Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 3–23.
2. *Юрко В.А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001.
3. *Yurko V.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
4. *Юрко В.А.* Обратная задача для интегральных операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 690–701.
5. *Levinson N.* The inverse Sturm-Liouville problem // Math. Tidsskr. 1949. Vol. 13. P. 25–30.
6. *Бутерин С.А.* О единственности восстановления одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 15–18.
7. *Бутерин С.А.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 8–10.
8. *Хромов А.П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 4. С. 669–680.
9. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1977.

УДК 517.518.82

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

И.Ю. Выгодчикова

Саратовский государственный университет,
кафедра математической экономики
E-mail: VigodchikovaIY@info.sgu.ru

В настоящей статье рассмотрена задача о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения, образами которого в узлах дискретной сетки являются фиксированные отрезки, алгебраическим полиномом заданной степени. Получены необходимые и достаточные условия единственности решения этой задачи. Доказательство основано на опубликованных ранее статьях о свойствах решения рассматриваемой задачи, а также на двух вспомогательных леммах. Используется теория минимаксных задач, теория приближений П.Л. Чебышева дискретных функций алгебраическими полиномами и многозначный анализ.

About the only Solution in the Problem of the Best Plural Reflection's Approximation by Algebraic Polynomial

I. Y. Vygodchikova

This paper is devoted to the proof of the theorem including necessary and sufficient conditions in the problem of the best plural reflection's approximation by algebraic polynomial. In the proof is used several author's were published results and two auxiliary lemmas. The proof is based on the minim ax's problems theory, the approximation's theory by algebraic polynomials of the P.L. Chebyshev and the plural's analysis.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется получить необходимые и достаточные условия единственности решения следующей задачи:

$$, \qquad (1)$$

где $Af = Mf + g(x)\int_0^{\pi} f(t)v(t)dt,\ Mf = \int_0^{x} M(x,t)f(t)dt,\ 0 \le x \le \pi$ – образы многозначного отображения (м.о.) $\Phi(\bullet)$ в узлах сетки $T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\}$, причём $y_{2,k} \ge y_{1,k}, k \in [0:N]$, $p_n(A, t_k) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$.

Через $f(A,k) := \max\{y_{2,k} - p_n(A,t_k); p_n(A,t_k) - y_{1,k}\}$ обозначим уклонение образа м.о. от значения алгебраического полинома в точке $t_k \in T$. Функция $f(A,k)$ является непрерывной и выпуклой по A при каждом фиксированном $k \in [0:N]$, но не является дифференцируемой по A на R^{n+1}. Такими же свойствами обладает и целевая функция $\rho(A)$ задачи (1).

Положим $f_1(A,k) := p_n(A,t_k) - y_{1,k}$, $f_2(A,k) := y_{2,k} - p_n(A,t_k)$, $k \in [0:N]$. Обозначим через $\rho^* := \inf_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$, $\mathfrak{R} := \{A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\}$. Доказано ([1]), что $\mathfrak{R} \ne \varnothing$. Несложно показать, что множество $\mathfrak{R}$ выпукло и замкнуто, а при $N \ge n$ оно ещё и *ограничено*.

Если $N \le n$, множество решений задачи (1) представимо в виде ([2]):

$$\Re = \left\{ \begin{array}{c} A \in R^{n+1} : p_n\left(A, t_k\right) = \dfrac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} + \alpha_k \left(m - \dfrac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} \right), k \in [0:N], \\ \max\limits_{k \in [0:N]} |\alpha_k| \le 1 \end{array} \right\},$$

где

$$m := \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2},$$

и в этом случае $\rho^* = m$. Несложно показать, что при $N \le n$ задача (1) будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда $N = n$ и $m = \dfrac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}$, $\forall\ k \in [0:n]$.

Везде далее считаем $N \ge n + 1$.

Рассмотрим дискретный вариант задачи П.Л. Чебышёва о равномерном наилучшем приближении функции алгебраическим полиномом заданной степени:

$$\max_{k \in [0:N]} \left| y_k - p_n\left(A, t_k\right) \right| \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \tag{2}$$

где $y_k = y\left(t_k\right)$, $k \in [0:N]$ – значения некоторой функции на сетке T.

Базисом σ назовём $(n+2)$ – точечную подсистему узлов сетки T вида

$$\sigma = \left\{ t_{j_0} < t_{j_1} < \ldots < t_{j_{n+1}} \right\} \subset T.$$

На каждом базисе определим две функции $\varphi_0(\cdot)$ и $\varphi_1(\cdot)$, положив

$$\varphi_0\left(\sigma, t_{j_k}\right) = \begin{cases} y_{2,j_k}, k - \text{ четно}, \\ y_{1,j_k}, k - \text{ нечетно}, \end{cases} \varphi_1\left(\sigma, t_{j_k}\right) = \begin{cases} y_{1,j_k}, k - \text{четно}, \\ y_{2,j_k}, k - \text{нечетно}, \end{cases}$$

$$t_{j_k} \in \sigma,\ k \in [\,0:n+1\,],$$

и такие функции назовём *амплитудными*.

Если в качестве приближаемой функции в задаче П.Л.Чебышёва (2) взять амплитудную функцию, эта задача запишется в виде

$$\rho_i\left(A, \sigma\right) := \max_{k \in [0:n+1]} \left| \varphi_i\left(\sigma, t_{j_k}\right) - p_n\left(A, t_{j_k}\right) \right| \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, i \in 0:1. \tag{3}$$

Положим

$$\rho_i^*(\sigma) := \min_{A \in R^{n+1}} \rho_i\left(A, \sigma\right) = \rho_i\left(A_i(\sigma), \sigma\right), \quad i \in 0:1.$$

Пусть $\Omega \subset T$ – некоторое подмножество сетки T. Обозначим через $I(\Omega) := \left\{ k \in [0:N] : t_k \in \Omega \right\}$ – множество индексов множества Ω.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В [2], [4] получены следующие факты.

Теорема 1 *(необходимые и достаточные условия решения)*. Для того чтобы вектор $A^* \in R^{n+1}$ являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

(а) $\rho\left(A^*\right) = m$;

(б) $\exists$ базис $\sigma^* : \rho\left(A^*\right) = \rho_i^*\left(\sigma^*\right)$ для $i = 0$ или $i = 1$.

Замечание 1. Несложно показать, что равенство из (б) эквивалентно равенствам:

$$(-1)^{k+\beta} \rho\left(\mathrm{A}^*\right) = \varphi_\beta\left(\sigma^*, \tau_{j_k}\right) - p_n\left(A^*, t_{j_k}\right), \forall\ k \in [\,0:n+1\,],$$

где $\beta = 0$ или $\beta = 1$, которые легко сравнимы с классическим результатом П.Л. Чебышёва ([3]).

Выборкой $(n+1)$ узлов сетки T назовём множество вида

$$\Delta = \left\{ t_{q_0} < t_{q_1} < \ldots < t_{q_n} \right\} \subset T.$$

Теорема 2. Существует вектор $A^* \in \Re$, такой, что функция $f\left(A^*, k\right)$ принимает значение ρ^* не менее чем в (n+1) различных точках $k \in [0:N]$, т. е.

$$\exists\ A^* \in \Re,\ \exists \text{ выборка } \Delta^*:\quad f\left(A^*, k\right) = \rho^*,\ \forall\, k \in I\left(\Delta^*\right). \tag{4}$$

Докажем следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $n \geq 1$ и $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$. Если для алгебраического полинома $p_n(A, x)$ выполняются условия

(I) $$A \neq 0_{n+1},$$

(II) $$p_n\left(A, x_i\right) = 0,\ \forall\, i \in [1:n],$$

(III) $$\exists\ s \in [\,1{:}n+1\,],\ \exists\ z \in \left(x_{s-1}; x_s\right):\ (-1)^s\, p_n\left(A, z_s\right) < 0,$$

то

$$(-1)^i\, p_n\left(A, x\right) < 0,\ \forall\, x \in \left(x_{i-1}; x_i\right),\ \forall\, i \in [\,1:n+1\,]. \tag{5}$$

Доказательство. 1) Без потери общности в рассуждениях будем считать s = 1. В этом случае условие (III) запишется в виде

$$\exists\ z \in \left(x_0; x_1\right):\ p_n\left(A, z\right) > 0. \tag{6}$$

Покажем, что

$$\forall\ x \in \left(x_0; x_1\right):\ p_n\left(A, x\right) > 0. \tag{7}$$

Предположим, что (7) не выполняется, т. е.

$$\exists\ \tilde{x} \in \left(x_0; x_1\right):\ p_n\left(A, \tilde{x}\right) \leq 0. \tag{8}$$

Из (6), (8) в силу непрерывности алгебраического полинома $p_n(A, t)$ вытекает, что

$$\exists\ x' \in \left(z; \tilde{x}\right]:\ p_n\left(A, x'\right) = 0, \tag{9}$$

причём $x' \neq x_i$, $\forall\, i \in [1:n]$. Отсюда ввиду (II) получаем, что алгебраический полином степени n обращается в ноль в (n + 1) различных точках. А это возможно, только если $A \equiv 0_{n+1}$. Последнее противоречит (I). Тем самым (7) доказано.

2) Теперь покажем, что

$$\exists\ z \in \left(x_1; x_2\right):\ p_n\left(A, z\right) < 0. \tag{10}$$

Если только при некотором значении $x \in \left(x_1; x_2\right)$ выполняется равенство $p_n\left(A, x\right) = 0$, то ввиду (II) получаем, что алгебраический полином степени n обращается в ноль в (n + 1) различных точках, и, значит, $A \equiv 0_{n+1}$. Последнее противоречит (I). Таким образом,

$$\forall\ x \in \left(x_1; x_2\right):\ p_n\left(A, x\right) \neq 0.$$

Допустим, что

$$\forall\ x \in \left(x_1; x_2\right):\ p_n\left(A, x\right) > 0. \tag{11}$$

По условию леммы, $p_n\left(A, x_1\right) = 0$. Тогда из (7), (11) следует, что

$$\forall\ x \in \left(x_0; x_1\right) \cup \left(x_1; x_2\right):\ p_n\left(A, x\right) > p_n\left(A, x_1\right),$$

т. е. в точке x_1 полином $p_n\left(\cdot, x\right)$ имеет локальный минимум. По теореме Ферма,

$$\left(p_n\left(A, x\right)\right)'_{x = x_1} = 0. \tag{12}$$

В соответствии с (II) $p_n\left(A, x_1\right) = 0$ и $p_n\left(A, x_2\right) = 0$. Тогда по теореме Ролля,

$$\exists\ x_1 \in \left(x_1; x_2\right):\ \left(p_n\left(A, x\right)\right)'_{x = x_1} = 0.$$

Аналогично получаем

$$\exists \; x_i \in (x_i; x_{i+1}) : \; \left(p_n(A,x)\right)'_{x=x_i} = 0, \forall\, i \in [1 : n-1]. \tag{13}$$

Производная от полинома степени n является полиномом степени $(n - 1)$. Равенства (12), (13) означают, что алгебраический полином степени $(n - 1)$ в n различных точках обращается в ноль. Отсюда $\left(p_n(A,x)\right)'_x \equiv 0$. Следовательно, $p_n(A, x)$ – это константа. Последнее противоречит (II)–(III). Таким образом, (10) доказано. Точно так же, как из (6), было получено (7), из (10) получаем, что

$$\forall \;\; x \in (x_1; x_2) : p_n(A,x) < 0.$$

Продолжая аналогичные рассуждения на последующих интервалах $(x_{i-1}; x_i)$, $i \in [3 : n+1]$, получаем (5).

Лемма доказана.

Обозначим через

$$Z := \left\{ k \in [0:N] : \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = \rho^* \right\},$$

а через $|Z|$ – число элементов множества Z.

Лемма 2. Пусть вектор $A^* \in R^{n+1}$ является единственным решением задачи (1). Тогда выполняется, по крайней мере, одно из условий:

$$|\, Z \,| \geq n+1; \tag{14}$$

$$\exists \text{ базис } \sigma^* \subset T : f\left(A^*, k\right) = \rho^*, \;\; \forall\, k \in I\left(\sigma^*\right). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть A^* – единственное решение задачи (1) и $|\, Z \,| < n+1$. Покажем, что выполняется (15).

Несложно показать, что если $Z = \varnothing$, то для решения A^* задачи (1) выполняется условие (б) теоремы 1. Применяя теорему 2.1 [2, с.31], приходим к (15).

Пусть теперь $1 \leq |\, Z \,| < n+1$. По лемме 1 для единственного решения A^* задачи (1) существует выборка Δ^* такая, что

$$f\left(A^*, k\right) = \rho^*, \;\; \forall\, k \in I\left(\Delta^*\right). \tag{16}$$

Допустим условие (15) не выполняется. Тогда

$$\forall\, k \in [0:N] \setminus I\left(\Delta^*\right) : \;\; f\left(A^*, k\right) < \rho^*, \tag{17}$$

при этом

$$Z \subset I\left(\Delta^*\right), Z \neq I\left(\Delta^*\right). \tag{18}$$

Возьмём индекс $k_0 \in I\left(\Delta^*\right) \setminus Z$.

Из (16) вытекает равенство $f\left(A^*, k_0\right) = \rho^*$. Поскольку $k_0 \notin Z$, то $f_1\left(A^*, k_0\right) \neq f_2\left(A^*, k_0\right)$. Для определённости будем считать, что $f_1\left(A^*, k_0\right) < f_2\left(A^*, k_0\right)$, т. е.

$$p_n\left(A^*, t_{k_0}\right) - y_{1,k_0} < y_{2,k_0} - p_n\left(A^*, t_{k_0}\right) = \rho^*. \tag{19}$$

Пусть ε > 0. Найдём A_ε, решив систему

$$\begin{cases} p_n\left(A_\varepsilon, t_k\right) = p_n\left(A^*, t_k\right), k \in I\left(\Delta^*\right) \setminus \{k_0\}, \\ \qquad p_n\left(A_\varepsilon, t_{k_0}\right) = p_n\left(A^*_{,}\; t_{k_0}\right) + \varepsilon. \end{cases} \tag{20}$$

Ясно, что $A_\varepsilon \neq A^*$ и решение системы (20) непрерывно по ε. Возьмём ε > 0 настолько малым, чтобы для вектора A_ε выполнялись неравенства, аналогичные (17), (19), а именно

$$\forall\, k \in [0:N] \setminus I\left(\Delta^*\right) : f\left(A_\varepsilon, k\right) < \rho^*, \tag{21}$$

$$p_n\left(A_\varepsilon, t_{k_0}\right) - y_{1,k_0} < y_{2,k_0} - p_n\left(A_\varepsilon, t_{k_0}\right). \qquad (22)$$

Из (19), (20), (22) вытекает неравенство

$$f\left(A_\varepsilon, k_0\right) < \rho^*. \qquad (23)$$

Из (16), (20) получаем равенства

$$f\left(A_\varepsilon, k\right) = \rho^*, \ \forall\ k \in I\left(\Delta^*\right) \setminus \left\{k_0\right\}.$$

Отсюда ввиду (21), (23) вытекает

$$\rho\left(A_\varepsilon\right) = \max_{k \in [0:N]} f\left(A_\varepsilon, k\right) = \rho^*.$$

Следовательно, вектор A_ε является решением задачи (1), причём $A_\varepsilon \neq A^*$, что противоречит единственности.

Лемма доказана.

Из леммы 2 для множества

$$\overline{S} := \left\{ k \in [0:N] : \rho^* = f\left(A^*, k\right) \right\} \qquad (24)$$

вытекает

Следствие 1. Если $|Z| < n+1$ и вектор $A^* \in \mathfrak{R}$ является единственным решением задачи (1), то

$$\left| \overline{S} \right| \geq n+2. \qquad (25)$$

Введём некоторые вспомогательные обозначения. Пусть множество $\overline{S}$, определённое в (24), имеет вид

$$\overline{S} := \left\{ w_1 < \ldots < w_{|\overline{S}|} \right\}. \qquad (26)$$

Разобьем множество $\overline{S}$ на непустые подмножества

$$\overline{S}_l = \left\{ w_{v_l} < w_{v_l+1} < \ldots < w_{v_l+u_l} \right\},\ l \in [1:r],$$
$$v_1 = 1,\ v_l = v_{l-1} + u_{l-1} + 1,\ l \in [2:r], \qquad (27)$$

обладающие следующими свойствами:

1) $\overline{S}_1 \cup \ldots \cup \overline{S}_r = \overline{S}$;

2) $\exists\ i_0 \in \{1,2\}$:

$$f\left(A^*, k\right) = \begin{cases} f_{i_0}\left(A^*, k\right),\ p - \text{нечетно}, \\ f_{3-i_0}\left(A^*, k\right),\ p - \text{четно}, \end{cases} \forall\ p \in [1:r],\ \forall\ k \in \overline{S}_p;$$

3) если $k \in \overline{S}_p \cap Z$, то $k = w_{v_p}$, $\forall\ p \in [1:r]$ (каждое множество разбиения $\overline{S}_p$ содержит не более одного элемента множества Z и если такой имеется, то он будет минимальным среди элементов множества $\overline{S}_p$);

4) если $w_1 \in Z$, то $\overline{S}_1 = \{w_1\}$.

Замечание 2. Из (27) вытекает, что $\forall\ w_k \in \overline{S}_p$, $\forall\ w_l \in \overline{S}_{p+1}$, $\forall\ p \in [1:r-1]$, выполняется неравенство $w_l > w_k$, т. е. множества $\overline{S}_1, \ldots, \overline{S}_r$ «следуют друг за другом».

Замечание 3. Из свойства 4) следует, что r – максимально возможное число подмножеств разбиения, удовлетворяющих свойствам 1)–3).

3. КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Переходим к доказательству основного результата работы – критерия единственности решения задачи (1).

Теорема 3 *(критерий единственности решения).* Для того чтобы задача (1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$(\alpha)\ |Z| \geq n+1;$$

$$(\beta)\ \exists \text{ базис } \sigma^*:\ \rho^* = \rho_i^*\left(\sigma^*\right) \text{ для } \ i=0 \text{ или } \ i=1.$$

Доказательство. Достаточное условие получено в [2], [4].

Необходимость. Если $n = 0$, утверждение легко следует из теоремы 1. Считаем $n \geq 1$.

Пусть вектор A^* является единственным решением задачи (1). Предположим, что условие (α) не выполняется, т. е. $|Z| < n+1$ (возможно $Z = \varnothing$). Покажем, что выполняется условие (β). В соответствии со следствием 1 $|\bar{S}| \geq n+2$.

Произведём разбиение множества $\bar{S}$ вида (26) на максимальное количество следующих друг за другом непустых непересекающихся подмножеств $\bar{S}_1,\dots,\bar{S}_r$, удовлетворяющих свойствам 1) – 4).

1°. Сначала рассмотрим случай, когда $r \geq n+2$. Возьмём в качестве базиса σ^* множество точек $\left\{t_{j_0} < t_{j_1} < \ldots < t_{j_{n+1}}\right\}$ таких, что $j_k \in \bar{S}_{k+1}$, $k \in [0:n+1]$. Покажем, что из свойств разбиения вытекает (β).

Действительно, пусть, например в свойстве 2) $i_0 = 2$. Тогда выполняются равенства:

$$f\left(A^*, j_k\right) = \begin{cases} f_2\left(A^*, j_k\right), k - \text{четно}, \\ f_1\left(A^*, j_k\right), k - \text{ нечетно}, \end{cases} \quad \forall \quad k \in [0:n+1].$$

Поскольку $j_k \in \bar{S}$, $\forall\ k \in [0:n+1]$, то $f\left(A^*, j_k\right) = \rho^*$. Следовательно,

$$\begin{cases} \rho^* = y_{2,j_k} - p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) = \varphi_0\left(\sigma^*, t_{j_k}\right) - p_n\left(A^*, t_{j_k}\right), k - \text{четно}, \\ \rho^* = p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) - y_{1,j_k} = p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) - \varphi_0\left(\sigma^*, t_{j_k}\right), k - \text{нечетно}, \end{cases}$$
$$\forall \ \ k \in [0:n+1],$$

откуда

$$(-1)^k \rho^* + p_n\left(A^*, t_{j_k}\right) = \varphi_0\left(\sigma^*, t_{j_k}\right), \forall \quad k \in [0:n+1].$$

Таким образом, для вектора A^* выполняется необходимое и достаточное условие решения задачи П.Л.Чебышёва (3) для $i = 0$ [3, с. 14], следовательно, вектор A^* является решением этой задачи и $\rho^* = \rho_0^*\left(\sigma^*\right)$. Случай i_0=1 рассматривается аналогично.

2°. Теперь допустим, что $r < n+2$. Убедимся в противоречивости этого неравенства.

Так как $|\bar{S}| \geq n+2$ и $|Z| < n+1$, то

$$\exists \ \ p \in [1:r], \exists \ \ k_0 \in \bar{S}_p \setminus Z. \tag{28}$$

Рассмотрим 3 случая.

(A). Пусть $r < n+1$. Поскольку

$$\sum_{i=1}^{r} \left|\bar{S}_i\right| = \left|\bar{S}\right| \geq n+2 \text{ и } \bar{S}_i \cap \bar{S}_j = \varnothing, i, j \in [1:r], i \neq j,$$

то $\exists\ \ p \in [1:r]$: $\left|\bar{S}_p\right| \geq 2$. Ввиду обозначений (27), $w_{v_p}, w_{v_p+1} \in \bar{S}_p$. Положим

$$k_0 := w_{v_p+1} \in \bar{S}_p.$$

Возьмём $x_0 < t_0$; $x_l := t_{w_{v_l}}$, $\forall\ l \in [1:r]$; $x_{r+1} > x_r$;…; $x_{n+1} > x_n$.

С учётом принятых обозначений имеем следующее расположение точек сетки T с индексами из множества $\bar{S}$:

$$\begin{aligned} &x_0 < x_1 = t_{w_{v_1}} < \ldots < t_{w_{v_1+u_1}} < x_2 = t_{w_{v_2}} < \ldots < t_{w_{v_2+u_2}} < \ldots < x_p = t_{w_{v_p}} < \\ &< t_{w_{v_p+1}} = t_{k_0} < \ldots < t_{w_{v_p+u_p}} < \ldots < x_r = t_{w_{v_r}} < \ldots < t_{w_{v_r+u_r}} < x_{r+1} \ldots < x_{n+1}. \end{aligned} \tag{29}$$

Определим вектор коэффициентов алгебраического полинома A_ε, удовлетворяющий условиям (I)–(III) леммы 1. Сначала построим вспомогательный вектор A_ε^*, решив для достаточно малого $\varepsilon > 0$ систему

$$\begin{cases} p_n\left(A_e^*, t_{w_{\nu l}}\right) = p_n\left(A^*, t_{w_{\nu l}}\right),\ l \in [1:r], \\ p_n\left(A_e^*, x_k\right) = p_n\left(A^*, x_k\right),\ k \in [r+1:n], \\ p_n\left(A_\varepsilon^*, t_{k_0}\right) = \begin{cases} p_n\left(A^*, t_{k_0}\right) - \varepsilon, & \text{если } f\left(A^*, k_0\right) = f_1\left(A^*, k_0\right) \\ p_n\left(A^*, t_{k_0}\right) + \varepsilon, & \text{если } f\left(A^*, k_0\right) = f_2\left(A^*, k_0\right) \end{cases} \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение, поскольку определитель из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля ([3]), а число неизвестных совпадает с количеством уравнений. Обозначив $A_\varepsilon = A^* - A_\varepsilon^*$, запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} p_n\left(A_\varepsilon, t_{w_{\nu l}}\right) = 0,\ l \in [1:r], \\ p_n\left(A_\varepsilon, x_k\right) = 0,\ k \in [r+1:n], \\ p_n\left(A_\varepsilon, t_{k_0}\right) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } f\left(A^*, k_0\right) = f_1\left(A^*, k_0\right) \\ -\varepsilon, & \text{если } f\left(A^*, k_0\right) = f_2\left(A^*, k_0\right) \end{cases} \end{cases} \tag{30}$$

Ясно, что $A_\varepsilon \neq 0_{n+1}$ и $A_\varepsilon \longrightarrow 0_{n+1}$, при $\varepsilon \downarrow 0$.

Пусть, например $p_n\left(A_\varepsilon, t_{k_0}\right) = \varepsilon > 0$, т. е. $f\left(A^*, k_0\right) = f_1\left(A^*, k_0\right)$. Ввиду свойства 2) разбиения, поскольку $k_0 \in \overline{S}_p$, то

$$f\left(A^*, k\right) = f_1\left(A^*, k\right) = p_n\left(A^*, t_k\right) - y_{1,k} = \rho^*,\ \forall\ \ k \in \overline{S}_p. \tag{31}$$

Берём $A = A_\varepsilon$, в случае если p – чётно и $A = -A_\varepsilon$, в случае если p – нечётно, а $z = t_{k_0} \in \left(x_p; x_{p+1}\right)$. Тогда, используя лемму 1, получаем

$$(-1)^{p-l}\, p_n\left(A_\varepsilon, t_k\right) \geq 0,\ \forall\ \ k \in \overline{S}_l,\ \forall\ \ l \in [1:r]. \tag{32}$$

В частности, учитывая свойство 3), выполняются равенства

$$p_n\left(A_\varepsilon, t_k\right) = 0,\ \forall\ \ k \in Z. \tag{33}$$

Из (33) вытекают равенства

$$f\left(A_\varepsilon^*,\ k\right) = \rho^*,\ \ \forall\, k \in Z. \tag{34}$$

Рассмотрим случай, когда $(p - l)$ – чётно. Тогда из (32) получаем $p_n\left(A_\varepsilon, t_k\right) \geq 0,\ \forall\ \ k \in \overline{S}_l$, и, следовательно,

$$p_n\left(A_\varepsilon^*,\ t_k\right) \leq p_n\left(A^*,\ t_k\right),\ \forall\ \ k \in \overline{S}_l. \tag{35}$$

Из (31) ввиду свойства 2) разбиения имеем

$$f\left(A^*, k\right) = f_1\left(A^*, k\right),\ \forall\, k \in \overline{S}_l, \tag{36}$$

причём

$$f_1\left(A^*, k\right) > f_2\left(A^*, k\right),\ \forall\, k \in \overline{S}_l \setminus Z.$$

Поскольку $A_\varepsilon^* \longrightarrow A^*$ при $\varepsilon \downarrow 0$, то из последнего неравенства при достаточно малом ε > 0 вытекают неравенства

$$f_1\left(A_\varepsilon^*, k\right) > f_2\left(A_\varepsilon^*, k\right),\ \forall\, k \in \overline{S}_l \setminus Z.$$

Отсюда

$$f\left(A_\varepsilon^*, k\right) = f_1\left(A_\varepsilon^*, k\right),\ \forall\, k \in \overline{S}_l \setminus Z. \tag{37}$$

Из (35) $f_1\left(A_\varepsilon^*,k\right)\le f_1\left(A^*,k\right)$. Тогда ввиду (37), (36) получаем $f\left(A_\varepsilon^*,\,k\right)\le f\left(A^*,\,k\right),\ \forall\ \ k\in\bar{S}_l\setminus Z$. Следовательно, ввиду (34)

$$f\left(A_\varepsilon^*,k\right)\le\rho^*,\ \forall\ k\in\bar{S}_l. \tag{38}$$

Аналогично выводится неравенство (38) и для случая, когда $(p-l)$ – нечётно. Таким образом, (38) выполняется $\forall\ \ l\in[1:r]$.

Последнее означает, что

$$f\left(A_\varepsilon^*,k\right)\le\rho^*,\ \forall\ k\in\bar{S}. \tag{39}$$

Наконец, рассмотрим индексы $k\in[0:N]\setminus\bar{S}$. Имеем $f\left(A^*,k\right)<\rho^*$. Уменьшая при необходимости величину $\varepsilon>0$, добиваемся выполнения неравенства $f\left(A_\varepsilon^*,k\right)<\rho^*$.

Отсюда ввиду (34), (39) получаем при достаточно малом $\varepsilon>0$

$$\max_{k\in[0:N]} f\left(A_\varepsilon^*,\,k\right)=\rho^*,\ \forall\ k\in[0:N]. \tag{40}$$

Равенство (40) противоречит единственности решения задачи (1). Аналогичное противоречие получается в случае $p_n\left(A_\varepsilon,t_{k_0}\right)=-\varepsilon<0$. Следовательно, ситуация (А) нереализуема.

Для следующих двух случаев принципиальное отличие от случая (А) состоит лишь в способе построения вектора коэффициентов полинома, удовлетворяющего условиям (I)–(III) леммы 1.

(Б). Пусть $r=n+1$ и $w_{v_1}\notin Z$ (ввиду (27) $w_{v_1}\in\bar{S}_1$). В этом случае полагаем $k_0:=w_{v_1}$, $z:=t_{k_0}$. По свойству 3), $Z\cap\bar{S}_1=\varnothing$. Возьмём $x_0<t_0$. Далее имеем

$$\begin{aligned} x_0<t_{k_0}=t_{w_{v_1}}<\ldots<t_{w_{v_1+u_1}}<x_1=t_{w_{v_2}}<\ldots<t_{w_{v_2+u_2}}<\\ <\ldots<x_n=t_{w_{v_{n+1}}}<t_{w_{v_{n+1}+u_{n+1}}}<x_{n+1}.\end{aligned} \tag{41}$$

Строим вектор $A_\varepsilon=A^*-A_\varepsilon^*$, где A_ε^*, – решение системы:

$$\begin{cases} p_n\left(A_\varepsilon^*,\,t_{w_{v_l}}\right)=p_n\left(A^*,\,t_{w_{v_l}}\right),\ l\in[2:r],\\ p_n\left(A_\varepsilon^*,\,t_{k_0}\right)=\begin{cases} p_n\left(A^*,\,t_{k_0}\right)-\varepsilon, \text{ если } f\left(A^*,\,k_0\right)=f_1\left(A^*,\,k_0\right),\\ p_n\left(A^*,\,t_{k_0}\right)+\varepsilon, \text{ если } f\left(A^*,\,k_0\right)=f_2\left(A^*,\,k_0\right).\end{cases}\end{cases} \tag{42}$$

Пользуясь леммой 1 и свойствами разбиения, как и в случае (А), приходим к выводу о том, что A_ε^* будет решением задачи (1) при достаточно малом $\varepsilon>0$, следовательно, ситуация (Б) также невозможна.

(В). Осталось рассмотреть случай, когда $r=n+1$ и $w_{v_1}\in Z$. Из свойства 4) следует, что разбиение имеет вид

$$\bar{S}_1=\left\{w_{v_1}\right\}\subset Z\ \ ,\ldots,\ \ \bar{S}_{d-1}=\left\{w_{v_{d-1}}\right\}\subset Z,\ \ \bar{S}_d=\left\{w_{v_d},\ldots,w_{v_d+u_d}\right\},\ldots,\bar{S}_{n+1},$$

где $\bar{S}_d\cap Z=\varnothing$, $d>1$.

Действительно, если бы для всех $i\in[1:r]$ выполнялось $\bar{S}_i\cap Z\ne\varnothing$, то множество Z содержало бы $n+1$ элементов, что противоречит предположению.

Полагаем $k_0:=w_{v_d}$, $z:=t_{k_0}$, $x_0<t_0$. Далее имеем

$$\begin{aligned} x_0<x_1=t_{w_{v_1}}<\ldots<x_{d-1}=t_{w_{d-v_1}}<t_{w_{v_d}}=t_{k_0}<\ldots<t_{w_{v_d}+u_d}<\\ <t_{w_{v_d+1}}=x_d<\ldots<t_{w_{v_d+u_d}}<\ldots<x_n=t_{w_{v_{n+1}}}<\ldots<t_{w_{v_{n+1}+u_{n+1}}}<x_{n+1}.\end{aligned} \tag{43}$$

Возьмём $k_0:=w_{v_d}$, $\varepsilon>0$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} p_n\left(A_\varepsilon^*, t_{w_{\nu l}}\right) = p_n\left(A^*, t_{w_{\nu l}}\right), \ l = 1,\dots,d-1, d+1,\dots r, \\ p_n\left(A_\varepsilon^*, t_{k_0}\right) = \begin{cases} p_n\left(A^*, t_{k_0}\right) - \varepsilon, \text{ если } f\left(A^*, k_0\right) = f_1\left(A^*, k_0\right), \\ p_n\left(A^*, t_{k_0}\right) + \varepsilon, \text{ если } f\left(A^*, k_0\right) = f_2\left(A^*, k_0\right). \end{cases} \end{cases} \quad (44)$$

Повторяя те же рассуждения, что и для случая (А), приходим к выводу о том, что A_ε^* будет решением задачи (1) при достаточно малом $\varepsilon < 0$, следовательно, ситуация (В) также невозможна.

Итак, неравенство $r < n + 2$ ложно, следовательно, $r \geq n + 2$.

Теорема доказана.

Из теорем 1, 3 вытекает

Следствие 2. Если решение задачи (1) не единственно, то $|\mathfrak{R}| = \infty$, при этом $1 \leq |Z| < n+1$.

Доказательство. Пусть задача (1) имеет не единственное решение. Тогда ни одно из условий (α), (β) условие теоремы 3 не выполняется. Поскольку (α) не выполняется, то

$$|Z| < n+1. \quad (45)$$

Поскольку (β) не выполняется, то

$$\forall \ \text{ базиса } \sigma^*: \ \rho^* < \rho_i^*\left(\sigma^*\right) \ \text{ для } \ i = 0,1. \quad (46)$$

Пусть A^* – решение задачи (1). Имеем

$$\rho\left(A^*\right) = \rho^*. \quad (47)$$

Из (46), (47) вытекает, что для этого вектора не выполняется условие (б) теоремы 1. Из условия (а) теоремы 1 получаем, что $Z \neq \varnothing$. Отсюда ввиду (45) вытекает неравенство $1 \leq |Z| < n+1$.

Пусть $\bar{A}, \tilde{A}$ – решения задачи (1) и $\bar{A} \neq \tilde{A}$. В силу выпуклости множества $\mathfrak{R}$ любой вектор $\alpha \bar{A} + (1-\alpha)\tilde{A}$ при $\alpha \in [0;1]$ также будет решением задачи (1). Следовательно, $|\mathfrak{R}| = \infty$.

Что и требовалось доказать.

Замечание 4. В общем случае из $1 \leq |Z| < n+1$ не следует, что решение не единственно.

Пример 1. Пусть $n = 1$, $N = 4$, $T = \{0 < 1 < 2 < 3\}$, $\Phi(0) = [-1;1]$, $\Phi(1) = [-1;0]$, $\Phi(2) = [0;1]$, $\Phi(3) = [-1;0]$. Решение $p_1(t) \equiv 0$ единственно, $\rho^* = m = 1$, Z = {0}.

Пусть $M := \left\{k \in [0:N] : \dfrac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = m\right\}$.

Следствие 3. Если $|M| \geq n+1$, то задача (1) имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть $Z \neq \varnothing$. Тогда $Z = M$, следовательно, выполняется условие (α) теоремы 3 и решение задачи (1) будет единственным.

Если $Z = \varnothing$, то для решения задачи (1) будет выполняться условие (б) теоремы 1 и, следовательно, условие (β) теоремы 3.

Что и требовалось доказать.

** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ 1295.2003.1).*

Библиографический список

1. *Выгодчикова И.Ю.* О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3.С. 25–27.

2. *Выгодчикова И.Ю.* Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 27–31.

3. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

4. *Выгодчикова И.Ю.* О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 15–18.

УДК 517.968

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В.П. Курдюмов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
e-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений интегро-дифференциального оператора.

Estimates for Eigenfunctions and Eigenvalues of an Integral-differential Operator

V.P. Kurdyumov

Asymptotic formulas are obtained for eigenfunctions and eigenvalues of an integral-differential operator.

Рассматривается интегро-дифференциальный оператор

$$A = A\left(M, g, v\right)$$

где $Af = Mf + g\left(x\right)\int\limits_0^\pi f\left(t\right)v\left(t\right)dt,\ Mf = \int\limits_0^x M\left(x,t\right)f\left(t\right)dt,\ 0 \le x \le \pi.$

Для случая $v = 2$ и $p(x), q(x) \in L_2[0,1]$ задача о нахождении оценок для собственных функций и собственных значений оператора L методом подобных операторов исследовалась в [1]. В настоящей работе методами классической спектральной теории уточняется и обобщается результат из [1].

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Введем оператор $L_0 : y^{(v)}, y^{(2s)}(0) = y^{(2s)}(1) = 0,\ s = 0,1,\ldots,v/2-1$, собственные функции и собственные значения которого имеют вид $e_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x,\ \lambda_k = -(k\pi)^v,\ k = 1,2,\ldots$. Положим $\lambda = -\rho^v$ и обозначим через S_δ область, получающуюся из области $S = \left\{\rho : \operatorname{Im}\rho \ge -\varepsilon\right\}$, $\varepsilon > 0$, удалением окрестностей, ограниченных круговыми контурами γ_k достаточно малого радиуса вокруг точек $\rho_k = k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, для $v_1 = 0$, или область, получающуюся из области $S = \left\{\rho : \arg\rho \in \left[-\dfrac{\pi}{v}, \dfrac{\pi}{v}\right]\right\}$ удалением окрестностей, ограниченных такими же контурами вокруг точек $\rho_k = k\pi,\ k = 1,2,\ldots$, для $v_1 \ge 1$.

Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E – единичный оператор, есть резольвента оператора L и $R_{0,\lambda}$ – резольвента оператора L_0. Приведем известный результат ([2], с. 388).

Для ядра $G_0(x,t,\lambda)$ резольвенты $R_{0,\lambda}$ в области S_δ справедливы оценки

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} G_0(x,t,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\rho|^{v-1-s}}\right),\ s = 0,\ldots,v-1\,. \tag{1}$$

Лемма 1. В области S_δ при $|\rho|$ достаточно больших R_λ существует, справедлива формула

$$R_\lambda f = R_{0,\lambda} f + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k R_{0,\lambda}(ND^{n-1}R_{0,\lambda})^k f,\ \ f \in L[0,1], \tag{2}$$

и ряд в (2) сходится равномерно по $x \in [0,1]$. Здесь D – оператор дифференцирования.

Доказательство. Пусть $y = R_\lambda f$. Тогда $y^{(v)} - \lambda y = f - Ny^{(v-1)}$.

Откуда

$$y = R_{0,\lambda} f - R_{0,\lambda} N y^{(v-1)}. \tag{3}$$