7. *Кремлёв А. Г., Гребенникова И. В.* Об асимптотике ансамбля траекторий управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием // Новости научной мысли – 2006 : материалы науч.-практ. конф. Днепропетровск, 2006. Т. 4. С. 65–69.
8. *Кремлёв А. Г.* Итерационный метод решения задач оптимального управления сингулярно возмущенными системами при квадратичных ограничениях // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. 1994. Т. 34, № 11. С. 1597–1616.
9. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 492 с.
10. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М. : Наука, 1973. 192 с.
11. *Кириллова Ф. М.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1260–1263.
12. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 468 с.

УДК 519.6

ОДИН ПРЯМОЙ МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В. В. Колбин, М. В. Свищикова

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: vivakolbin@gmail.com, marsvi@mail.ru

Предлагается прямой метод стохастического программирования, основанный на пошаговом вычислении линейной аппроксимирующей программы.

Ключевые слова: стохастическое программирование, выпуклость, прямые методы.

A Direct Method of Stochastic Optimization

V. V. Kolbin, M. V. Svishchikova

A direct method is proposed for stochastic programming. On each step the method uses solving of the linear program which is the linear approximation of input stochastic programs.

Key words: stochastic programming, convex, direct methods.

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является получение эффективного алгоритма решения следующей, часто возникающей в экономических моделях, задачи стохастического программирования.

Требуется минимизировать целевую функцию f общего вида при ограничениях двух типов

$$f(x,\omega) \to \min_{x \geqslant 0}, \tag{1}$$

$$g(x,\omega) \leqslant 0, \tag{2}$$

$$H(\omega)x - h(\omega) \leqslant 0, \tag{3}$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)^T \in \Omega \subseteq R^r$ — набор параметров задачи, Ω — пространство элементарных событий, $f : \Omega \times R^+ \to R^1$, $R^+ = \{x \mid x \geqslant 0\}$, $g :\ \Omega \times R^+ \to R^m$,

$$g = \begin{pmatrix} g_1(x,\omega) \\ \vdots \\ g_m(x,\omega) \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} h_{11}(\omega) & \ldots & h_{1n}(\omega) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ h_{k1}(\omega) & \ldots & h_{kn}(\omega) \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1(\omega) \\ \vdots \\ h_k(\omega) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Неравенства в (2) и (3) понимаются покомпонентно. Функции f и g предполагаются при любом значении набора ω по $x \in R^+$ выпуклыми и непрерывно дифференцируемыми.

В наборе ω присутствуют параметры двух типов. В один тип входят такие случайные факторы, как спрос, погода, выход из строя оборудования и т. п. Они относятся к будущему. В другой — величины детерминированные, но известные неточно, такие как численность трудящихся, объем месторождения и т. п. Они относятся к прошлому или настоящему. Так же как и в первом типе, эти величины удобно трактовать как случайные с известными параметрами распределения.

Взаимосвязь между набором ω и ограничениями (2) и (3) различна. Ограничения (3) должны выполняться при любой мыслимой реализации параметров (таково, например, ограничение числа пассажиров в такси). Иными словами, необходимо соблюдать при каждой случайной реализации условий задачи общие физические ограничения системы, которых нельзя нарушать вообще. Ограничения (2) должны выполняться в среднем (как, например, требование достаточной заполняемости конкретных авиарейсов, для того чтобы данное направление имело доходность и не было убыточным). Таким образом, необходимо, чтобы средние долговременные договорные обязательства в целом (поставки сырья и производство продукции, прибыль и т. п.) были удовлетворены, хотя при этом допускаются нарушения в кратковременных требованиях.

После введения случайностей в f, g, H, h решение задачи (1)–(4) становится случайным, что делает эту задачу как модель каких-то реальных событий неадекватной. Действительно, полученное решение задачи (1)–(4) $x^{opt} = x(\omega)$ должно быть принято до реализации настоящих случайных параметров из набора x, а те параметры из набора ω, которые были известны неточно, так и остаются известными неточно к моменту принятия решения x^{opt}. Иными словами, возникает порочный замкнутый круг: Природа делает свой ход ω после принятия решения x^{opt}, которое выбирается как функция от ω.

Поэтому появление случайностей порождает серьезную проблему: формализацию понятия оптимальности параметров управления x в новых условиях, которое позволило бы создать новую задачу — задачу стохастической оптимизации. Известны различные приемы подобной формализации. Один из самых сложных — использование квантилей [1]. Другой способ — расчет управляющих параметров x по наихудшей реализации ω [2–4], т. е. поиск $\arg_{x,\omega} \min\limits_{x} \max\limits_{\omega} f(x,\omega)$.

Тем самым реализуется «правильный» порядок действий: Человек делает первый ход, стараясь добиться минимальности $f(x,\omega)$, имея ввиду, что Природа после этого выберет ω наихудшим образом. Поскольку на самом деле Природа не является сознательным противником Человека, поиск минимакса зачастую дает результат, субъективно воспринимаемый как неудовлетворительный.

Наиболее распространено применение детерминированных эквивалентов, которое обращается с Природой как с противником без интеллекта [2–7].

1. ПОСТРОЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ЭКВИВАЛЕНТОВ

При трактовке всех параметров набора ω как случайных величин $\{\omega_t\}_{t=0}^{r}$ ограничение (2) согласно его смыслу естественно заменить на

$$\mathrm{E}\,[g(x,\omega)] \leqslant 0, \tag{5}$$

а ограничение (3) практически не меняется

$$H(\omega)x - h(\omega) \leqslant 0 \quad \forall\ \omega \in \Omega. \tag{6}$$

Здесь E — символ математического ожидания.

Наиболее распространенный подход к формированию целевой функции [1–4] аналогичен трансформации (2) в (5) и дает

$$F(x) = \mathrm{E}\,[f(x,\omega)] \to \min_{x\geqslant 0}, \tag{7}$$

т. е. x надо выбрать так, чтобы среднее значение целевой функции было минимальным.

Найдем детерминированный эквивалент ограничениям (6), когда элементы матрицы H и столбца h имеют линейную зависимость от параметров ω:

$$h_{ij}(\omega) = \widehat{h}_{ij} + \bar{h}_{ij}\omega, \qquad h_i(\omega) = \check{h}_i + \widetilde{h}_i\omega,$$

где $\bar{h}_{ij}$ и $\widetilde{h}_i$ — строки длиной r — $(h_{ij1},\ldots,h_{ijr})$ и $(\widetilde{h}_{i1},\ldots,\widetilde{h}_{ir})$ соответственно, и все случайные величины из набора ω распределены на конечных сегментах с полудлиной $\delta_s > 0 : [\omega_s^0 - \delta_s, \omega_s^0 + \delta_s]$. Тогда для любых значений переменных x существует максимум по ω левых частей системы (6), т. е. величин

$$\Lambda_i(\omega) \doteq H_i(\omega)x - h_i(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \widehat{h}_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} \bar{h}_{ij}\omega x_j - \check{h}_i - \widetilde{h}_i\omega = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{is}(x)\omega_s + \beta_i(x). \tag{8}$$

Здесь $\beta_i(x)$ — скалярная функция, $\alpha_{is}(x) = \sum_j h_{ijs}x_j - \widetilde{h}_{is}$. Поскольку $\Lambda_i(\omega)$ является сепарабельной функцией, то при сделанных предположениях относительно диапазонов изменения ω_s максимайзер функции $\Lambda_i(\omega)$ из (8) находится элементарно:

$$\bar{\omega}_s(i,x) = \omega_s^0 + \delta_s \operatorname{sign} \alpha_{is}(x), \qquad s = \overline{1,r} \tag{9}$$

для каждого i-го ограничения из (6). Пусть $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_r)$. Подставляя найденные максимайзеры (9), $i = \overline{1,m}$, в каждую строку i-й функции-ограничения (6), получим детерминированный эквивалент для системы (6)

$$H_i\big(\bar{\omega}(i,x)\big)x - h_i\big(\bar{\omega}(i,x)\big) \leqslant 0, \qquad i = \overline{1,k}. \tag{10}$$

Его можно было бы снабдить эпитетом «настоящий», поскольку в отличие от детерминированных эквивалентов (5) и (7) он не требует переосмысления исходной задачи, а является сверткой по ω каждого i-го ограничения из (6).

2. ИТЕРАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (7), (5), (10)

Изложим для задачи (7), (5), (10) прямой итеративный алгоритм.

Шаг 0. Задается $\varepsilon \geqslant 0$, натуральное число K, выбирается начальная точка x^0 и назначается $y = x^0$, $t = 0$, $S = 0$.

Шаг 1. Генерируется случайный набор параметров $\omega = \omega^t = (\omega_1^t, \dots, \omega_r^t)$ и составляется линейная программа

$$\left.\begin{array}{c} f(x^t,\omega^t) + \nabla f(x^t,\omega^t)(x - x^t) \to \min\limits_{x \geqslant 0}, \\ g(x^t,\omega^t) + g'(x^t,\omega^t)(x - x^t) \leq 0, \\ H_i\big(\bar{\omega}(i,x^t)\big)x - h_i\big(\bar{\omega}(i,x^t)\big) \leqslant 0, \quad i = \overline{1,k}. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Здесь под градиентом понимается строка $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, с помощью штриха обозначается матрица Якоби

$$g' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Система (11) решается одним из известных методов (например, симплекс-методом). Обозначим ее решение через $\bar{x}^t$.

Шаг 3. Положим $x^{t+1} = x^t + \rho_t(\bar{x}^t - x^t)$. (Выбор весов ρ_t обсудим после описания алгоритма.)

Шаг 4. Если $|x^{t+1} - y| > \varepsilon$, тогда $\{y := x^{t+1};\ S := 0;$ перейти на Шаг 5$\}$.

$$S := S + |x^{t+1} - x^t|.$$

Если $S > K\varepsilon$, то {вывод x^{t+1}; выход из алгоритма}.

Шаг 5. Полагается $t := t + 1$. Переход к Шагу 1. (Таким образом, если предыдущее t обозначить через t', то после Шага 5 будет верно $x^t = x^{t'+1}$.)

Пояснения к алгоритму

Формирование весов. Веса $\{\rho_t\}_1^\infty$ будем выбирать классическим образом [2–6] согласно аксиомам:

I. $\rho_t > 0$ для всех t.

II. $\sum\limits_{t=1}^{\infty} \rho_t^2 < \infty$.

III. $\sum\limits_{t=1}^{n} \rho_t \to \infty$ при $n \to \infty$.

Такие веса существуют. Например, $\rho_t = 1/t$. Они обеспечивают, с одной стороны, возможность уйти от «начальной» точки x^0 к решению задачи (7), (5), (10), сколь далеко бы от «начальной» точки оно ни находилось (аксиома III). С другой стороны, в асимптотике «колебания» элементов последовательности $\{x^t\}_1^\infty$, если она сходится к решению, относительно решения будут стремиться к нулю (аксиома II). Естественное требование смещения от текущей итеративной точки в направлении полученного минимума содержится в аксиоме I.

Правило остановки (Шаг 4). Зададимся конечной погрешностью $\varepsilon > 0$. После t-й итерации сделаем еще столько шагов, чтобы их суммарная длина превосходила ε в K раз. Другими словами,

$$\sum_{j=t}^{t+N-1} |x^{j+1} - x^j| > K\varepsilon.$$

Если при этом все итерации от i-й до $(i+N)$-й остаются в шаре радиуса ε с центром x^t, т. е. $\{x^j\}_{j=t}^{N+t} \subset \mathbb{S}^{\varepsilon}_{x^t}$, то на этом заканчивается итеративный процесс. В качестве ответа можно взять последнюю итеративную точку из множества $\{x^j\}_{j=t}^{N+t}$.

Теорема. *Алгоритм Шаг 1 – Шаг 5 с выбором весов согласно аксиомам I, II, III сходится.*

Действительно, поскольку разность $\bar{x}^t - x^t$ соответствует обобщенному градиенту, то приведенный алгоритм с указанным выбором весов подпадает под действие теоремы Ю. М. Ермольева [3], что обеспечивает сходимость этого алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый итеративный алгоритм вполне адекватен рассматриваемой задаче. Его сходимость имеет и некоторые недостатки, присущие сходимости классических прямых методов стохастического программирования, в частности замедление сходимости с возрастанием индекса шага итерации. Преимущество по сравнению с ними видится в более легком пошаговом решении линейной программы (11), чем вычисление обобщенного градиента с последующим нахождением проекции на допустимое множество [2, 3, 7].

Представляется интересным расширение области применения приводимого алгоритма на задачу более общего вида, а именно на ограничения вида (3) с нелинейностью по x.

Библиографический список

1. *Кибзун А. И., Кан Ю. С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009. 372 с.

2. *Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюпля В. И.* Математические методы исследования операций. М. : Наука, 1979. 312 с.

3. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. М. : Наука, 1976. 340 с.

4. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М. : Наука, 1979. 384 с.

5. *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. М. : Сов. радио, 1974. 400 с.

6. *Kolbin V. V.* Stochastic programming. Boston, USA : D. Reidel Publ. C., 1977. 325 p.

7. *Ермольев Ю. М., Норкин В. И.* Методы решения невыпуклых негладких задач стохастической опримизации // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 5. С. 89–106.

УДК 517.937: 517.983

УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. В. Марюшенков

Воронежский государственный университет
E-mail: stasint1@mail.ru

В данной работе получены условия обратимости одного класса несамосопряженных операторов, являющихся разностью неограниченного антисопряженного и нормального оператора.

Ключевые слова: несамосопряженный оператор, нормальный оператор.

The Conditions of Invertibility of a Class Nonselfadjoint Operators

S. V. Maryushenkov

In this work we obtain the conditions of invertibility of a class of nonselfadjoint operator that are difference between the nonbounded antisymmetric and the normal operator.

Key words: nonselfadjoint operator, normal operator.