_+\overline{e}_1, \tag{20}$$

где $u(\xi,t)=w_{2m}(\xi,t)$, $\overline{u_1^-}=P_-\overline{u}_1$, $\overline{u_1^+}=P_1\overline{u}_1$.

Рассмотрим однородное уравнение:

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^-}}{dt}+(B_{11}(\xi,0)+\gamma'(t)I)\overline{u_1^-}=0. \tag{21}$$

Можно показать [14], что размерность пространства решений уравнения (21), рассматриваемого как уравнение в $E_-\subset C^{2m-3}$, равна $(m-2)$.

Рассмотрим граничные условия (6). Их можно записать в виде

$$P_{2m}\overline{u}_2|_{t=d}=P_{2m-1}\overline{u}_2|_{t=d}=P_{2m-2}\overline{u}_2|_{t=d}=0, \tag{22}$$

$$P_{2m-3}\overline{u}_1|_{t=d}=P_{2m-4}\overline{u}_1|_{t=d}=\ldots=P_{m+1}\overline{u}_1|_{t=d}=0. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь граничное условие (5). Используя обозначения (14) и равенства (22), запишем условие (5) в виде

$$\sum_{|\tau|\le m^*} b_\tau\xi^\tau(-1)\int_0^t\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0d\tau_1d\tau_2\Big|_{t=d}=g(\xi). \tag{24}$$

Таким образом, условия (5)–(6) можно записать в виде условий при $t=d$. А именно в виде условий (23), (24).

То есть задача (4)–(6) сведена к задаче Коши (23), (24) для системы уравнений (17).

Прежде чем доказывать существование и единственность решения этой задачи, покажем существование и единственность решения задачи (18), (23), (24). Если обратить операторы, стоящие в левых частях уравнений (19) и (20), то получим

$$\begin{cases} \overline{u_1^-}(\xi,t)=U_1^-(t,d)q^- - \displaystyle\int_t^d U_1^-(t,s)P_-\overline{e}_1(f(s)-b^0_{2m}(\xi,0)u(s))\frac{ds}{\gamma(s)},\\ \overline{u_1^+}(\xi,t)=\displaystyle\int_0^t U_1^+(t,s)P_+\overline{e}_1(f(s)-b^0_{2m}(\xi,0)u(s))\frac{ds}{\gamma(s)}, \end{cases} \tag{25}$$

где $U_1^\pm(t,s)=\dfrac{\gamma(s)}{\gamma(t)}\exp\left(P_\pm B_{11}(\xi,0)\displaystyle\int_t^s\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)$, q^- — произвольный вектор из E_-.

Так как $\overline{u}_1(\xi,t)=\overline{u_1^-}(\xi,t)+\overline{u_1^+}(\xi,t)$, то из (25) получим равенство

$$\overline{u}_1(\xi,t)=U_1^-(t,d)q^- - \int_0^d\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau+b^0_{2m}(\xi,0)\int_0^d\Phi(t,\tau)u(\tau)d\tau, \tag{26}$$

где

$$\Phi(t,\tau)=\begin{cases}-U_1^{+}(t,\tau)P_{+}\overline{e}_1\dfrac{1}{\gamma(\tau)} & \text{при} \quad 0<\tau<t,\\ U_1^{-}(t,\tau)P_{-}\overline{e}_1\dfrac{1}{\gamma(\tau)} & \text{при} \quad t<\tau<d.\end{cases} \tag{27}$$

Учитывая, что $u(\xi,t)|_{t=d}=\partial_t u(\xi,t)|_{t=d}=\partial_t^2 u(\xi,t)|_{t=d}=0$, получим

$$u(\xi,t)=(-1)\int_t^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d\partial_t^3(\xi,\tau_0)d\tau_0d\tau_1d\tau_2=-\int_t^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0d\tau_1\,d\tau_2. \tag{28}$$

Применяя (28) в (26), получим

$$\overline{u}_1(\xi,t)=U_1^{-}(t,d)q^{-}-\int_0^d\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau-$$
$$-b_{2m}^0(\xi,0)\int_0^d\Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0d\tau_1d\tau_2d\tau. \tag{29}$$

При этом функция $\overline{u}_1(\xi,t)$ должна удовлетворять условиям (23), (24). Из (29) получим равенства

$$P_\nu\overline{u}_1=w_\nu=P_\nu U_1^{-}(t,d)q^{-}-\int_0^d P_\nu\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau-$$
$$-b_{2m}^0(\xi,0)\int_0^d P_\nu\Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0d\tau_1d\tau_2d\tau. \tag{30}$$

Подставляя в (30) $t=d$, получим

$$w_\nu|_{t=d}=P_\nu U_1^{-}(d,d)q^{-}-\int_0^d P_\nu\Phi(d,\tau)f(\tau)d\tau-$$
$$-b_{2m}^0(\xi,0)\int_0^d P_\nu\Phi(d,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0d\tau_1d\tau_2d\tau.$$

Заметим, что $U_1(d,d)=1$ и $w_\nu|_{t=d}=0$ при $m+1\le\nu\le 2m-3$. Отсюда при $m+1\le\nu\le 2m-3$ получим равенства

$$P_\nu q^{-}=d_\nu+b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-3}, \qquad \nu=m+1,m+2,\dots,2m-3, \tag{31}$$

где $d_\nu=\displaystyle\int_0^d P_\nu\Phi(d,\tau)f(\tau)d\tau$, $\quad M_\nu w_{2m-3}=\displaystyle\int_0^d\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d P_\nu\Phi(d,\tau)w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0d\tau_1d\tau_2d\tau.$

Рассмотрим теперь условия (24). Эти условия можно записать в виде

$$\theta(\xi)\int_0^t\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0d\tau_1d\tau_2|_{t=d}=g(\xi), \qquad \text{где} \quad \theta(\xi)=-\sum_{|\tau|\le m^*}b_\tau\xi^\tau. \tag{32}$$

Подставим функцию w_{2m-3}, определённую равенством (30) при $\nu=2m-3$, в равенство (32), получим

$$\theta(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d P_{2m-3}U_1^{-}(\tau_0,d)q^{-}d\tau_0d\tau_3d\tau_4=d_m+b_{2m}^0(\xi,0)M_m w_{2m-3}, \tag{33}$$

где

$$d_m=g(\xi)+\theta(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)f(\tau)d\tau_0d\tau_3d\tau_4d\tau.$$

$$M_m w_{2m-3}=\theta(\xi)\int_0^d\int_{\tau_4}^d\int_{\tau_3}^d\left[\int_0^d P_{2m-3}\Phi(\tau_0,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,s_0)ds_0d\tau_1d\tau_2d\tau\right]d\tau_0d\tau_3d\tau_4.$$

Таким образом, для нахождения вектора q^{-} — получим $(m-2)$ уравнений (уравнения (31) при $\nu=m+1,m+2,\dots,2m-3$ и уравнение (33)). Покажем, что эта система имеет единственное решение при достаточно малых $d>0$.

Пусть $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \dots, \overline{r}_{m-2}$ — собственные векторы матрицы $B_{11}(\xi, 0)$, соответствующие собственным числам, лежащим в левой полуплоскости. Так как $q^- \in E_-$, и векторы $\overline{r}_1, \dots, \overline{r}_{m-2}$ образуют базис в E_-, то существуют числа μ_p, $p = 1, 2, \dots, m-2$, что

$$q^- = \mu_1 \overline{r}_1 + \mu_2 \overline{r}_2 + \ldots + \mu_{m-2} \overline{r}_{m-2}. \tag{34}$$

Из условия $B_{11}(\xi, 0)\overline{r}_p = \lambda_p \overline{r}_p$ и вида матрицы $B_{11}(\xi, 0)$ получаем

$$r_{p,k} = (-\lambda_p)^{2m-3-k} r_{p,2m-3}, \qquad p = 1, 2, \dots, 2m-3. \tag{35}$$

Здесь $r_{p,k}$ — k-я координата вектора $\overline{r}_p$.

Из (35) следует, что так как $\overline{r}_p \neq \overline{0}$, то $r_{p,2m-3} \neq 0$. Из (34) и (35) получим

$$P_\nu q^- = \sum_{p=1}^{m-2} \mu_p P_\nu \overline{r}_p = \sum_{p=1}^{m-2} \mu_p r_{p\nu} = d_\nu + b^0_{2m}(\xi, 0) M_\nu w_{2m-3}, \qquad \nu = m+1, m+2, \dots, 2m-3.$$

Используя здесь равенство (35), получим

$$\sum_{p=1}^{m-2} \mu_p r_{p,2m-3} (\lambda_p)^{2m-3-\nu} = (-1)^{2m-3-\nu} (d_\nu + b^0_{2m}(\xi, 0) M_\nu w_{2m-3}), \quad \nu = m+1, m+2, \dots, 2m-3. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь условие (33). Так как $\overline{r}_p$ — собственный вектор матрицы $B_{11}(\xi, 0)$, отвечающий собственному значению λ_p, то

$$U_1^-(\tau, d)\overline{r}_p = \frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau)} \exp\left(\lambda_p \int_\tau^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) \overline{r}_p.$$

Отсюда и из (33) получим равенство

$$\sum_{p=1}^{m-2} \mu_p \theta(\xi) \int_0^d \int_{\tau_4}^d \int_{\tau_3}^d \frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau_0)} \exp(\lambda_p \int_{\tau_0}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}) r_{p,2m-3} d\tau_0 d\tau_3 d\tau_4 = d_m + b^0_{2m}(\xi, 0) M_m w_{2m-3}. \tag{37}$$

Заметим, что

$$\int_{\tau_1}^d \frac{1}{\gamma(\tau_0)} \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_0}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) d\tau_0 = -\frac{1}{\lambda_p}(1 - \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_1}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)). \tag{38}$$

Используя (38), получим из (37) равенство

$$\sum_{p=1}^{m-2} \theta(\xi)\gamma(d)\mu_p \frac{d^2}{2}\frac{1}{\lambda_p} r_{p,2m-3} - \sum_{p=1}^{m-2} \theta(\xi)\gamma(d)\mu_p \frac{1}{\lambda_p} \int\limits_0^d \int\limits_{\tau_4}^d \exp(\lambda_p \int\limits_{\tau_3}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}) r_{p,2m-3} d\tau_3 d\tau_4 =$$
$$= d_m + b^0_{2m}(\xi, 0) M_m w_{2m-3}.$$

Запишем это равенство в виде

$$\theta(\xi)\gamma(d)\frac{d^2}{2} \sum_{p=1}^{m-2} \frac{1}{\lambda_p} \mu_p r_{p,2m-3} - \theta(\xi)\gamma(d) \sum_{p=1}^{m-2} J_p \frac{1}{\lambda_p} \mu_p r_{p,2m-3} = d_m + b^0_{2m}(\xi, 0) M_m w_{2m-3}, \tag{39}$$

где $J_p = \int\limits_0^d \int\limits_\tau^d \exp\left(\lambda_p \int\limits_{\tau_3}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) d\tau_3 d\tau$.

Заметим, что так как $\operatorname{Re}\lambda_p < 0$, $p = 1,\ 2,\ \dots, m-2$, то $J_p = o(d^N)$ при $d \to +0$ для любого $N > 0$.

Таким образом, из (36) и (39) получим систему уравнений для нахождения чисел $(\mu_p r_{p,2m-3})$. Определитель этой системы имеет вид

$$D = \theta(\xi)\frac{\gamma(d)d^2}{2}[D_1 + o(d^N)],\ N > 0,$$

где D_1 — определитель матрицы размера $(m-2)\times(m-2)$, элементы которой имеют вид $\beta_{jp}=\lambda_p^{j-2}$, $j=1,2,\ldots,m-2$, $p=1,2,\ldots,m-2$.

Так как собственные числа λ_p, $p=1,\ldots,m-2$, различны, то D_1 — определитель Вронского и, очевидно, отличен от нуля.

Таким образом, при достаточно малом $d>0$ получим, что $D\neq 0$ при выполнении условия 3. Следовательно, система (36), (39) при достаточно малом $d>0$ имеет единственное решение при любых правых частях. Решение этой системы можно записать в виде

$$\mu_p=\sum_{\nu=m}^{2m-3}\beta_{p,\nu}(d_\nu+b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-3})\frac{1}{r_{p,2m-3}},\qquad p=1,2,\ldots,m-2, \tag{40}$$

где $\beta_{p,\nu}$ — некоторые коэффициенты.

Используя (40) и (34) в (30) при $\nu=2m-3$, получим

$$w_{2m-3}(\xi,t)=\widetilde{F}(\xi,t)+b_{2m}^0(\xi,0)\widetilde{M}w_{2m-3}(\xi,t), \tag{41}$$

где

$$\widetilde{F}(\xi,t)=\sum_{\nu=m}^{2m-3}\sum_{p=1}^{m-2}\beta_{p,\nu}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}\exp\left(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)-\int_0^d P_{2m-3}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{42}$$

$$\widetilde{M}w_{2m-3}=\sum_{\nu=m}^{2m-3}\sum_{p=1}^{m-2}\beta_{p,\nu}M_\nu w_{2m-3}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}\exp\left(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)-$$
$$-\int_0^d P_{2m-3}\Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_2}^d\int_{\tau_1}^d w_{2m-3}(\xi,\tau_0)d\tau_0d\tau_1d\tau_2d\tau. \tag{43}$$

Докажем вначале разрешимость уравнения (41) при дополнительных условиях:

$$\begin{cases}\max\limits_{1\le j\le m-2}\operatorname{Re}\lambda_j+\max\limits_{0\le t\le d}|\gamma'(t)|\le\delta_-<0\\ \min\limits_{m-1\le j\le 2m-3}\operatorname{Re}\lambda_j-\max\limits_{0\le t\le d}|\gamma'(t)|\ge\delta_+>0.\end{cases} \tag{44}$$

В этом случае доказательство существования решения уравнения (41) основано на следующих оценках:

$$\left\|\int_0^d P_{2m-3}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{L_{2(0,d)}}\le(m-1)\left(\frac{1}{\delta_-}+\frac{1}{\delta_+}\right)\|f\|_{L_2(0,d)}, \tag{45}$$

$$\sum_{p=1}^{m-2}\left\|\frac{1}{\gamma(t)}\exp\left(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right\|_{L_2(0,d)}\le(m-1)\left(\frac{1}{\delta_-}\right)^{1/2}, \tag{46}$$

$$\sum_{j=m-1}^{2m-3}\left\|\frac{1}{\gamma(t)}\exp\left(-\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right\|_{L_2(0,d)}\le(m-1)\left(\frac{1}{\delta_+}\right)^{1/2}, \tag{47}$$

$$\sup_{0<t_1<d}\left\|\int_0^t P_\nu\Phi(t_1,t)d\tau\right\|_{L_2(0,d)}\le 3(m-1)\left(\frac{1}{\delta_+}+\frac{1}{\delta_-}\right)\sqrt{d}. \tag{48}$$

Эти оценки выводятся непосредственно из (27) и (44). Из (45)–(48) получим, что функция $\widetilde{F}(x,t)$, определённая в (42), принадлежит пространству $L_2(0;d)$, а оператор $\widetilde{M}$, определённый в (43), является ограниченным оператором в $L_2(0,d)$. Выберем теперь $\delta>0$ настолько малым, чтобы при всех $|\xi|\le\delta$ выполнялось условие $|b_{2m}^0(\xi,0)|\|\widetilde{M}\|_{L_2\to L_2}\le 1/2$. Тогда уравнение (41) имеет единственное решение в $L_2(0,d)$:

$$w_{2m-3}=(I-b_{2m}^0(\xi,0)\widetilde{M})^{-1}\widetilde{F}. \tag{49}$$

Причём справедлива оценка

$$\|w_{2m-3}\|_{L_2(0;d)}\le 2\|\widetilde{F}\|_{L_2(0;d)}. \tag{50}$$

Подставляя решение (49) в (30), получим решение системы (18). Это решение удовлетворяет условиям (22), (23), (24), а значит, выполнены условия (5), (6).

Из равенства (30) и неравенства (50) получим, что все координаты векторных функций $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ принадлежат по переменной t пространству $L_2(0;d)$ при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| \le \delta$.

Таким образом, эти векторные функции являются решением системы (18) и удовлетворяют условиям (22), (23), (24).

Из (15), (16) получим, что функция $u(\xi,t)$ удовлетворяет уравнению

$$i^{-2m}\alpha^{2m}(t)\partial_t^{2m}u + \frac{b}{a_{0\,2m}}\partial_t^3 u + \sum_{|\tau|=2m}\frac{a_{\tau,0}}{a_{0\,2m}}\xi^\tau u = f. \tag{51}$$

Заметим, что

$$i^{-2m}\alpha^{2m}(t)\partial_t^{2m}u = D_{\alpha,t}^{2m}u + R_{2m}u, \tag{52}$$

где $R_{2m}u = \sum\limits_{j=0}^{2m-1} z_{2m,j}(t)D_{\alpha,t}^{j}u$, а функции $z_{2m,j}(t)$ являются непрерывными и ограниченными функциями на отрезке $[0;d]$.

Таким образом, из (51) и (52) получим, что функция $u(\xi,t)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{0\,2m}D_{\alpha,t}^{2m}u + b\partial_t^3 u + \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau,0}\xi^\tau u + R_{2m}u = f(\xi,t). \tag{53}$$

Можно показать, что решение $u(\xi,t)$ этого уравнения принадлежит по переменной t пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$

Обозначим через $\widetilde{A}$ оператор $\widetilde{A} = a_{0\,2m}D_{\alpha,t}^{2m} + \sum\limits_{|\tau|=2m} a_{\tau,0}\xi^\tau + b\partial_t^3 + a_{0\,2m}R_{2m}$. Рассмотрим оператор $A^\mu = \mu A + (1-\mu)\widetilde{A}$, где $A = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) + b\partial_t^3$. Можно показать, что для оператора A^μ справедлива априорная оценка, аналогичная оценке теоремы 3, при $|\xi| \le \delta$ с постоянной, не зависящей от $\mu \in [0,1]$. По доказанному выше уравнение (53) имеет единственное решение, которое удовлетворяет условиям (5), (6). Таким образом, с помощью метода продолжения по параметру μ и априорной оценки получим, что уравнение $Au = f$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (5), (6) при $|\xi| \le \delta$.

Рассмотрим теперь оператор $A(\lambda\dot{\xi}, D_{\alpha,t}, \partial_t)$, где $|\dot{\xi}| = \delta$. Воспользовавшись априорной оценкой, приведенной в теореме 3, применим метод продолжения по параметру $\lambda > 0$. В результате из установленной уже разрешимости задачи (5)–(6) для уравнения $A(\lambda\dot{\xi}, D_{\alpha,t}, \partial_t)u = f$ при $\lambda = 1$ получим, что эта задача имеет единственное решение при всех $\lambda > 0$. Если взять теперь $\lambda = \frac{|\xi|}{\delta}$, то получим, что задача (5)–(6) для уравнения $A(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t)u = f$ имеет единственное решение при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Таким образом, существование и единственность решения задачи (4)–(6) установлена нами при дополнительных условиях (44). Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то рассмотрим оператор $\widehat{A} = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) + \widehat{b}\partial_t^3$, где $\mathrm{Re}\,\overline{\widehat{b}}a_{0\,2m} > 0$, $\mathrm{Im}\,\overline{\widehat{b}}a_{0\,2m} = 0$. Тогда оператор $\widehat{A}$ удовлетворяет тем же условиям, что и оператор A. Выберем $\mathrm{Re}\,\widehat{b} > 0$ столь большим, чтобы выполнялись условия (44). Как показано выше, задача (5)–(6) для уравнения $\widehat{A}u = f$ имеет единственное решение в $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$. Можно показать, что априорная оценка, аналогичная оценке теоремы 3, справедлива и для оператора $\widehat{A}^\mu = L_{2m}(\xi, D_{\alpha,t}) + (b\mu + (1-\mu)\widehat{b})\partial_t^3$, причём константа в этой априорной оценке не зависит от $\mu \in [0;1]$. Это позволяет вновь применить метод продолжения по параметру $\mu \in [0;1]$ и из существования и единственности решения задачи (5)–(6) для уравнения $\widehat{A}^\mu u = f$ при $\mu = 0$ получить существование и единственность решения этой задачи при $\mu = 1$. Но так как $\hat{A}^1 = A$, то тем самым доказано существование и единственность решения задачи (5)–(6) в $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(0;d)$. Отсюда следует существование и единственность решения задачи (1)–(3) в $H_{2m,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$. Для того чтобы доказать существование и единственность решения задачи (1)–(3) в пространстве $H_{s,\alpha,\frac{2m}{3}}(R_d^n)$ при $s > 2m$, следует воспользоваться известным методом повышения гладкости (см [3]).

Разрешимость доказана при достаточно малых $d > 0$. Так как при $t \ge d$ уравнение не является вырождающимся, а значит, решение задачи (1)–(3) существует при $t \in [d; d_1]$, то с помощью «склеивания» [15] получаем существование и единственность решения задачи (1)–(3) при $t \in [0; d_1]$ для любых $d_1 > 0$.

Библиографический список

1. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
2. *Олейник О. А.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87, № 6. С. 885–887.
3. *Глушко В. П.* Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. 1970. Т. 23. С. 113–178.
4. *Рукавишников В. А., Ереклинцев А. Г.* О коэрцитивности R_ν-обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1680–1689.
5. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. сб. 1969. Т. 80 (112), вып. 4. С. 455–491.
6. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы // УМН. 1970. Т. 25, вып. 4. С. 29–56.
7. *Глушко В. П.* Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. № 2. Новосибирск, 1978. С. 49–68.
8. *Глушко В. П.* Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / Воронеж. гос. ун-т. Воронеж, 1979. 47 с. Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048-79.
9. *Левендорский С. З.* Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе // Мат. сб. 1980. Т. 111 (153), вып. 4. С. 483–501.
10. *Исхоков С. А.* О гладкости решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 3. С. 306–309.
11. *Баев А. Д.* Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Воронеж, 2008. 240 с.
12. *Баев А. Д.* Об одной краевой задаче в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Сер. Естеств. науки. 2008. № 3 (62). С. 27–39.
13. *Баев А. Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 6. С. 727–728.
14. *Глушко В. П.* Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. Воронеж, 1972. 193 с.
15. *Лионс Ж., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971. 371 с.

УДК 514.764

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СВЯЗНОСТЬЮ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ С ДОПУСТИМОЙ ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

А. В. Букушева, С. В. Галаев

Саратовский государственный университет
E-mail: bukusheva@list.ru, sgalaev@mail.ru

Вводятся понятия внутренней и продолженной связности над гладким распределением D с допустимой финслеровой метрикой. С помощью продолженной связности на распределении D как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется и исследуется методами внутренней геометрии неголономного многообразия почти контактная метрическая структура.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, многообразия Сасаки, внутренняя геометрия почти контактных метрических многообразий, допустимая финслерова метрика.

Almost Contact Metric Structures Defined by Connection over Distribution with Admissible Finslerian Metric

A. V. Bukusheva, S. V. Galaev

The notion of the intrinsic connection and the extended connection of an almost contact metric manifold D with admissible Finslerian metric is introduced and studied. Using this and the extended connection on D as on the total space of a vector bundle, an almost contact metric structure is defined and investigated.

Key words: almost contact manifold, Sasakian manifold, intrinsic geometry of almost contact metric manifolds, admissible Finslerian metric.

ВВЕДЕНИЕ

Гладкое коразмерности 1 распределение D, заданное на гладком многообразии X, в настоящей работе рассматривается как тотальное пространство векторного расслоения (D, π, X). Имеется вполне очевидная аналогия между геометрией многообразия D как подмногообразия пространства касатель-

