УДК 514.764

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Галаев

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: sgalaev@mail.ru

В работе вводится понятие внутренней геометрии многообразия почти контактной метрической структуры. В терминах внутренней геометрии дается описание некоторых классов пространств с почти контактной метрической структурой. Вводится новый тип почти контактных метрических пространств –- эрмитовых почти контактных метрических пространств.

Ключевые слова: почти контактное многообразие, многообразие Сасаки, K-контактное многообразие, внутренняя геометрия почти контактного метрического многообразия.

The Intrinsic Geometry of Almost Contact Metric Manifolds

S. V. Galaev

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: sgalaev@mail.ru

In this paper the notion of the intrinsic geometry of an almost contact metric manifold is introduced. Description of some classes of spaces with almost contact metric structures in terms of the intrinsic geometry is given. A new type of almost contact metric spaces, more precisely, Hermition almost contact metric spaces, is introduced.

Key words: almost contact manifold, Sasakian manifold, K-contact manifold, the intrinsic geometry of almost contact metric manifolds.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование геометрии многообразий почти контактной метрической структуры начинается с выходом основополагающих работ Chern Shiing-Shen [1], J. W. Gray [2], S. Sasaki [3]. Почти контактные метрические структуры являются нечетномерным аналогом почти эрмитовых структур, и между этими классами структур существует ряд важных взаимосвязей. В то же время геометрия почти контактных метрических структур существенно отличается от геометрии почти эрмитовых структур и требует принципиально новых средств изучения. Достаточно полно результаты, полученные в этой области до 1976 года, отражены в книге [4]. Большой вклад в развитие геометрии почти контактных метрических пространств внесли В. Ф. Кириченко и его ученики (см., например, [5, 6]). Получить представление о последних достижениях в этой области, а также о приложениях геометрии почти контактных метрических структур к теоретической физике, можно по работам [7, 8].

В настоящей работе вводится понятие внутренней геометрии многообразия почти контактной метрической структуры. В терминологии В. В. Вагнера многообразие почти контактной метрической структуры является неголономным многообразием коразмерности 1 с дополнительными, называемыми им внутренними, структурами. Понятие внутренней геометрии неголономного многообразия было определено Схоутеном как совокупности тех свойств, которые зависят только от параллельного перенесения внутри самого неголономного многообразия и от его оснащения в объемлющем пространстве. Вагнер пишет: «Схоутен показывает возможность непосредственного построения внутренней геометрии неголономного многообразия без использования параллельного перенесения во внешнем пространстве. В случае метрического неголономного многообразия внутренняя геометрия определяется заданием его оснащения и метрики внутри локальных касательных пространств» [9]. Развивая внутреннюю геометрию неголономного многообразия, Вагнер определяет и исследует свойства тензора кривизны неголономного многообразия, обобщающего тензор кривизны Схоутена. Тензор кривизны, названный позже тензором кривизны Вагнера, строится им сначала для неголономного метрического многообразия произвольной коразмерности [9], а затем уточняется для случая неголономного многообразия коразмерности 1 с внутренней линейной связностью [10]. Построенная Вагнером теория кривизны неголономного многообразия использовалась им для решения задач классической механики и вариационного исчисления.

В данной статье предлагается использовать методы неголономной геометрии, разработанные В. В. Вагнером, для исследования геометрии многообразий с почти контактной метрической структурой. Новый подход позволяет выделить новые типы пространств. Так, например, в работе дано определение эрмитова почти контактного метрического пространства. Известные уже результаты получают новое описание на языке внутренней геометрии. Следуя идеологии, заложенной в работах Схоутена и Вагнера, мы определяем внутреннюю геометрию почти контактного метрического пространства X как совокупность тех свойств, которыми обладают: гладкое распределение D, задаваемое контактной формой η; допустимое поле аффинора φ (называемое нами допустимой почти комплексной структурой) такое, что $\varphi^2 = -1$; поле допустимых тензоров римановой метрики g, связанное с допустимой почти комплексной структурой равенством $g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y})$, где $\vec{X}, \vec{Y}$ — допустимые векторные поля. К объектам внутренней геометрии почти контактного метрического пространства следует отнести и те объекты, которые являются производными от уже указанных внутренних структур: кососимметрическая 2-форма $\omega = d\eta$; векторное поле $\vec{\xi}$, называемое полем Риба, описывающее оснащение распределения D — $\vec{\xi} \in D^{\perp}$ и однозначно определяемое равенствами $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = \mathrm{Span}\,(\vec{\xi})$ в случае, когда форма ω имеет максимальный ранг; внутренняя связность ∇, осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых и однозначно определяемая полем g; связность ∇^1, являющаяся естественным продолжением связности ∇ и осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия X.

Работа состоит из двух частей. В первой части излагаются основные понятия теории многообразий с почти контактной метрической структурой. Вводится понятие адаптированной системы координат. Адаптированные координаты играют в геометрии неголономных многообразий ту же роль, что и голономные координаты на голономном многообразии (см., например [10]). Адаптированные координаты существенно используются в геометрии слоений [11].

Далее вводится понятие допустимой (к распределению D) тензорной структуры. Допустимая тензорная структура является объектом внутренней геометрии неголономного многообразия [10]. В работах по геометрии расслоенных пространств допустимые тензорные структуры называются полубазисными. Сообщаются некоторые сведения о внутренних связностях, совместимых с допустимыми тензорными структурами. Наряду со связностью, совместимой с допустимой римановой метрикой, изучаются связности, совместимые с допустимой почти комплексной структурой. Обсуждается понятие связности над распределением, введенное в работах [12, 13] и используемое затем применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой в работах [14, 15]. Во второй части в терминах внутренней геометрии излагаются некоторые из основных положений геометрии почти контактных метрических пространств. Доказывается, что определяемая внутренним образом почти контактная метрическая структура соответствует некоторой почти контактной метрической структуре, определяемой обычным образом. Введенная ранее внутренняя связность используется для описания характеристик нормальных и сасакиевых структур.

1. ДОПУСТИМЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ СТРУКТУРЫ И СОВМЕСТИМЫЕ С НИМИ ВНУТРЕННИЕ СВЯЗНОСТИ

Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности n, $\Xi(X)$ — $C^{\infty}(X)$-модуль гладких векторных полей на X, d — оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^{∞}. Для упрощения изложения тензорное поле в дальнейшем иногда называется тензором. Почти контактной метрической структурой на X называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X, где φ — тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1,\ \varphi(\vec{\xi}) = 0,\ \eta\circ\varphi = 0,\ \varphi^2\vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi},\ g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}),$$

$\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$. Легко проверить, что тензор $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi\vec{Y})$ кососимметричен. Он называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется почти контактным метрическим многообразием. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой. Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_{φ} — кручение Нейенхейса, образованное тензором φ. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие с заданной на нем сасакиевой структурой называется сасакиевым многообразием. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^{\perp} = \mathrm{Span}\,(\vec{\xi})$ — его оснащение. В дальнейшем будем полагать, что ограничение формы $\omega = d\eta$

на распределении D является невырожденной формой. В этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = \mathrm{Span}\,(\vec{\xi})$ и называется вектором Риба. Гладкое распределение D мы иногда будем называть неголономным многообразием.

Для исследования внутренней геометрии неголономного многообразия и вообще для изучения почти контактных метрических структур удобно использовать карты, обладающие дополнительными свойствами. Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n)$ $(a, b, c, e = 1, \ldots, n-1)$ на многообразии X будем называть адаптированной к неголономному многообразию D, если $D^\perp = \mathrm{Span}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$. Нетрудно установить, что любые две адаптированные карты связаны между собой преобразованиями вида: $x^a = x^a(x^{\tilde{a}})$, $x^n = x^n(x^{\tilde{a}}, x^{\tilde{n}})$. Такие системы координат называются Вагнером в работе [10] градиентными. Адаптированные карты находят применение в теории слоений (см., например [7]).

Пусть $P : TX \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = \mathrm{Span}\,(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a\vec{e}_b] = M^n_{ab}\partial_n$, где компоненты M^n_{ab} образуют так называемый тензор неголономности [10]. Если потребовать, чтобы для всех адаптированных координат выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a\vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением исключительно адаптированных координат с условием $\vec{\xi} = \partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. При преобразовании адаптированной системы координат векторы адаптированного базиса преобразуются следующим образом: $\vec{e}_a = \dfrac{\partial x^{\tilde{a}}}{\partial x^a}\vec{e}_{\tilde{a}}$.

Тензорное поле, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению $D^\perp$, а ковекторный аргумент коллинеарен форме η. Координатное представление допустимого тензорного поля типа (p, q) в адаптированной карте имеет вид

$$t = t^{a_1,\ldots,a_p}_{b_1,\ldots,b_q}\vec{e}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \ldots \otimes dx^{b_q}.$$

Так, в частности, под допустимым векторным полем будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в распределении D, а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на оснащении $D^\perp$. Понятно, что всякая тензорная структура, заданная на многообразии X, определяет на нем единственную допустимую тензорную структуру того же типа. Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа $(1, 1)$. Поле аффинора φ мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форма $\omega = d\eta$ также является допустимым тензорным полем. В геометрии расслоенных пространств допустимое тензорное поле называется полубазисным.

Теорема 1. *Производные $\partial_n t$ от компонент допустимого тензорного поля t в адаптированной системе координат являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа.*

Справедливость теоремы следует из того, что компоненты допустимого тензорного поля при преобразовании адаптированных координат преобразуются по закону $t^{a_1,\ldots,a_p}_{b_1,\ldots,b_q} = t^{\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_p}_{\tilde{b}_1,\ldots,\tilde{b}_q}A^{a_1}_{\tilde{a}_1}\ldots A^{b_1}_{\tilde{b}_1}$, где $A^{a_i}_{\tilde{a}_i} = \dfrac{\partial x^{a^i}}{\partial x^{\tilde{a}^i}}$.

Инвариантный характер сформулированного утверждения заключается в равенстве: $L_{\vec{\xi}}t^{a_1,\ldots,a_p}_{b_1,\ldots,b_q} = \partial_n t^{a_1,\ldots,a_p}_{b_1,\ldots,b_q}$, где $L_{\vec{\xi}}$ — оператор дифференцирования Ли вдоль поля $\vec{\xi}$.

Назовем допустимое тензорное поле интегрируемым, если найдется такой атлас адаптированных карт, что в каждой из карт этого атласа компоненты поля постоянны. Из теоремы 1 немедленно получаем, что необходимым условием интегрируемости допустимого поля t является обращение в нуль производных $\partial_n t$. Назовем допустимую тензорную структуру t квазиинтегрируемой, если в адаптированных координатах выполняется равенство $\partial_n t = 0$. Форма $\omega = d\eta$ является важным примером интегрируемой допустимой тензорной структуры. Введем в рассмотрение тензор $\tilde{N}_\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = (P \circ N_\varphi)(\vec{X}, \vec{Y})$, где $\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$. Следующие две теоремы указывают на важность только что данных определений.

Теорема 2. *Аффинорная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\tilde{N}_\varphi = 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Выражение для кручения Нейенхейса

$$N_\varphi(\vec{X}, \vec{Y}) = [\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}] + \varphi^2[\vec{X}\vec{Y}] - \varphi[\varphi\vec{X}, \vec{Y}] - \varphi[\vec{X}, \varphi\vec{Y}]$$

тензора φ в адаптированных координатах имеет следующий вид:

$$N^e_{ab} = \varphi^c_a \vec{e}_c \varphi^e_b - \varphi^d_b \vec{e}_d \varphi^e_a + \varphi^e_c \vec{e}_b \varphi^c_a - \varphi^e_d \vec{e}_a \varphi^d_b, \tag{1}$$

$$N^n_{ab} = 2\varphi^c_a \varphi^d_b \omega_{dc}, \tag{2}$$

$$N^e_{na} = -\varphi^e_c \partial_n \varphi^c_a, \tag{3}$$

$$N^n_{na} = 0, \tag{4}$$

$$N^a_{nn} = 0. \tag{5}$$

Если структура φ интегрируема, то из (1)–(5) следует, что

$$N_\varphi(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \varphi^c_a \varphi^d_b M^n_{cd} \partial_n, \qquad N_\varphi(\partial_n, \vec{e}_a) = -(\partial_n \varphi^c_b)\varphi^a_c \vec{e}_a.$$

Из последних равенств непосредственно следует, что $\tilde{N}_\varphi = 0$.

Достаточность. Пусть теперь $\tilde{N}_\varphi = 0$. Рассмотрим достаточно малую окрестность U произвольной точки многообразия X. При этом полагаем, что $U = U_1 \times U_2$, $TU = \mathrm{Span}\,(\partial_a) \oplus \mathrm{Span}\,(\partial_n)$. Введем естественное обозначение: $T(U_1) = \mathrm{Span}\,(\partial_a)$. Определим над множеством U изоморфизм расслоений $\psi : D \to T(U_1)$ формулой $\psi(\vec{e}_a) = \partial_a$. Веденный изоморфизм индуцирует почти комплексную структуру на многообразии U_1, которая интегрируема в силу равенства $\tilde{N}_\varphi = 0$. Действительно, из (3) следует, что правая часть (1) совпадает с кручением почти комплексной структуры, индуцируемой на многообразии U_1. Выбирая подходящую систему координат на U_1 и, следовательно, подходящую адаптированную систему координат на многообразии X, получаем карту, в которой компоненты аффинора φ постоянны. □

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: $\tilde{N}_\varphi = 0$, $\omega(\varphi\vec{u}\varphi\vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$.*

Доказательство. Используя координатные представления (1)–(5), замечаем, что условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ эквивалентно следующей системе равенств:

$$\varphi^c_a \vec{e}_c \varphi^e_b - \varphi^d_b \vec{e}_c \varphi^e_a + \varphi^e_c \vec{e}_b \varphi^c_a - \varphi^e_d \vec{e}_a \varphi^d_b = 0, \qquad -\varphi^e_c \partial_n \varphi^c_a = 0, \qquad 2\varphi^c_a \varphi^d_b \omega_{dc} = 2\omega_{ba}, \tag{6}$$

что и доказывает теорему. □

Следующее утверждение указывает на целесообразность введения таких понятий, как адаптированная система координат и интегрируемость допустимого тензорного поля.

Теорема 4. *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда аффинорная структура φ интегрируема.*

Доказательство. Справедливость утверждения следует из того, что для контактной метрической структуры условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$ эквивалентно равенству $\tilde{N}_\varphi = 0$, так как условие (6), записываемое в безкоординатном виде $\omega(\varphi\vec{u}, \varphi\vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$, выполняется автоматически в силу определения контактной метрической структуры. □

Теорема 4 подтверждает важность введения в рассмотрение нового типа почти контактных метрических пространств. А именно почти контактное метрическое пространство назовем *эрмитовым почти контактным метрическим пространством*, если выполняется условие $\tilde{N}_\varphi = 0$.

Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии D [10] понимается отображение $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\nabla_{f_1\vec{u_1}+f_2\vec{u_2}} = f_1\nabla_{\vec{u_1}} + f_2\nabla_{\vec{u_2}}$; 2) $\nabla_{\vec{u}} f\vec{v} = f\nabla_{\vec{u}}\vec{v} + (\vec{u}f)\vec{v}$, где ΓD — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - P[\vec{X}, \vec{Y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$. Перейдем к определению связности над распределением D. Введем в рассмотрение векторное расслоение $(D,\, \pi,\, X)$, тотальное пространство которого совпадает с распределением D.

Для того чтобы задать связность над распределением D, необходимо предварительно ввести на D структуру гладкого многообразия, которая задается следующим образом. Каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X ставится в соответствие карта $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+\alpha})$ на многообразии D, где $x^{n+\alpha}$ — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$.

Понятие *связности над распределением*, введенное в работах [12, 13], использовалось затем применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой, в работах [14, 15]. Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ — естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D. Таким образом, задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(X^a, X^{n+a})$ такого, что $HD = \mathrm{Span}\,(\vec{\epsilon}_a)$, где $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$.

Обычным образом проверяется, что связность над распределением D совпадает с линейной связностью в неголономном многообразии D, если имеют место равенство $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a) x^{n+c}$. В работе [15] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность получается из внутренней связности с помощью равенства $TD = \tilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \tilde{HD}$. По существу, продолженная связность является связностью в векторном расслоении.

Важнейший пример многообразия с допустимой тензорной структурой и совместимой с ней внутренней связностью рассмотрен В. В. Вагнером в работе [10]. В этой работе в неголономном многообразии вводится внутренняя метрика с помощью допустимого тензорного поля g, удовлетворяющего обычным свойствам метрического тензора в римановом пространстве.

Так же как и в голономном случае, введение метрики в неголономном многообразии определяет там внутреннюю линейную симметричную связность, коэффициенты которой определяются из системы уравнений:

$$\nabla_c g_{ab} = \vec{e}_c g_{ab} - \Gamma^d_{ca} g_{db} - \Gamma^d_{cb} g_{ad}.$$

Рассмотрим допустимую почти комплексную структуру φ. В дальнейшем нами будет использоваться утверждение, доказательство которого основано на идеях, используемых при доказательстве теоремы 3.4 [16, гл. 9]. А именно справедлива

Теорема 5. *Каждое неголономное многообразие с почти комплексной структурой φ и внутренней линейной связностью ∇ без кручения допускает внутреннюю линейную связность $\tilde{\nabla}$, совместимую со структурой φ и имеющую кручение S такое, что:*

$$S(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{4} \tilde{N}_\varphi(\vec{u}, \vec{v}),$$

где $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma(D)$.

Идея доказательства сводится к следующему определению связности $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{\nabla}_{\vec{u}} \vec{v} = \nabla_{\vec{u}} \vec{v} - Q(\vec{u}, \vec{v}), \qquad (7)$$

где Q специальным образом конструируется с помощью ∇ и φ [16, с. 137].

2. ВНУТРЕННИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Введем понятие почти контактной метрической структуры в новом смысле. А именно будем говорить, что дано многообразие почти контактной метрической структуры в новом смысле, если на многообразии X с заданной на нем контактной формой η дополнительно задана пара допустимых тензорных структур (φ, g) такая, что $\varphi^2 \vec{u} = -\vec{u}$, $g(\varphi\vec{u}, \varphi\vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v})$.

Теорема 6. *Задание многообразия почти контактной метрической структуры в новом смысле эквивалентно заданию многообразия почти контактной метрической структуры в старом смысле.*

Доказательство. Предположим, что на многообразии X задана почти контактная метрическая структура в новом смысле. Введем на многообразии X поле тензоров $\tilde{g}$ римановой метрики, полагая по определению: $\tilde{g}(\vec{u},\vec{v}) = g(\vec{u},\vec{v})$, где $\vec{u},\vec{v} \in \Gamma D$, $\tilde{g}(\vec{u},\vec{\xi}) = 0$, $\tilde{g}(\vec{\xi},\vec{\xi}) = 1$. Справедливость необходимых условий для аффинора φ и формы $\tilde{g}$ устанавливается непосредственно. □

Будем говорить, что дано сасакиево многообразие в новом смысле, если на многообразии X с заданной на нем контактной метрической структурой дополнительно предполагается выполнение следующего условия: $\tilde{N}_\varphi = 0$. Теоремы 3 и 6 влекут справедливость следующего утверждения.

Теорема 7. *Задание сасакиевого многообразия в новом смысле эквивалентно заданию сасакиевого многообразия в старом смысле.*

Будем придерживаться следующих обозначений: φ и g — допустимые почти комплексная и риманова метрики соответственно, ∇ — внутренняя метрическая связность, $\tilde{g}$ и $\tilde{\nabla}$ — метрический тензор в объемлющем пространстве и его связность Леви – Чивита соответственно.

Теорема 8. *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда структура φ квазиинтегрируема и выполняется равенство $\nabla\varphi = 0$, где ∇ — внутренняя метрическая связность.*

Доказательство. *Необходимость.* Из теоремы 3 следует, что $\tilde{N}_\varphi = 0$ и, следовательно, аффинорная структура φ квазиинтегрируема. Кроме того, конструируя из метрической связности новую связность, для которой $S(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{4}\tilde{N}_\varphi(\vec{u},\vec{v})$, $\vec{u},\vec{v} \in \Gamma(D)$, убеждаемся в справедливости второго условия.

Достаточность. Из равенства (7) следует, что в нашем случае $Q(\vec{u},\vec{v}) = 0$ и $\tilde{N}_\varphi(\vec{u},\vec{v}) = 0$. Учитывая, что структура φ квазиинтегрируема, убеждаемся в справедливости теоремы. □

Заметим, что равенство $\nabla\varphi = 0$ оказывается неверным, если связность ∇ и аффинорная структура φ рассматриваются как структуры, заданные на всем многообразии (см., например [7]).

Пусть, далее, ∇^1 — продолженная связность, конструируемая из внутренней связности следующим образом: $\tilde{HD} = HD \oplus \mathrm{Span}\,(\partial_n)$ (здесь ∂_n — векторное поле на многообразии D). Продолженная связность позволяет сформулировать следующий характеристический признак интегрируемости почти комплексной структуры φ.

Теорема 9. *Почти комплексная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\nabla^1\varphi = 0$.*

В заключение работы сформулируем утверждение, касающееся K-контактных многообразий.

Теорема 10. *Почти контактная метрическая структура является K-контактной структурой тогда и только тогда, когда форма g квазиинтегрируема.*

Справедливость теоремы следует из следующей цепочки эквивалентностей:

$$L_{\vec{\xi}}\tilde{g} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L_{\vec{\xi}}g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_n g = 0.$$

Библиографический список

1. *Chern S. S* Pseudogroupes continus infinis // Colloques Intern. Centre Nat. Rech. Sci. 1953. Vol. 52. P. 119–136.

2. *Gray J. W.* Some global properties of contact structures // Ann. of Math. 1959. Vol. 69, № 2. P. 421–450.

3. *Sasaki S.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure // Tôhoku Math. J. Second Series. 1960. Vol. 12, № 3. P. 459–476.

4. *Blair D. E.* Contact manifolds in Riemannian geometry. Berlin; N.Y. : Springer-Verlag, 1976. 146 p.

5. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. 1986. Т. 18. С. 25–71.

6. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.* Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 8. С. 71–100.

7. *Boyer C. P., Nakatаye M.* On Sasaki-Einstein manifolds in dimension five // Geom. Dedicata. 2010. № 144. P. 141–156.

8. *Stamin C., Udriste C.* Nonholonomic geometry of Gibbs contact structure // A Appl. Math. Phys. Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. 2010. Vol. 72, № 1. P. 153–170.

9. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий : VIII Междунар. конкурс им. Н. И. Лобачевского (1937) : отчёт. Казань : Казан. физ.-мат. общ-во, 1940. 327 с.

10. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

11. *Малахальцев М. А.* Слоения с листовыми структурами // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. 2002. Т. 73. С. 65–102.

12. *Вершик А.М., Гершкович В. Я.* Неголономные ди-

намические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундаментальные направления ВИНИТИ. 1987. Т. 16. С. 5–85.

13. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М. : Наука, 1984. 336 с.

14. *Букушева А. В., Галаев С. В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.

15. *Galaev S. V.* Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric [Электронный ресурс]. arXiv:1103.4337v1 [math.DG] 22 Mar 2011. 9 p. URL: http://arxiv.org/abs/1103.4337v1.

16. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. М. : Наука, 1981. Т. 2. 416 с.

УДК 519.872

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ В ЗАМКНУТЫХ СЕТЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Ю. И. Митрофанов, Е. С. Рогачко, Е. П. Станкевич

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: MitrophanovYuI@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru, StankevichElena@mail.ru

Предлагается метод управления распределением нагрузки в замкнутых сетях массового обслуживания с групповыми переходами требований. При использовании данного метода в сетях обслуживания рассматриваемого класса обеспечивается близкое к заданному распределение требований по системам. Управление осуществляется посредством использования в процессе функционирования сети различных маршрутных матриц в течение интервалов времени определенной длительности. Приводятся модели эволюции и приближенный метод вычисления стационарного распределения и других стационарных характеристик сетей массового обслуживания рассматриваемого класса.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, групповые переходы требований, распределение нагрузки, управление маршрутизацией, стационарное распределение.

Dynamic Load Allocation in Closed Queueing Networks with Batch Movements

Yu. I. Mitrophanov, E. S. Rogachko, E. P. Stankevich

Saratov State University,
Chair of Systems Analysis and Automatic Control
E-mail: MitrophanovYuI@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru, StankevichElena@mail.ru

A method of load allocation control in closed queueing networks with batch movements is proposed. When this method is used in queueing networks of considered type, close to given customer allocation among queueing systems is provided. The control is realized by use of different routing matrices during fixed time intervals in process of network operation. Models of evolution and an approximate method of computing a stationary distribution and other stationary characteristics of considered type queueing networks are presented.

Key words: queueing networks, batch movements, load allocation, routing control, stationary distribution.

ВВЕДЕНИЕ

В работах, посвященных проблемам распределения нагрузки в сетях массового обслуживания, под нагрузкой системы обслуживания, как правило, понимается число требований, пребывающих в ней. В сетях обслуживания используется распределение нагрузки двух типов — статическое и динамическое. Задачи статического распределения нагрузки решаются на этапах проектирования сетей массового обслуживания и непосредственно связаны с использованием методов оптимизации качества функционирования сетей обслуживания. Динамическое распределение нагрузки используется в процессе функционирования сетей массового обслуживания с целью повышения качества функционирования сетей за счет предотвращения скопления требований в системах или подсетях сетей обслуживания. Основу методов динамического распределения нагрузки составляет анализ состояний сети или систем обслуживания в определенные моменты времени и принятие решений на основе анализа об изменении соответствующих параметров сети. Разработке и развитию различных методов динамического управления распределением нагрузки в сетях массового обслуживания с одиночными переходами требований посвящено достаточно много работ [1–4].

В последнее время значительное внимание в теории массового обслуживания уделяется разработке и исследованию методов анализа сетей массового обслуживания с групповым поступлением,